Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра высшей математики

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для студентов радиотехнических
специальностей БГУИР
в 10-ти частях

А. А. Карпук, В. В. Цегельник, Р. М. Жевняк, И. В. Назарова

Часть 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Минск 2006

УДК 517+517.2 (075.8)
ББК 22.1+22.161.1 я 73
С 23

Р е ц е н з е н т:
зав. кафедрой математики Минского государственного высшего радиотехнического колледжа,
кандидат физико-математических наук, доцент Л. И. Майсеня

Сборник задач по высшей математике для студ. радиотех. спец. БГУИР. В 10 ч. Ч. 4: Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А. А. Карпук и др. – Мн. : БГУИР, 2006. – 107 с.

С 23

ISBN 985-444-996-3 (ч. 4)

В четвертую часть сборника вошли задачи и упражнения по разделу курса высшей математики «Дифференциальное исчисление функций одной переменной». В справочной форме содержатся основные теоретические сведения, решения типовых задач различных уровней сложности и набор заданий для практических занятий и самостоятельного решения.

УДК 517+517.2 (075.8)
ББК 22.1+22.161.1 я 73

Ч. 1: Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. В 10 ч. Ч.1: Аналитическая геометрия / А.А. Карпук, Р.М. Жевняк. – Мн.: БГУИР, 2002. – 112 с.: ил.; 2-е изд. – 2003, 3-е изд. – 2004.

Ч. 2: Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч. 2: Линейная алгебра (с решениями и комментариями) / А.А. Карпук, Р.М. Жевняк, В.В. Цегельник. – Мн.: БГУИР, 2004. – 154 с.

Ч. 3: Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч. 3: Введение в анализ / Н.Н. Третьякова, Т.М. Пушкарева, О.Н. Малышева. – Мн.: БГУИР, 2005. – 116 с.

ISBN 985-444-996-3 (ч. 4)
ISBN 985-444-727-8

Содержание

Введение

4-я часть «Сборника задач по высшей математике», запланированного к изданию в 10-ти частях, посвящена дифференциальному исчислению функций одной переменной – разделу курса высшей математики, традиционно изучаемому в высших технических учебных заведениях в 1-м семестре. Как и в частях 1-3, задачам и упражнениям предшествует теоретическая часть. В качестве образцов решаются не только стандартные, но и задачи повышенной сложности. Начало решения задачи отмечено знаком r , а конец решения – знаком p .

1.ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Производная функции

Производная функции, ее геометрический и физический смысл. Основные правила дифференцирования. Производная сложной функции. Таблица производных. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование параметрически заданных функций. Производная функции, заданной неявно.

Геометрический и физический смысл производной

Предел отношения

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

при $x \to x_0$ называется *производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначается одним из символов

$$f'(x_0),\ \frac{df(x_0)}{dx},\ f'\big|_{x=x_0}.$$

Итак, по определению

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \qquad (1.1)$$

Полагая $x-x_0=\Delta x$, из формулы (1.1) получаем другое определение производной функции $f(x)$ в точке x_0:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (1.2)$$

т.е. производная функция f в точке x_0 есть предел отношения ее приращения $\Delta f(x_0)$ в этой точке к соответствующему приращению аргумента.

Если в каждой точке $x\in(a,b)$ существует

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\ \forall x\in(a,b),$$

то функция f называется *дифференцируемой на интервале* (a,b).

Процесс вычисления производной называется *дифференцированием*.

Правой и *левой производной функции f в точке* x_0 называется предел

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_+(x_0) \tag{1.3}$$

и

$$f'(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_-(x_0) \tag{1.4}$$

соответственно.

1.1. Исходя из определения производной, найти производные следующих функций в точке x_0:

а) $f(x)=\sqrt[3]{2+x}$, $x_0=0$; б) $f(x)=|\ln x|$, $x_0=1$;

в) $f(x)=\begin{cases} x+\arcsin\left(x^2\sin(6/x)\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

r а) Согласно формуле (1.2), имеем

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{2+\Delta x}-\sqrt[3]{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2+\Delta x-2}{\left(\sqrt[3]{(2+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{(2+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{2^2}\right)\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}.$$

б) При $x=1$

$$\Delta f(1)=|\ln(1+\Delta x)|-|\ln 1|=|\ln(1+\Delta x)|,$$

т.е.

$$\Delta f(1)=|\ln(1+\Delta x)|=\begin{cases}\ln(1+\Delta x), & \Delta x\geq 0,\\ -\ln(1+\Delta x), & \Delta x<0.\end{cases}$$

Поэтому

$$\frac{\Delta f(1)}{\Delta x}=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}, & \Delta x>0,\\ -\dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}, & \Delta x<0,\end{cases}$$

откуда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(1)}{\Delta x}=+1=f'_+(1) \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(1)}{\Delta x}=-1=f'_-(1).$$

Поскольку односторонние пределы различны, то не существует производной $f'(1)$. Значит, функция $f(x)=|\ln x|$ в точке $x=1$ не дифференцируема.

в) Имеем, согласно формуле (1.1),

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\arcsin\left(x^2\sin 6/x\right)}{x-0}.$$

Но $x^2\sin(6/x)$ есть б.м.ф. в точке $x=0$ как произведение б.м.ф. x^2 на ограниченную функцию $\sin(6/x)$. Поэтому $\arcsin\left(x^2\sin(6/x)\right)\sim x^2\sin(6/x)$, $x\to 0$.

Тогда

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\left(1+x\sin 6/x\right)=1,$$

ибо $x\sin 6/x$ – б.м.ф. в точке $x=0$. р

1.2. Исходя из определения, найти $f'(x_0)$:

а) $f(x)=1/x^2$, $x_0=1$; **Отв.** –2.

б) $f(x)=\sqrt{x+2}$, $x_0=0$; **Отв.** $1/2\sqrt{2}$.

в) $f(x)=3|x+1|$, $x_0=2$. **Отв.** –3.

1.3. Исходя из определения, найти $f'(0)$:

а) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(x^3-x^{3/2}\sin 1/3x\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ **Отв.** 0.

б) $f(x)=\begin{cases}e^{x^2}-\cos x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ **Отв.** 0.

в) $f(x)=\begin{cases}2^{\operatorname{tg}x}-2^{\sin x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ **Отв.** $(1/2)\ln 2$

г) $f(x)=3^x\sin x$. **Отв.** 0.

Имеет место следующее утверждение (*основные правила дифференцирования*): *если функции* $u=u(x)$, $v=v(x)$ *дифференцируемы в точке* x, *то и функции* $u+v$, $u\cdot v$, u/v $(v(x)\neq 0)$ *также дифференцируемы в этой точке, причем:*

$$\text{а) } (u+v)'=u'+v';\ \text{ б) } (u\cdot v)'=u'v+v'u;\ \text{ в) } \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}. \tag{1.5}$$

Следующие теоремы дают способ вычисления производной сложной и обратной функций.

Теорема 1.1 (производная сложной функции). *Если функция* $y=f(x)$ *имеет производную в точке* x_0, *а функция* $z=g(y)$ *– в точке* $y_0=f(x_0)$, *то сложная функция* (композиция f и g) $z\equiv j(y)=g(f(x))$ *также имеет производную в точке* x_0, *причем*

$$j'(x_0)=g'(y_0)\cdot f'(x_0), \tag{1.6}$$

или в других обозначениях

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}. \tag{1.7}$$

Правило вычисления производной сложной функции распространяется на композицию любого конечного числа функций. Так в случае сложной функции вида $z(y(x(t)))$, при условии дифференцируемости функции $x(t)$, $y(x)$, $z(y)$ соответственно в точках t_0, $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(x_0)$, в точке t_0 имеет место равенство

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}. \qquad (1.8)$$

Теорема 1.2 (производная обратной функции). *Пусть функция* $y=f(x)$ *непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки* x_0*, и пусть в этой точке существует производная* $\frac{df(x_0)}{dx}\neq 0$*. Тогда обратная функция* $f^{-1}(y)$ *в точке* $y_0=f(x_0)$ *имеет производную, которая находится по формуле*

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy}=\frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}. \qquad (1.9)$$

Приведем теперь *таблицу производных основных элементарных функций*. В ней справа $u=u(x)$.

1. $c'=0$, $c=\text{const}$; $\qquad (c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$.
2. $(x^a)'=a\cdot x^{a-1}$; $\qquad (u^a)'=a\cdot u^{a-1}\cdot u'$.
3. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$, $0<a\neq 1$; $\qquad (a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$.
4. $(e^x)'=e^x$; $\qquad (e^u)'=e^u\cdot u'$.
5. $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\cdot\log_a e$, $x>0$, $0<a\neq 1$; $\qquad (\log_a u)'=\frac{1}{x}\cdot\log_a e\cdot u'$.
6. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $x>0$; $\qquad (\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$.
7. $(\log_a|x|)'=\frac{\log_a e}{x}$, $x\neq 0$, $0<a\neq 1$; $\qquad (\log_a|u|)'=\frac{\log_a e}{u}\cdot u'$.
8. $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$; $\qquad (\ln|u|)'=\frac{1}{u}\cdot u'$.
9. $(\sin x)'=\cos x$; $\qquad (\sin u)'=\cos u\cdot u'$.
10. $(\cos x)'=-\sin x$; $\qquad (\cos u)'=-\sin u\cdot u'$.
11. $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$, $x\neq\frac{(2n+1)p}{2}$; $\qquad (\operatorname{tg} u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$.
12. $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$, $x\neq np$; $\qquad (\operatorname{ctg} u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$.
13. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$; $\qquad (\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$.
14. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$; $\qquad (\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$.
15. $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$; $\qquad (\operatorname{arctg} u)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$.
16. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$; $\qquad (\operatorname{arcctg} u)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

17. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$; $\qquad (\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$.

18. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$; $\qquad (\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$.

19. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; $\qquad (\operatorname{th} u)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$.

20. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$, $x \neq 0$; $\qquad (\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.

1.4. Вычислить производную функции

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2} \cdot \operatorname{arcctg} x + 2\log_2^3 x - \frac{e^{\arcsin x}}{x^4}.$$

r Используя основные правила дифференцирования (1.5) и формулу (1.6) производной сложной функции (1.6), последовательно получаем:

$$f'(x) = \left(\sqrt[5]{x^2}\right)' \operatorname{arcctg} x + \sqrt[5]{x^2} \cdot (\operatorname{arcctg} x)' + 2 \cdot \left(\log_2^3 x\right)' -$$

$$- \frac{\left(e^{\arcsin x}\right)' x^4 - \left(x^4\right)' e^{\arcsin x}}{x^8} = \frac{2}{5} x^{-3/5} \operatorname{arcctg} x - \frac{\sqrt[5]{x^2}}{1+x^2} + 2 \cdot 3\log_2^2 x \cdot (\log_2 x)' -$$

$$- \frac{e^{\arcsin x} (\arcsin x)' x^4 - 4x^3 e^{\arcsin x}}{x^8} = \frac{2 \operatorname{arcctg} x}{5\sqrt[5]{x^3}} - \frac{\sqrt[5]{x^2}}{1+x^2} + \frac{6\log_2^2 x \log_2 e}{x} -$$

$$- \frac{\dfrac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} x^4 - 4x^3 e^{\arcsin x}}{x^8}. \text{ p}$$

1.5. Найти производные функций:

а) $y = \log_3 \sin \operatorname{arcctg} \operatorname{ch} 3x$; б) $y = \dfrac{3 - x^3}{\sqrt[5]{x^3} \cos^8 x}$, $x \neq \frac{p}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

r а) Применяем правило дифференцирования сложной функции четыре раза:

$$y' = \frac{\log_3 e}{\sin \operatorname{arcctg} \operatorname{ch} 3x} (\sin \operatorname{arcctg} \operatorname{ch} 3x)' = \frac{\log_3 e \cdot \cos \operatorname{arcctg} \operatorname{ch} 3x}{\sin \operatorname{arcctg} \operatorname{ch} 3x} (\operatorname{arcctg} \operatorname{ch} 3x)' =$$

$$= -\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} \operatorname{ch} 3x) \cdot \log_3 e \frac{(\operatorname{ch} 3x)'}{1 + \operatorname{ch}^2 3x} = -\frac{\operatorname{ch} 3x}{\ln 3} \cdot \frac{3 \operatorname{sh} 3x}{1 + \operatorname{ch}^2 3x} = -\frac{3 \operatorname{sh} 6x}{2\ln 3 \cdot \left(1 + \operatorname{ch}^2 3x\right)}.$$

б) Здесь удобно рассмотреть функцию $z = \ln|y|$. По формуле (1.7) дифференцирования сложной функции имеем:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = y \frac{dz}{dx}. \tag{1.10}$$

Записав функцию z в виде

$$z = \ln|y| = \ln\left|3 - x^3\right| - \frac{3}{5}\ln|x| + 8\ln|\cos x|,$$

продифференцируем ее:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{-3x^2}{3-x^3}-\frac{3}{5x}-8\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Подставив это выражение в формулу (1.10), получим

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3-x^3}{\sqrt[5]{x^3}\cos^8 x}\left(\frac{3x^2}{3-x^3}+\frac{3}{5x}+8\operatorname{tg}x\right).\ \text{р}$$

Найти производные функций (1.6 – 1.36):

1.6. $y=1\Big/\left(1+x^2\right)\cdot\sqrt{1+x^2}$ **Отв.** $-\dfrac{3x}{\left(1+x^2\right)^{5/2}}$.

1.7. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$. **Отв.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

1.8. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$. **Отв.** $-\dfrac{1}{\cos x}$.

1.9. $y=\dfrac{x^4}{4}\left(\ln^2 x-\dfrac{1}{2}\ln x+\dfrac{1}{8}\right)$. **Отв.** $x^3\ln^2 x$.

1.10. $y=\ln\dfrac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}$. **Отв.** $\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}$.

1.11. $y=\operatorname{ctg}p\ x+\dfrac{\cos p\ x}{2\sin^2 p\ x}$. **Отв.** $\dfrac{-3p}{2\sin^4 p\ x}$.

1.12. $y=(x+2a)\sqrt{x^2-a^2}+a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$. **Отв.** $2x\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}$.

1.13. $y=\dfrac{\sin(2\ln x)-\cos(2\ln x)}{x^2}$. **Отв.** $\dfrac{4\cos(2\ln x)}{x^3}$.

1.14. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}x+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x}\right)$. **Отв.** $\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$

1.15. $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}-\sqrt{x^2+1}$. **Отв.** $-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

1.16. $y=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^3 x+\dfrac{3}{5}\operatorname{tg}^5 x+\dfrac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x$. **Отв.** $\dfrac{1}{\cos^8 x}$.

1.17. $y=\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}-\dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{p}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$. **Отв.** $\dfrac{1}{\cos^3 x}$.

1.18. $y=\ln\dfrac{e^x+2+\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}{e^x+2-\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$. **Отв.** $\dfrac{2e^x}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$.

1.19. $y=\ln\dfrac{b+a\cos nx+\sqrt{b^2-a^2}\sin nx}{a+b\cos nx}$. **Отв.** $\dfrac{n\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos nx}$.

1.20. $y=\dfrac{x^2\ln x}{a+bx^2}-\dfrac{1}{b}\ln\left(a+bx^2\right)$. **Отв.** $\dfrac{2ax\ln x}{\left(a+bx^2\right)^2}$.

1.21. $y=\sqrt{x^2-a^2}+a\arcsin\dfrac{x}{a}$. **Отв.** $\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$.

1.22. $y=\arccos\dfrac{2-x}{x\sqrt{2}}$. **Отв.** $\dfrac{2}{|x|\sqrt{x^2+4x-4}}$.

1.23. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$, $x\neq 1$. **Отв.** $-\dfrac{1}{1+x^2}$.

1.24. $y=\arccos\left(3x-4x^3\right)$. **Отв.** $\dfrac{3\operatorname{sign}\left(4x^2-1\right)}{\sqrt{1-x^2}}$, $x^2\neq\dfrac{1}{4}$.

1.25. $y=\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}\operatorname{tg}x\right)$. **Отв.** $\dfrac{1}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}$.

1.26. $y=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. **Отв.** $\dfrac{1}{1+x^4}$.

1.27. $y=\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\cdot tg\dfrac{x}{2}\right)$, $a>b\geq 0$. **Отв.** $\dfrac{1}{a+b\cos x}$.

1.28. $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x+\ln\sqrt{1-x^2}$. **Отв.** $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$.

1.29. $y=\arcsin(\sin x-\cos x)+\ln\left(\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x}\right)$. **Отв.** $\sqrt{2\operatorname{ctg}x}$.

1.30. $y=2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2\operatorname{tg}x}}{1-\operatorname{tg}x}+\ln\dfrac{1+\sqrt{2\operatorname{tg}x}+\operatorname{tg}x}{1-\sqrt{2\operatorname{tg}x}+\operatorname{tg}x}$. Отв. $\sqrt{8\operatorname{ctg}x}$.

1.31. $y=x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$. **Отв.** $\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

1.32. $y=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\ln\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}}$. **Отв.** $-\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$.

1.33. $y=\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$. **Отв.** $\dfrac{4}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

1.34. $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. **Отв.** $-\dfrac{2x}{x^4+1}$.

1.35. $y=\ln\dfrac{1-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^4}}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{1+2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{3}}$. **Отв.** $-\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{1-x^2}$.

1.36. $y=\dfrac{3-\sin x}{2}\sqrt{\cos^2 x-2\sin x}+2\arcsin\dfrac{1+\sin x}{\sqrt{2}}$. **Отв.** $\dfrac{\sin^2 x\cos x}{\sqrt{\cos^2 x-2\sin x}}$.

В указанных точках вычислить производные для следующих функций:

1.37. а) $y=3\cos 2x-\sqrt{1-\sin 2x}(\sin x+\cos x)$, $x_0=p/6$. **Отв.** $-2\sqrt{3}$.

б) $y=\log_{1/2}(x-1/2)^2+\log_2\sqrt{4x^2-4x+1}$, $x_0=0$. **Отв.** $2/\ln 2$.

в) $y=\sqrt{\ln x}\left(\ln x-\log_{ex}x\right)\sqrt{\ln x+\log_x e+2}$, $x_0=e$. **Отв.** $2/e$.

г) $y=\ln\left(1+\sin^2 x\right)-2\sin x\cdot\operatorname{arctg}\sin x$, $x_0=p/2$. **Отв.** 0.

д) $y = \ln \dfrac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} + 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt{3}}{1 - 2x^2}$, $x_0 = 1$. **Отв.** 6.

е) $y = \sqrt[3]{\mathrm{arctg}\sqrt[5]{\cos \ln^3 x}}$, $x_0 = 1$. **Отв.** 0.

1.38.* Дифференцируя по x формулу

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin(n-1)x + \sin nx = \frac{\sin x + \sin nx - \sin(n+1)x}{2(1-\cos x)},$$

найти формулу для $\cos x + 2\cos 2x + \ldots + (n-1)\cos(n-1)x + n\cos nx$. **Отв.** $\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x \cdot \sin\frac{n}{2}x}{\sin(x/2)}$.

Указание. Воспользоваться формулами преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

1.39.* Из равенства $\dfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}$, найти формулу для $\sin x + 2\sin 2x + \ldots + n\sin nx$. **Отв.** $\dfrac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{2(1-\cos x)}$.

1.40.* Из равенства $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x = \dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$, получить формулу для суммы $\sin x + \sin 3x + \ldots + (2n-1)\sin(2n-1)x$. **Отв.** $\dfrac{(2n-1)\sin(2n+1)x - (2n+1)\sin(2n-1)x}{4\sin^2 x}$.

1.41.* Из равенства $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$, найти формулу для суммы $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$. **Отв.** $\dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$.

1.42.* Пусть $y = f(x)$, $g(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – всюду дифференцируемые функции. Найти $y'(x)$, если

а) $y = f(\arcsin f(x))$, $|f(x)| < 1$; **Отв.** $\dfrac{f'(\arcsin f(x))\, f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}$.

б) $y = \sqrt[n]{f^2(x) + g^2(x)}$, $f^2(x) + g^2(x) > 0$; **Отв.** $\dfrac{2}{n} \cdot \dfrac{f(x)f'(x) + g(x)g'(x)}{\sqrt[n]{\left(f^2(x) + g^2(x)\right)^{n-1}}}$.

в) $y = \ln\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$, $f(x)\cdot g(x) \neq 0$; **Отв.** $\dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{f(x)g(x)}$.

г) $y = f(\sin^2 x) + g(\cos^2 x)$; **Отв.** $\sin 2x\left(f'(\sin^2 x) - g'(\cos^2 x)\right)$.

1.43.* Пусть функции $f_{ij}(x)$, $i, j = \overline{1, n}$, дифференцируемы в некоторой точке. Доказать, что в этой точке выполняется равенство

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ f_{i1} & f_{i2} & \cdots & f_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}' = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ f'_{i1} & f'_{i2} & \cdots & f'_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ f'_{n1} & f'_{n2} & \cdots & f'_{nn} \end{vmatrix}.$$

С помощью этой формулы найти $\Delta'(x)$, если

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 2 \\ x^3 & 3x^2 & 6x \end{vmatrix}.$$

Отв. $6x^2$.

1.44.* При каких a функция $y = \begin{cases} |x|^a \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

в точке $x = 0$: 1) непрерывна; 2) имеет производную; 3) имеет непрерывную производную? **Отв. 1)** $a > 0$; **2)** $a > 1$; **3)** $a > 2$.

1.45.* Определить значения a и b, при которых следующие функции всюду дифференцируемы:

1) $y = \begin{cases} a + b\,x^2, & |x| < 1, \\ 1/|x|, & |x| \geq 1, \end{cases}$ **Отв.** $a = 3/2$, $b = -1/2$.

2) $y = \begin{cases} a\,x^3 + b\,x, & |x| \leq 2, \\ \dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{1}{x}, & |x| > 2. \end{cases}$ **Отв.** $a = -\left(\pi + 2\sqrt{3}\right)/96\pi$, $b = \left(3\pi + 2\sqrt{3}\right)/24\pi$.

1.46.* Исследовать на дифференцируемость следующие функции:

а) $y = \left|x^3(x+1)^2(x+2)\right|$; **Отв.** Дифференцируема всюду, кроме точки $x = -2$.

б) $y = x|x|$; **Отв.** Дифференцируема всюду.

в) $y = \begin{cases} x^3, & x \leq 0, \\ e^{-1/x}, & x > 0; \end{cases}$ **Отв.** Дифференцируема всюду.

г) $y = \begin{cases} x^2|\cos(\pi/x)|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ **Отв.** Дифференцируема всюду.

1.47. Доказать, что функция $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ имеет бесконечную положительную производную в точке $x = 0$.

r Согласно определению, имеем

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty. \text{ p}$$

1.48. Найти $f'_+(0)$ и $f'_-(0)$, если

$$1)\ f(x)=|\sin 2x|;\ \ 2)\ f(x)=\begin{cases} e^{1/x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

r Согласно определению односторонних производных, имеем

$$1)\ f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{|\sin 2\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\sin 2\Delta x}{\Delta x}=2;$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{|\sin 2\Delta x|}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\sin 2\Delta x}{\Delta x}=-2.$$

$$2)\ f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{e^{1/\Delta x}}{\Delta x}=+\infty;\quad f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{e^{1/\Delta x}}{\Delta x}=0.$$ p

1.49. Найти односторонние производные в заданных точках для функций:
1) $f(x)=\left|x^2-5x+6\right|$, $x=2$, $x=3$; 2) $f(x)=\sqrt[3]{\sin px}$, $\mathbf{x}=\mathbf{k}\in\mathbf{Z}$;

3) $f(x)=\arccos\dfrac{1}{x}$, $x=\pm1$; 4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+e^{1/x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^4}}}, & x<0,\\ \ & x\geq 0.\end{cases}$

Отв. 1) $f'_-(2)=f'_-(3)=-1$, $f'_+(2)=f'_+(3)=1$. **2)** $f'(2k)=+\infty$, $f'(2k-1)=-\infty$. **3)** $f'_-(1)=f'_+(-1)=+\infty$, $f'_+(-1)$ и $f'_-(1)$ не существуют. **4)** $f'(0)=0$.

1.50. Найти производную функции, обратной к функции $y=x+x^3$, $x\in\mathbf{R}$.

r Функция y всюду непрерывна и строго монотонна, ее производная $y'_x=1+3x^2$ не обращается в нуль ни в одной точке. Поэтому, согласно формуле (1.9), имеем $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}=\dfrac{1}{1+3x^2}$. p

Весьма эффективным методом вычисления производных функций, представляющих собой *степенно-показательные выражения* типа $u(x)^{v(x)}$, где $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, а также выражения, являющиеся произведением нескольких дифференцируемых функций, является *метод логарифмического дифференцирования*. Поясним его примерами.

1.51. Найти производную функции:

$$1)\ y=\sqrt[3]{\frac{x^3\left(x^2+1\right)}{\sqrt[5]{5-x}}};\ \ 2)\ y=\left(\sqrt{\operatorname{tg}x}\right)^{x^2+1}.$$

r 1) Применим метод логарифмического дифференцирования. Для этого вместо y рассмотрим функцию

$$z=\ln|y|=\ln\sqrt[3]{\frac{\left|x^3\right|\left(x^2+1\right)}{\sqrt[5]{|5-x|}}}=\ln|x|+\frac{1}{3}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{15}\ln|5-x|.$$

Так как $(\ln|u|)'=u'/u$, то

$$z' = \frac{1}{x} + \frac{2x}{3(x^2+1)} + \frac{1}{15(5-x)} = \frac{-24x^3+125x^2-14x+75}{15x(x^2+1)(5-x)}.$$

Но $z' = y'/y$, поэтому $y' = yz' = \sqrt[3]{\dfrac{x^3\left(x^2+1\right)}{\sqrt[5]{5-x}}} \cdot \dfrac{75-14x+125x^2-24x^3}{15x\left(x^2+1\right)(5-x)}$.

2) Поступаем аналогично

$$\ln|y| = \left(x^2+1\right)\ln\sqrt{|\operatorname{tg} x|} = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\ln|\operatorname{tg} x| \Rightarrow \frac{1}{y}y' = x\ln|\operatorname{tg} x| + \frac{x^2+1}{2\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = x\ln|\operatorname{tg} x| + \frac{x^2}{\sin 2x}$$
.

Отсюда $y' = \sqrt{\operatorname{tg} x}^{\,x^2+1}\left(x\ln|\operatorname{tg} x|\right) + \dfrac{x^2}{\sin 2x}$. р

1.52. Применяя метод логарифмического дифференцирования, вычислить производные функции:

1) $y = \sqrt[3]{x^2}\,\dfrac{1-x}{1+x^2}\sin^3 x\cdot\cos^2 x$.

Отв. $y' = \sqrt[3]{x^2}\,\dfrac{1-x}{1+x^2}\sin^3 x\cdot\cos^2 x\cdot\left(\dfrac{2}{3x} - \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{2x}{1+x^2} + 3\operatorname{ctg} x - 2\operatorname{tg} x\right)$.

2) $y = \cos x^{\sin x}$. **Отв.** $y' = \cos x^{\sin x}\cdot\left(\cos x\ln\cos x - \operatorname{tg} x\sin x\right)$.

3) $y = \left(\arcsin\sin^2 x\right)^{\operatorname{arctg} x}$

Отв. $y' = \left(\arcsin\sin^2 x\right)^{\operatorname{arctg} x}\cdot\left(\dfrac{\ln\arcsin\sin^2 x}{1+x^2} + \dfrac{\sin 2x\operatorname{arctg} x}{\arcsin^2 x\cdot\sqrt{1-\sin^4 x}}\right)$.

4) $y = x^{x^x}$. **Отв.** $y' = x^{x^x}\cdot x^{x-1}\left(x\ln^2 x + x\ln x + 1\right)$.

Пусть функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ определены в некоторой окрестности точки t_0 и параметрически задают в окрестности точки $x_0 = x(t_0)$ функцию $y = f(x)$ в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда, если $x(t)$ и $y(t)$ имеют в точке t_0 производные, причем $x'(t_0) \neq 0$, то функция $y = f(x)$ в точке x_0 также имеет производную, причем

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{dy(t_0)/dt}{dx(t_0)/dt} = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}. \qquad (1.11)$$

1.53. Найти y'_x, если функция $y = f(x)$ задана параметрически формулами $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$, $0 < t < p/2$.

r По формуле (1.11) имеем $y' = \frac{\left(\cos^2 t\right)'}{\left(\sin^2 t\right)'} = \frac{-\sin 2t}{\sin 2t} = -1$.

Заметим, что $x'(t) = \sin 2t \neq 0$ для $0 < t < p/2$.

Итак, $y'_x = -1$, $0 < x < 1$. p

1.54. Найти y'_x для функций $y = y(x)$ заданных параметрически.

1) $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$, $t \in (0, p/2)$; **Отв.** $-\frac{b}{a}\operatorname{tg} t$.

2) $x = a\operatorname{ch} t$, $y = b\sin t$, $t \in (-\infty, 0)$; **Отв.** $-\frac{b}{a}\operatorname{cth} t$.

3) $x = (t-1)^2(t-2)$, $y = (t-1)^2(t-3)$, $t \in (5/3, +\infty)$; **Отв.** $\frac{3t-7}{3t-5}$.

4) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $\mathbf{t} \in \mathbf{R}$; **Отв.** $ctg\,\frac{t}{2}, t \neq 2kpa, k \in$ **Z**.

5) $x = \ln\sin\frac{t}{2}$, $y = a\ln\sin t$, $t \in (0, p)$. **Отв.** $\frac{2\cos t}{1+\cos t}$.

1.55.* Для функции $y = y(x)$, заданной параметрически в виде $x = 2t + |t|$, $y = 5t^2 + 4t|t|$, $t \in$ **R**, вычислить производную в точке $x = 0$. Можно ли использовать при этом формулу (1.11)?

Отв. 0; нельзя.

Часто во многих задачах дифференцируемая функция $y = y(x)$ задана *неявно* уравнением $F(x, y) = 0$. Тогда ее производную y'_x можно найти из соотношения

$$\frac{d}{dx}F(x, y) = 0.$$

1.56. Найти производную неявной функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением в точке $x_0 = 0$.

r Имеем: $\frac{d}{dx}\left(e^y + xy - e\right) = 0$. Дифференцируя, получаем: $e^y y' + y + xy' = 0 \Rightarrow y' = -y\Big/\left(x + e^y\right)$.

При $x_0 = 0$ находим $y_0 = y(0)$: $e^{y_0} = e \Rightarrow y_0 = 1$. Тогда $y'(0) = -1/e$. p

1.57. Найти y' для функций, заданных неявно следующими уравнениями:

1) $y - x = e\sin y$, $|e| < 1$; **Отв.** $1/(1 - e\cos y)$.

2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y > 0$; **Отв.** $\frac{b^2 x}{a^2 y}$, $|x| > a$.

3) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3},\ y>0$; **Отв.** $-\sqrt[3]{y/x}$, $|x|<a$.

4) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ **Отв.** $1-2/\sqrt{x}$, $0<x<4$.

1.58. Для функции $y=y(x)$, заданных неявно вычислить $y'(x)$:

1) $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$, $y<2$, $x_0=11/12$; **Отв.** $-24/41$.

2) $xy+\ln y=1$, $y<e^2$, $x_0=0$; **Отв.** $-e^2$.

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $M_0=(x_0, f(x_0))$, то угловой коэффициент касательной TT' (рис.1.1) к графику функции в точке M_0 равен $f'(x)$. В этом и состоит *геометрический смысл производной функции* $y=f(x)$ *в заданной точке* M_0.

Следовательно, *уравнение касательной* в точке $M_0=(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0), \quad (1.12)$$

а *уравнение нормали* NN' в точке M_0 - вид

$$y-f(x_0)=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0),\ f'(x_0)\neq 0. \quad (1.13)$$

Если производная $f'(x_0)=\pm\infty$, то касательная к графику функции в точке M_0 имеет уравнение $x=x_0$. В этом случае график функции $y=f(x)$ в окрестности точки M_0 имеет вид, схематически изображенный на рис 1.2 а),б).

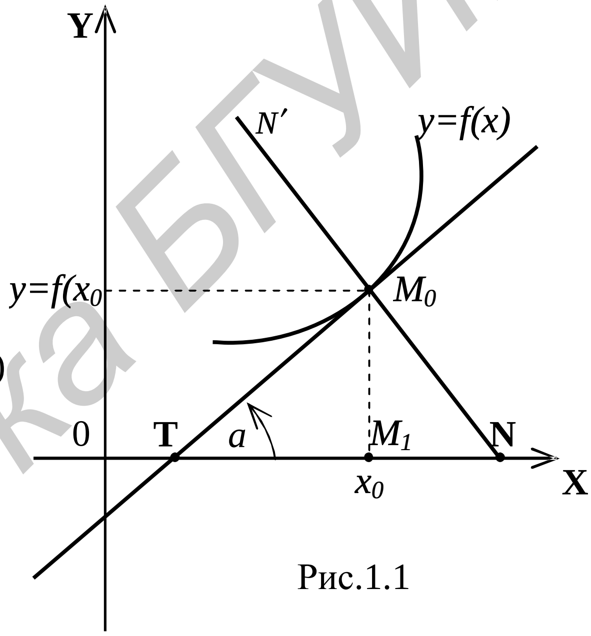


Рис.1.1

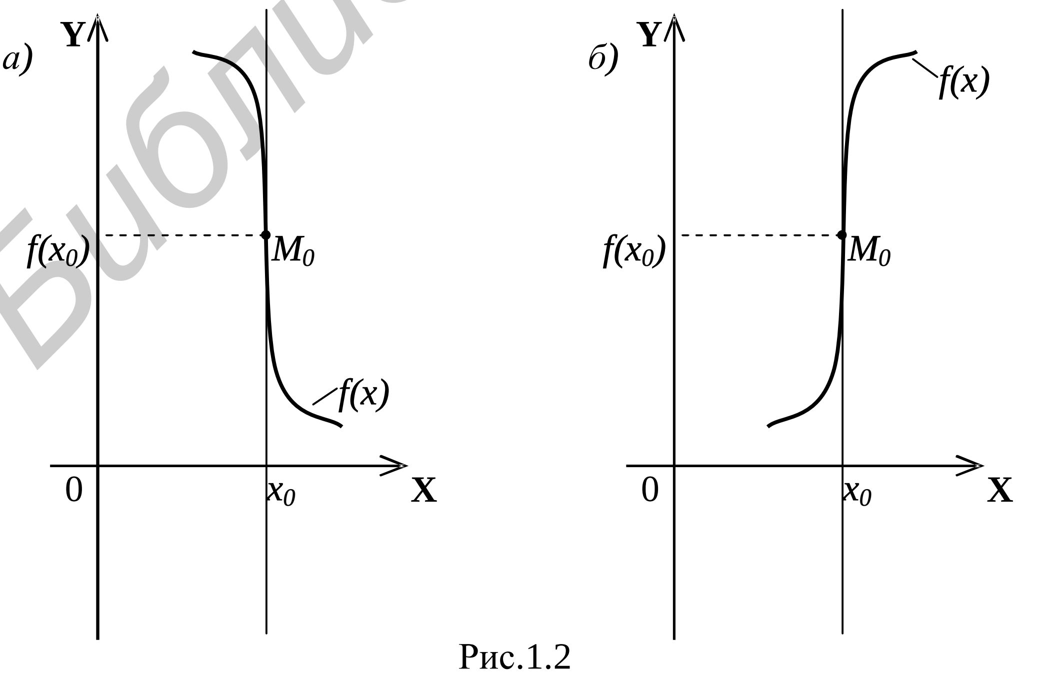


Рис.1.2

Если $f'(x_0) = 0$, то нормаль имеет уравнение $x = x_0$.

В прямоугольном ΔM_0TH катет TM_0 называется *отрезком касательной*, катет M_0N – *отрезком нормали*. Если M_1 – проекция точки M_0 на ось X, то отрезок TM_1 называется *подкасательной*, а отрезок M_1N - *поднормалью*. Длины этих четырех отрезков выражаются следующим образом:

$$|TM_0| = \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|\sqrt{1+f'^2(x_0)}, \quad |NM_0| = |f(x_0)|\sqrt{1+f'^2(x_0)}; \qquad (1.14)$$

$$|TM_1| = \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|, \quad |NM_1| = |f(x_0)f'(x_0)|. \qquad (1.15)$$

Углом a между двумя кривыми $y = f_1(x)$ *и* $y = f_2(x)$ в точке M_0 с абсциссой x_0 (точка пересечения графиков этих функций) называется угол между касательными к этим кривым, проведенными к ним в этой точке (рис. 1.3).

Так как угловые коэффициенты этих касательных есть $k_1 = tga_1 = f_1'(x_0)$, $k_2 = tga_2 = f_2'(x_0)$, то

$$tga = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right| = \left|\frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)f_1'(x_0)}\right|. \qquad (1.16)$$

Если $1 + f_1'f_2' = 0$, то $a = \frac{p}{2}$.

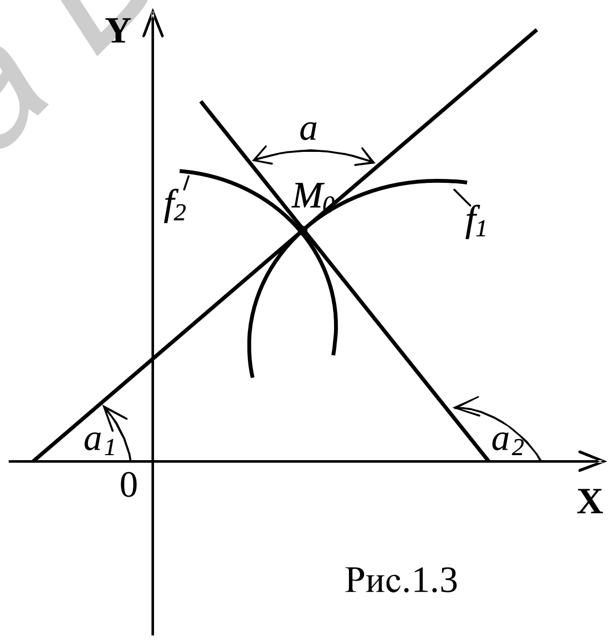


Рис.1.3

Если функция $f(x)$ имеет в точке x односторонние производные $f'_{\pm}(x_0)$, то уравнение правой касательной в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$y - f(x_0) = f'_+(x_0)(x - x_0), \qquad (1.17)$$

а левой – вид

$$y - f(x_0) = f'_-(x_0)(x - x_0). \qquad (1.18)$$

1.59. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^4 + 3x^2 - 16$ в точках её пересечения с параболой $y = 3x^2$.

r Для отыскания точек пересечения кривых решим систему

$$\left.\begin{array}{l} y = x^4 + 3x^2 - 16 \\ y = 3x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2, y_1 = 12, \\ x_2 = 2, y_2 = 12. \end{cases}.$$

Далее находим производные в точках $x = \pm 2: y' = 4x^3 + 6x => y'(-2) = -44, y'(2) = 44$. Поэтому уравнения касательных имеют вид $y - 12 = -44(x+2),\ y - 12 = 44(x-2)$, а уравнения нормалей – вид $y - 12 = \frac{1}{44}(x+2), y - 12 = \frac{-1}{44}(x-2)$. р

1.60. В точках пересечения эллипсов

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \qquad (1.19)$$

найти угол между ними.

r Так как эллипсы симметричны относительно осей координат, то достаточно рассмотреть первый квадрат координатной плоскости. Решив систему (1.19), найдем точку $(\frac{12}{5}, \frac{12}{15})$ пересечения эллипсов. Дифференцируя первое уравнение эллипса из (1.19), получаем $\frac{2x}{16} + \frac{2yy'}{9} = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{9}{16}\frac{x}{y} \Rightarrow y'\left(\frac{12}{5}\right) = -\frac{9}{16}$. Поступая аналогично со вторым уравнением из (1.19), получаем $y'\left(\frac{12}{5}\right) = -\frac{16}{9}$.

По формуле (1.16) находим искомый угол $tg a = \left|\frac{(-9/16) - (-16/9)}{1 + (-9/16)(-16/9)}\right| = 175/188$.

Таким образом, эллипсы (1.19) пересекаются в четырех точках под углом $a = \mathrm{arctg}\frac{175}{188} \approx 31°$. р

1.61.* Составить уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $M_0 = (x_0, y_0)$.

r Дифференцируя обе части уравнения эллипса, находим:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0.$$

Отсюда в точке M_0 получим

$$\frac{x_0}{a^2} + \frac{y_0 y'(x_0)}{b^2} = 0 \Rightarrow y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}.$$

Составляем искомое уравнение касательной:

$$y-y_0=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}\Rightarrow\frac{yy_0-y_0^2}{b^2}+\frac{xx_0-x_0^2}{a^2}=0\Rightarrow\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1\ ,$$

поскольку точка принадлежит эллипсу.

Итак, уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ есть $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ (Поступив аналогично с гиперболой $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, получим, что в точке M_0 уравнение касательной есть $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$). р

1.62. Вычислить длину отрезка нормали к линии $y=a\,\mathrm{ch}(x/a)$ в каждой её точке. **Отв.** $a\,\mathrm{ch}(x/a)$.

1.63. Найти углы j, под которыми график функции $y=f(x)$ пересекает ось X:

1)$y=\sin 3x$; 2)$y=\ln|x|$; 3)$y=(x-1)^3(x-2)^2(x-3)$;

4)$x=(t-1)^2(t-2),\ \ y=(t-1)^2(t-3)$, $t\in(2;+\infty)$.

Отв. 1) В точках $x=(2k+1)\frac{p}{3}$ угол $j=\mathrm{arctg}\,3$, в точках $x=(2k+1)\frac{p}{3}$ угол $j=p-\mathrm{arctg}\,3$; **2)** В точке $x=1$ угол $j=\frac{p}{4}$, в точке $x=-1$ - $j=\frac{3p}{4}$; **3)** в точках $x=1$ и $x=2$ угол $j=0$, в точке $x=3$ - $j=\mathrm{arctg}\,8$; **4)** $\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$.

1.64. Определить, в каких точках и под каким углом пересекаются графики функций:

1) $f_1(x)=x-x^3$, $f_2(x)=5x$; 2) $f_1(x)=1/x$, $f_2(x)=\sqrt{x}$;

3) $f_1(x)=\ln x$, $f_2(x)=x^2/2e$; 4) $f_1(x)=x^3$, $f_2(x)=1/x^2$;

Отв. 1) $(0,0),j=\frac{p}{2};(1,1),j=\mathrm{arctg}\frac{3}{4}$;**2)** $(1,\pm2),j=\mathrm{arctg}\,3$;**3)** $(1,2),j=\mathrm{arctg}\frac{6}{5}$; **4)** $(1/8,-1/16),j=\frac{p}{2}$.

1.65. Определить угол между односторонними касательными в точке M_0 графика функции $y=f(x)$:

1) $y=\sqrt[3]{x^2}, M_0=(0,0)$; **Отв.** 0.

2) $y=\sqrt{1-e^{-3x^2}}, M_0=(0,0)$; **Отв.** $\frac{p}{3}$.

3) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), M_0=\left(1,\frac{p}{2\sqrt{3}}\right)$; **Отв.** $\frac{2p}{3}$.

4) $y=\frac{\sqrt{1+|x-2|}}{1+x}, M_0=\left(2,\frac{1}{3}\right)$; **Отв.** $p-arctg\frac{1}{18}$.

5) $x=t-\frac{t}{1+t^2}, y=\frac{2+t^2}{1+t^2}, M_0=(0,2)$; **Отв.** 0.

1.66.* Доказать, что семейство парабол $y^2=p^2-2px$ и $y^2=2qx+q^2, p\neq 0, q\neq 0$, образуют ортогональную сетку, т.е. графики этих парабол пересекаются под прямыми углами.

1.67.* То же для семейства гипербол $x^2-y^2=a^2, xy=b$.

1.68. Вычислить в точке $(1,2)$ параболы $y^2=4x$ длины отрезков: 1)касательной; 2)нормали; 3) подкасательной; 4) поднормали. **Отв. 1)** $2\sqrt{2}$; **2)** $2\sqrt{2}$; **3)** 2; **4)** 2**.**

1.69. Найти длины подкасательной и поднормали кривой $y=ax^n, \boldsymbol{n}\in\boldsymbol{N}, a\neq 0$, в каждой её точке. Отв. $|x|/n, na^2|x|^{2n-1}$.

1.70.* Доказать, что у кривой $x=2a(\ln\sin t-\sin^2 t), y=a\sin 2t, t\in(0,p), a>0$, сумма длин подкасательной и поднормали постоянна и равна $2a$.

Средней скоростью изменения функции $f(x)$ на $[a,b]$ называется отношение

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Мгновенной скоростью или скоростью изменения в точке x функции $f(x)$ называется

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

Итак, производная есть скорость изменения функции в точке. В этом и состоит *механический смысл производной*.

1.71. Тело массой 6*г* движется прямолинейно по закону $S=-1+\ln(1+t)+(t+1)^3$ (s - в *см*, t - в *сек*). Вычислить кинетическую энергию $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ через одну секунду после начала движения.

r Скорость движения $v(t) = S'(t) = \frac{1}{t+1} + 3(t+1)^2$. Поэтому $v(1) = \frac{25}{2}$, и тогда

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{6}{2}\left(\frac{25}{4}\right)^2 = 468\frac{3}{4}\ (\text{эрг}).\ \text{p}$$

1.72. Плот подтягивается к берегу при помощи каната, который наматывается на ворот со скоростью $3(м/мин)$. Определить скорость движения плота в тот момент, когда его расстояние от берега будет равно $25м$, если ворот находится на берегу выше поверхности воды на $4м$.

r Пусть S – длина каната между воротом и плотом; x - расстояние от плота до берега. По условию $S^2 = x^2 + 4^2$. Дифференцируя это соотношение по времени t, найдем зависимость между их скоростями: $2SS'_t = 2xx'_t \Rightarrow x'_t = \frac{S}{x}S'_t$.

По условию $S'_t = 3$, $x = 25$, $S = \sqrt{25^2 - 4^2} \approx 25{,}3$. Тогда $x'_t = \frac{\sqrt{625+16}}{25}3 \approx 3{,}03(м/мин)$. p

1.73. Выяснить в какой из точек x скорость изменения функции $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 5x - 7$ наименьшая.

r Скорость изменения функции в некоторой точке x есть

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 + 5 = 15\left[\left(x^2 - \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{12}\right].$$

Отсюда видно, что наименьшее значение $f'(x)$ достигается при $x = \pm\left(1/\sqrt{2}\right)$ и это значения равно $(15/12) = (5/4)$. p

1.74. Вращающееся колесо, задерживаемое тормозом за t *сек* поворачивается на угол $j = a + bt - ct^2$, где a, b, c – положительные постоянные. Определить угловую скорость и ускорение вращения. Когда колесо остановится?

Отв. $v = j' = b - 2ct$; $e = \frac{dv}{dt} - 2c$; колесо остановится в момент $t = b/2c$.

1.75. Показать, что если тело движется по закону $S = ae^t + be^{-t}$, то его ускорение равно пройденному пути.

1.76. Лестница длиной a, прислоненная к вертикальной стене, падает, скользя о стену одним концом, а другим – о пол. С какой скоростью опускается верхний конец лестницы в момент, когда нижний конец, отодвигающийся от стены с постоянной скоростью v, отстает от нее на расстоянии B? **Отв.** $bv\big/\sqrt{a^2 - b^2}$.

1.77.* При каком значении угла синус изменяется вдвое медленнее аргумента?

Отв. $x = \pm(p/3) + 2kp$, $k \in \mathbf{Z}$.

1.78. С какой скоростью изменяется поверхность и объем шара, если радиус его изменяется со скоростью v? **Отв.** $8prv$; $4pr^2v$.

1.79. Тяжелая балка длиной a *м* стоит вертикально около стены так, что нижний её конец прикреплен к небольшой вагонетке, а верхний удерживается канатом, намотанным на ворот. Желая опустить балку на землю, канат сматывают со скоростью v (*м/сек*). С каким ускорением откатывается вагонетка в момент, когда она удалиться от стены на расстояние b *м*? **Отв.** $-a^2v^2/b^3$.

1.80. По оси абсцисс движутся две точки по законам $x = 100 + 5t$ и $x = t^2/2$ соответственно. С какой скоростью они удаляются друг от друга в момент встречи (x измеряется в метрах, t - в секундах)? **Отв.** 15 (*м/сек*).

1.81. Материальная точка брошена под углом к горизонту начальной скоростью v_0. Закон её движения (без учета сопротивления воздуха) есть

$x = (v_0 \cos a)t$, $y = (v_0 \sin a)t - gt^2/2$, где t - время, g - ускорение силы тяжести. Определить вектор и величины скорости.

Отв. $\vec{v} = (v_0 \cos a, v_0 \sin a - gt)$, $|v_0| = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin a + g^2 t}$.

Дифференциал функции

Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Исчисление дифференциалов. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Инвариантность формы дифференциала

Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если её приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) = A \cdot \Delta x_0 + a(\Delta x) \cdot \Delta x, \tag{1.20}$$

где $A - const$, $a(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Произведение $A\Delta x$ называется *дифференциалом* функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$ или $dy(x_0)$. Таким образом,

$$df(x_0) = A \cdot \Delta x \tag{1.21}$$

Приращение $\Delta x = x - x_0$ независимой переменной называется её дифференциалом и обозначается $dx = \Delta x = x - x_0$. Тем самым дифференциал (1.21) принимает вид

$$df(x_0) = A \cdot dx \tag{1.22}$$

Для существования дифференциала $df(x_0)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ в точке x_0 имела производную, при этом

$$df(x_0) = f'(x_0)dx .$$

Следовательно, равенство (1) может быть, согласно (1.22), записано в виде

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)dx + a(\Delta x)\cdot \Delta x . \qquad (1.23)$$

Из (4) вытекает приближенная формула

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0), \qquad (1.24)$$

если Δx достаточно мало.

Если в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ к графику функции $f(x)$ провести касательную BD и придать точке x_0 приращение Δx, получив при этом точку $x_0 + \Delta x$, то, как следует из рис.1.4, в треугольнике M_0AB длина катета AB, очевидно, равна

$$|AB| = \Delta x \cdot tga = f'(x_0)\cdot \Delta x = df(x_0).$$

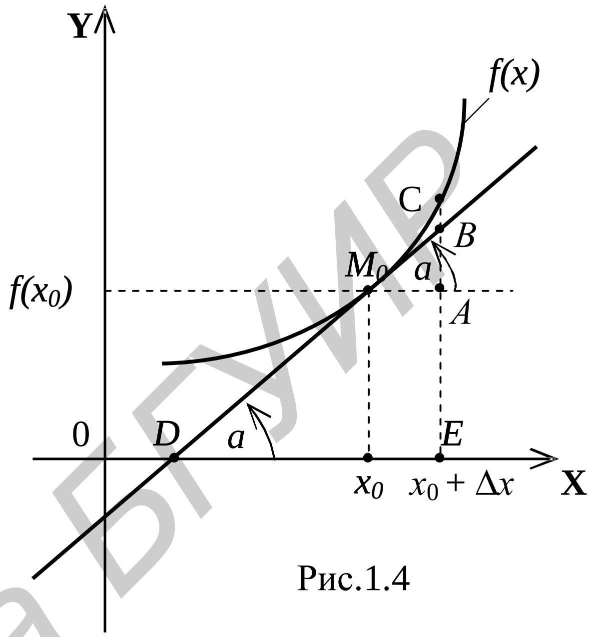


Рис.1.4

Но $|AB|$ есть приращение ординаты касательной, проведенной к графику $f(x)$ в её точке x_0, при смещении этой точки в точку $x_0 + \Delta x$. В этом и состоит *геометрический смысл дифференциала* $df(x_0)$ *функции* $f(x)$.

Из рис.1.4. также вытекает, что $|EC| = f(x_0 + \Delta x)$. Тогда в силу формулы (1.20), получаем, что $|BC| = a(\Delta x)\cdot \Delta x$.

Если $y = f(x)$– дифференцируемая в точке x функция, а $x = x(t)$– дифференцируемая в точке t функция, то дифференциал сложной функции $y = f(x) = f\left(\frac{x}{t}\right)$так не может быть найден по формуле $df(t_0) = f'(x_0)\cdot dx$, где, $x_0 = x(t_0)$, а $dx = x'(t_0)dt$. В этом и состоит *свойство инвариантности формы дифференциала*.

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$– дифференцируемые функции. Тогда справедливы следующие *формулы исчисления дифференциала*:

$$1^{\circ}.d(au + bv) = adu + bdv, a , b\ - const;$$

$$2^{\circ}.d(uv) = udv + vdu;$$

$$3.^{\circ}\, d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}, v \neq 0.$$

1.82. Исходя из определения, найти дифференциал функции $y - 5x^2 + x$ в точке $x_0 = 3$.

r Найдем приращение функции в точке $x_0 = 3$:

$$\Delta f(3) = f(3+\Delta x) - f(3) = 5(3+\Delta x)^2 + (3+\Delta x) - \left(5\cdot 3^2 + 3\right) = 45 + 30\cdot\Delta x +$$
$$+ 5\Delta x^2 + 3 + \Delta x - 45 - 3 = 31\cdot\Delta x + 5\cdot\Delta x^2$$

1.83. Найти приближенное значение функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 3.98$.

r В формуле (1.24) получим $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4, \Delta x = -0.02$, тогда $df(4) = \left(\sqrt{x}\right)'_{x=4}\cdot\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{4}}(-0.02)$, и, значит, $\sqrt{3.98} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(-0.02) \approx 1.995$. p

1.84. Найти дифференциал функции

$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

r Согласно формулам $1^{\mathbf{o}} - 3^{\mathbf{o}}$ исчисления дифференциалов и формуле (1.22), имеем

$$dy = d\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + d\left(\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \frac{\sqrt{1-x^2}\,d(\arcsin x) - \arcsin x d\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{1-x^2} +$$

$$+\left(\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' dx = \frac{\sqrt{1-x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}{1-x^2} - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot$$

$$\cdot\frac{2}{\left(1+x^2\right)} = \frac{\left(1 + \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx}{1-x^2} - \frac{dx}{1-x^2} = \frac{x\arcsin x dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.\ \text{p}$$

1.85. Определить приближенно относительную погрешность при вычислении поверхности сферы, если при определении её радиуса относительная погрешность составила 1%.

r Пусть r - радиус сферы. При, изменении его на величину Δr поверхность S сферы получим приращение

$$\Delta S = S(r+\Delta r) - S(r) \approx dS(r).$$

Но $S = 4pr^2 \Rightarrow dS = 8prdr$. Тогда относительная погрешность вычисления поверхности сферы будет равна

$$dS = \frac{\Delta S}{S} = \frac{8prdr}{4pr^2} = 2\frac{\Delta r}{r} = 2\cdot dr = 2\cdot 1 = 2\%.\ \text{p}$$

1.86. Пусть u и v – дифференцируемые функции, дифференциалы которых du и dv известны. Найти dy, если

$$y = arctg\left(\frac{4}{v}\right) + \ln\sqrt{u^2+v^2}.$$

r

$$dy = d\left(arctg\left(\frac{4}{v}\right)\right) + \frac{1}{2}d\ln\left(u^2+v^2\right) = \frac{d\left(u/v\right)}{1+u^2/v^2} + \frac{1}{2}\frac{d\left(u^2+v^2\right)}{u^2+v^2} = \frac{vdu - udv}{u^2+v^2} +$$

$$+\frac{udu+vdv}{u^2+v^2} = \frac{(v+u)du + (u-v)dv}{u\ \ +v^2}, u^2+v^2 > 0.\ \text{p}$$

1.87. Найти A и $a(\Delta x)$ в формуле (1.20) если $y = x^{10}, x_0 = 0$. **Отв.** $A = 0, a(\Delta x) = \Delta x^9$.

1.88. При каких x дифференциал функции $y = \cos x$ не эквивалентен при $\Delta x \to 0$ её приращению. **Отв.** $x = kp$, $f \in Z$.

1.89. Найти дифференциалы:

1) $d\left(\sqrt{x} + 2\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$. **Отв.** $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{\Delta x}} + 2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x(x+\Delta x)}}dx$;

2) $d\left(2\sqrt{x^3}(3\ln x - 2)\right)$. **Отв.** $9\sqrt{x}\ln x dx$;

3) $d\left(5sh^7\left(\dfrac{x}{35}\right) + 7sh^5\left(\dfrac{x}{35}\right)\right)$. **Отв.** $sh^4\left(\dfrac{x}{35}\right)ch^3\left(\dfrac{x}{35}\right)dx$;

4) $d\left(\ln\dfrac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} + 2arctg\sqrt{\sin x}\right)$. **Отв.** $\dfrac{2dx}{\cos x\sqrt{x}}$;

5) $d(x^{x^2})$. **Отв.** $x^{x^2}(1 + 2\ln x)dx$.

1.90. Найти дифференциалы в указанных точках функций:

1) $y = arctg\dfrac{\ln x}{x}, x_1 = \dfrac{1}{e}, x_2 = e$. **Отв.** $\dfrac{2e^2dx}{e^2+1}, 0$;

2) $y = \dfrac{(2x-1)^3\sqrt{2+3x}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}, x = 0$. **Отв.** $-\dfrac{89\sqrt{2}}{192}dx$.

1.91.* В указанных точках найти дифференциалы $y = y(x)$, заданных неявными или параметрическими уравнениями:

1) $y^3 - y = 6x^2, (1;2)$. **Отв.** $12dx/11$;

2) $x + y\ln y, (x_0; y_0)$. **Отв.** $y_0dx/(x_0 - y_0)$;

3) $xe^{(x/y^2-1)} - 2y = 0, (4;2)$. **Отв.** $dx/3$;

4) $3^{\sin yx^2} - 3x(y-p), (1;p)$. **Отв.** $-2p\dfrac{\ln 3}{3+\ln 3}dx$;

5) $x = (t-1)^2(t-2), y = (t-1)^2(t-3), (4;0)$. **Отв.** $1/2\, dx$;

6) $x = e^t/t$, $y = (t-1)^2e^t, \left(-2/\sqrt{e}; 9/4\sqrt{e}\right)$. **Отв.** $1/8\, dx$.

1.92. Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y = y(x)$ в точке x:

1) $y = \sqrt[3]{x}, x = 125.1324$. **Отв.** 5.00177;

2) $y = \sin x, x = 359^{\mathbf{0}}$. **Отв.** -0.017;

3) $y = \arcsin x, x = 0.51$. **Отв.** 0.512;

4) $y = \ln tgx, x = 47^{0}15'$. **Отв.** 0.079;

5) $y = \sqrt{(2-x)/(2+x)}, x = 0.15$. **Отв.** 0.925.

1.93. Доказать, что для достаточно малых, по сравнению с x_0, значений Δx верна приближенная формула

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\Delta x, x_0 > 0 .$$

С помощью этой формулы вычислить приближенно:

1) $\sqrt[3]{200}$. **Отв.** 5.85;

2) $\sqrt[5]{243.45}$. **Отв.** 3.001;

3) $\sqrt[10]{1000}$. **Отв.** 1.9953.

1.94. Определить, насколько приближенно увеличится объем шара, если его радиус $R = 15$ увеличить на 0.2 *см*. **Отв.** 565 *см*^{3}.

1.95. Насколько приблизительно изменится (в процентах) сила тока в проводнике, если его сопротивление увеличится на 1%? **Отв.** Уменьшится на 1%.

1.96. Насколько приблизительно следует изменить длину маятника l = 20 *см*, чтобы период колебаний его увеличился на $0.05c$? (период T определяется формулой $T = 2p\sqrt{l/g}$). **Отв.** Увеличить на 2.23 *см*.

Производные и дифференциалы высших порядков

Производные высших порядков. Формула Лейбница. Высшие производные функций, заданных параметрически и неявно. Дифференциалы высших порядков

Если *первая производная* $f'(x)$ или *производная первого порядка* функции $f(x)$, определенной на (a,b), в свою очередь является дифференцируемой на (a,b) функцией, то ей производную называют *второй производной* или *производной второго порядка*. Она обозначается одним из символов:

$$f''(x),\ f^{(2)}(x),\ \frac{d^2 f(x)}{dx^2},\ f''_{xx},\ f''_{x^2} .$$

Аналогично определяется *производная* n *-го порядка*, $n \in \boldsymbol{N}$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \left(f^{(n-1)}(x)\right)',\ n \in \boldsymbol{N}.$$

При этом под *производной* $f^{(0)}(x)$ *нулевого порядка* подразумевается функция $f(x)$.

Если $s = s(t)$- закон прямолинейного движения материально точки, то $s''(t)$- ускорение этой точки в момент времени t. В этом и заключается *физический смысл второй производной.*

Известны следующие основные формулы для n-ой производной некоторых элементарных функций:

$$\left(a^{x}\right)^{(n)}=a^{x}\ln^{n}a;\left(e^{x}\right)^{(n)}=e^{x}; \tag{1.25}$$

$$(\sin ax)^{(n)}=a^{n}\sin\left(ax+\frac{np}{2}\right); \tag{1.26}$$

$$(\cos ax)^{(n)}=a^{n}\cos\left(ax+\frac{np}{2}\right); \tag{1.27}$$

$$\left((ax+b)^{a}\right)^{(n)}=a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)(ax+b)^{a-n}; \tag{1.28}$$

$$\left(\log_{a}|x|\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n}\ln a}, \tag{1.29}$$

в частности,

$$\left(\ln|x|\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n}}. \tag{1.30}$$

Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)-$ n раз дифференцируемы на (a,b). Тогда справедливы следующие формулы:

$$(au+bv)^{(n)}=au^{(n)}+bv^{(n)}, a, b-const; \tag{1.31}$$

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{m=0}^{n}C_{n}^{m}u^{(n-m)}v^{(m)}=u^{(n)}v+$$
$$+C_{n}^{1}u^{(n-1)}v'+C_{n}^{2}u^{(n-2)}+\ldots+C_{n}^{k}u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+uv^{n}. \tag{1.32}$$

Формула (1.32) называется *формулой Лейбница*. В ней

$$C_{n}^{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+!)}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!k!} \tag{1.33}$$

число сочетаний из n элементов по k.

1.97. Найти производную n - го порядка для функции

$$f(x)=\frac{7x+1}{17(4x+3)}.$$

r Легко получить, что

$$f'(x)=\frac{1}{(4x+3)^{2}}=(4x+3)^{-2}$$

Отсюда последовательно находим:

$$f''(x)+-2(4x+3)^{-3}\cdot 4=-2!(4x+3)4^{1};$$

$$f'''(x)=(-2)(-3)(4x+3)^{-4}\cdot 4^{2}=3!(4x+3)^{-4}\cdot 4^{2};$$

$$f^{(4)}(x)=(-2)(-3)(-4)(4x+3)^{-5}\cdot 4^{3}=-4!(4x+3)^{-5}\cdot 4^{3};$$

$$f^{(5)}(x)=(-2)(-3)(-4)(-5)(4x+3)^{-6}\cdot 4^{4}=5!(4x+4)^{-6}\cdot 4^{4};$$

…………………………………………………………………………

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot n!(4x+3)^{-(n+1)}\cdot 4^{n-1}.$$ p

1.98. Найти $f'''(x)$ для функции

$$f(x)=x^4\ln x.$$

r По формуле Лейбница (1.32) с учетом (1.33) имеем:
$\left(x^4\ln x\right)'''=\left(x^4\right)'''\ln x+C_3^1\left(x^4\right)''(\ln x)'+C_3^2\left(x^4\right)'(\ln x)''+x^4(\ln x)'''=24x\ln x+36x-12x+2x=$
$=24x\ln x+26x.$

1.99*. Для функции $f(x)=arctgx$, найти $f^{(n)}(0)$

Δ Так как $f'(x)=1/\left(1+x^2\right)$, то $\left(1+x^2\right)f'(x)=1.$

Вычислим производные порядка $(n-1)$ от обеих частей этого равенства. Для вычисления производной от левой части применим формулу Лейбница (1.32), положив в ней $u=f'(x)$, $v=1+x^2$. Получим $\left(1+x^2\right)f^{(n)}+2(n-1)xf^{(n-1)}(x)+(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x)=0$, откуда при $x=0$ найдем рекуррентное соотношение

$$f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(2)}(0).$$

При четном $n=2k$, так как $f^{(2)}(0)=0$, получаем $f^{(2k)}(0)=0$. При нечетном $n=2k+1$, поскольку $f'(0)=1$, находим

$$f^{(2k+1)}(0)=-(2k)(2k-1)f^{(2k-1)}(0)=(-1)^k(2k)!\,f'(0)=(-1)^k(2k)!.\blacktriangle$$

1.100. Найти вторую производную функции, обратной к функции $y=x+x^5$, $x\in R$.

Δ Данная функция всюду непрерывна и строго монотонна, ее производная $y'=1+5x^4\neq 0$, $\forall x\in \boldsymbol{R}$. Поэтому

$$x_y'=\frac{1}{y_x'}=\frac{1}{1+5x^4}.$$

Отсюда

$$x_{yy}''=\left(\frac{1}{1+5x^4}\right)_y'=\left(\frac{1}{1+5x^4}\right)_x'\cdot x_y'=-\frac{20x^3}{\left(1+5x^4\right)^3}.\blacktriangle$$

1.101. Найти $y''(x)$ для функций:

1) $y=\dfrac{x\left(1+3\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

3) $y=arctg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; 4) $y=\arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

5) $y=2arctg\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}-\ln\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}+x}{\sqrt[4]{x^4+1}-x}$.

Отв. 1) $3x\left(1-x^2\right)^{-5/2}$; **2)** $-x\left(x^2+1\right)^{-3/2}$; **3)** $-x\left(1+x^2\right)^{-2}$; **4)** $-4xsignx\cdot\left(1+x^2\right)^{-2}$, $x\neq 0$; **5)** $4x^3\left(1+x^4\right)^{-5/4}$.

1.102. Одна точка движется по закону $s_1(t)=t^3+{t^2}/{2}+t+{1}/{2}$, другая по закону $s_2(t)={2t^3}/{3}++3t^2-5t$ (s_1, s_2 измеряются в метрах, t- в секундах). Найти ускорения точек в тот момент, когда их скорости равны.

Отв. При $t=2c$: $13\,{м}/{c^2}$ и $14\,{м}/{c^2}$.

1.103. Найти производные указанного порядка:

1) $y=x^5\ln x$, y'''; 2) $y=\dfrac{a}{x^m}$, $y^{(4)}$;

3) $y=e^x\sin x$, $y^{(4)}$; 4) $y=x^2e^{2x}$, $y^{(50)}$.

Отв. **1)** $x^2(60\ln x+47)$; **2)** $am(m+1)(m+2)(m+3)x^{-(m+4)}$; **3)** $-4e^x\sin x$; **4)** $2^{49}e^{2x}\left(2x^2+100x+1225\right)$.

1.104. Доказать, что функции $y_1=(\sin m\arcsin x)$, и $y_2=\cos(m\arcsin x)$ удовлетворяют соотношению $\left(1-x^2\right)y''-xy'+m^2y=0$.

1.105*. Найти производную n-го порядка для функций:

1) $y=\dfrac{ax+b}{gx+d}$, a, b, g, $d-const$; 2) $y=\sin^2 x$;

3) $y=x^3\ln x$; 4) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; 5) $y=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Отв. 1) $(-1)^{n-1}n!(ad-bg)g^{n-1}(gx+d)^{-(n+1)}$; **2)** $2^{n-1}\cos\left(2x+\dfrac{np}{2}\right)$;

3) $(-1)^n 6\cdot(n-4)!x^{3-n}$, $n\geq 4$; **4)** $(n-1)!\left[(1-x)^{-n}+(-1)^{n+1}(1+x)^{-n}\right]$;

5) $(-1)^n\cdot n!\cdot(1+x)^{-(n+1)}\left[\ln(1+x)-1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}-\ldots-\dfrac{1}{n}\right]$.

1.106. Пусть $y=f(x)$ - взаимно однозначная функция, для которой $f'(x)\neq 0$. Вычислить вторую производную для обратной функции f^{-1}. **Отв.** $-{f''(x)}/{f'^3(x)}$.

Пусть функции $x=x(t)$ и $y=y(t)$ определены на интервале (a,b) и параметрически задают на этом интервале функцию $y=f(x)$. Тогда, как известно (см. формулу (1.11)), производная этой функции вычисляется по формуле

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},\ \forall t\in(a,b).$$

Тогда вторая производная y''_{xx} находится по формуле

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t},\ t\in(a,b), \qquad (1.34)$$

или

$$y''_{xx}=\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t\cdot t'_x=\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t\cdot\frac{1}{x'_t},$$

т.е.

$$y''_{xx}=\frac{x'_t\cdot y''_{tt}-y'_t\cdot x''_{tt}}{x'^3_t}.$$

Производная же n-го порядка функции, заданной параметрически, по аналогии с (1.33) вычисляется по формуле

$$y^{(n)}_{x^n}=\frac{\left(y^{(n-1)}_{x^{n-1}}\right)'_t}{x'_t}. \tag{1.35}$$

Если же функция $y=y(x)$ задана неявно соотношением $F(x,y)=0$, то y'_x находится дифференцированием этого соотношения по x:

$$y'_x=\frac{d}{dx}(F(x,y))=0. \tag{1.36}$$

Вторая производная функции $y(x)$, заданной неявно, находится повторным дифференцированием по x равенства (1.36):

$$y''_{xx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(F(x,y))\right)=0. \tag{1.37}$$

Аналогично находится и производная n-го порядка функции $y(x)$, заданной неявно, если она существует.

1.107. Для функции $y(x)$, заданной параметрически, найти y''_{xx}:

$$\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t).\end{cases}$$

Δ найдем сначала y'_x:

$$y'_t=a(\cos t-\cos t+t\sin t)=at\sin t,$$
$$x'_t=a(-\sin t+\sin t+t\cos t)=at\cos t.$$

По формуле (1.33)

$$y'_x=tgt,$$

а по формуле (1.34) получим

$$y''_{xx}=\frac{(tgt)'}{at\cos t}=\frac{1}{at\cos^3 t}.\blacktriangle$$

1.108. Найти y''_{xx}, если $arctgy-y+x=0$.

Δ Дифференцируем по x, считая y функцией от x, и определяем y':

$$\frac{y'}{1+y^2}-y'+1=0\Rightarrow y'=\frac{1+y^2}{y^2}=y^{-2}+1.$$

Дифференцируем еще раз по x:

$$y'' = -2y^{-3}y'.$$

Подставив сюда найденное значение y', окончательно получим

$$y''_{xx} = -\frac{2\left(1+y^2\right)}{y^5}. \ \blacktriangle$$

1.109. Для функций, заданных параметрически, найти указанные производные:

1) $x = e^{at}\cos b\ t$, $y = e^{lt}\sin b\ t$, y''_{xx};

2) $x = a\left(\cos t - \ln ctg\dfrac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$, y'''_{x^3};

3) $x = {a\cos t}\big/{\sqrt{\cos 2t}}$, $y = {a\sin t}\big/{\sqrt{\cos 2t}}$, y''_{xx};

4) $x = a\cos^5 t$, $y = a\sin^5 t$, y''_{xx};

5) $x = {(a\cos t)}\big/{(1+2\cos t)}$, $y = {(b\sin t)}\big/{(1+2\cos t)}$, y''_{xx};

6) $\begin{cases} x = 2t\cos t + \left(t^2-2\right)\sin t, \\ y = 2t\sin t - \left(t^2-2\right)\cos t, \end{cases}$ y'''_{x^3};

7) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $y^{(4)}_{x^4}$.

Отв. 1) $\dfrac{\left(a^2+b^2\right)be^{-at}}{(a\cos bt - b\sin bt)^3}$; **2)** $\dfrac{\sin t\left(1+3\sin^2 t\right)}{a^2\cos^7 t}$; **3)** $-\dfrac{\cos 2t\sqrt{\cos 2t}}{a\sin^3 t}$;

4) $-\dfrac{3}{25a^2}\cdot\dfrac{8-7\cos^2 t}{\sin t\cdot\cos^{13} t}$; **5)** $-\dfrac{b}{a^2}\cdot\left(\dfrac{1+2\cos t}{\sin t}\right)^3$; **6)** $\dfrac{3t\sin t - 2\cos t}{(t\cos t)^5}$;

7) $-\dfrac{3b}{a^4}\cdot\dfrac{5-4\sin^2 t}{\sin^7 t}$.

1.110. Найти y''_{xx} в заданной точке:

1) $x = \dfrac{2t-t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{t^2}{t-1}$; $(0{,}4)$;

2) $x = \ln(1+\sin t)$, $y = \ln(1-\cos 2j)$; $\left(\ln\left(3/2\right), \ln\left(1/2\right)\right)$.

Отв. 1) $1/2$; **2)** -12.

1.111*. Найти $y^{(n)}_{x^n}$ для функций, заданных параметрически:

1) $x = \cos t$, $y = \cos nt$, $n \in \boldsymbol{N}$;

2) $x = t^2 - t + 1$, $y = t^2 + t + 1$.

Отв. 1) $y^{(n)} = 2^{n-1}n!$; **2)** $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}2^n(2n-3)!!}{(2t-1)^{2n-1}}$.

1.112. Найти y''_{xx} от функций, заданных неявно:

1) $e^x - e^y = y - x$; 2) $x + y = e^{x-y}$; 3) $y = x + arctgy$.

Отв. 1) $\left(e^x - e^y\right)\left(1 - e^{x+y}\right)\Big/\left(1+e^y\right)^3$; **2)** $4e^{(x-y)}\Big/\left(e^{x-y}+1\right)^3 = 4\left(x+y\right)\Big/\left(x+y+1\right)^3$;

3) $-2\left(y^2+1\right)\Big/y^5$

1.113. Найти $y''_{xx}(M_0)$, если:

1) $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$, $M_0 = (1,1)$; 2) $e^y + xy = e$, $M_0 = (0,1)$.

Отв. 1) $-238/27$; **2)** $-1/e$.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и $d\, f(x) = f'(x)dx$ – ее *первый дифференциал*. Пусть $f'(x)$ также дифференцируема на (a,b). Тогда при фиксированном dx дифференциал $df(x)$ является только функцией x, для которой можно в свою очередь вычислить дифференциал, причем в качестве приращения Δx можно взять dx. Вычисленный при этом условии дифференциал называется *вторым дифференциалом* или *дифференциалом второго порядка* от функции $f(x)$ и обозначается d^2y или $d^2f(x)$. Для него по определению получается равенство

$$d^2 f(x) = f''(x)dx^2. \tag{1.38}$$

Если $f(x)$ n раз дифференцируема на (a,b), то дифференциал n-го порядка функции $f(x)$ есть

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n. \tag{1.39}$$

Формула (1.38) и ее обобщение (1.39) справедливы только тогда, когда x – независимая переменная. Для сложной функции $y = f(x(t))$ второй дифференциал

$$d^2 f(x) = f''_{xx}dx^2 + f'_x d^2x, \tag{1.40}$$

где dx – первый, а d^2x – второй дифференциалы функции $x = x(t)$. Как следует из (1.40) *второй дифференциал сложной функции свойством инвариантности не обладает*.

1.114. Найти второй дифференциал функции (x – независимая переменная):

1) $y = \left(x^2+x+1\right)e^{-x}$; 2) $y = x\left(\cos\ln x + \sin\ln x\right)$; 3) $y = x^x$.

Отв. 1) $\left(x^2 - 3x + 1\right)e^{-x}dx^2$; **2)** $\dfrac{-2\sin\ln x}{x^2}dx$; **3)** $\left(x\left(1+\ln x\right)^2+1\right)x^{x-1}dx^2$.

1.115. Найти второй дифференциал в указанной точке x_0:

1) $y = x\sqrt[3]{(x-5)^2}$, $x_0 = -3$; 2) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2+x^2}{2-x^2}$, $x_0 = 0$. **Отв. 1)** $\dfrac{-5}{8}dx^2$; **2)** dx^2.

1.116. Найти $d^2y\left(M_0\right)$ для функций $y = y(x)$, заданных неявно:

1) $2\ln(y-x) + \sin xy = 0$, $M_0 = (0,1)$;

2) $x^3y + \arcsin(y-x) = 1$, $M_0 = (1,1)$;

3) $3(y-x+1)+\operatorname{arctg}\left(y/x\right)=0$, $M_0=(1,0)$.

Отв. 1) $-\dfrac{1}{4}dx^2$; **2)** 0; **3)** $\dfrac{3}{8}dx^2$.

1.117*. Вычислить в заданной точке x_0 дифференциал порядка n:

1) $y=\dfrac{7x+1}{(3x-2)^2}$, $x_0=0$, $n=10$;

2) $y=\sin x\sin 2x\sin 3x$, $x_0=p/6$, $n=10$;

3) $y=\left(2x^2+1\right)\operatorname{sh}^2 x$, $x_0=0$, $n=8$.

Отв. 1) $194\cdot 10!\cdot 3^9\,dx^{10}$; **2)** $-2^7\cdot 1025\sqrt{3}\,dx^{10}$; **3)** $2^9\cdot 29dx^8$.

2. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя. Формула Тейлора

Теоремы о среднем

Локальный экстремум функции. Теорема Ферма. Теорема Роля. Теорема Коши. Теорема Лагранжа и ее следствия

Точка x_0 называется точкой локального максимума функции $f(x)$, если существует окрестность точки x_0, в которой для всех точек выполнено неравенство $f(x)\le f(x_0)$.

Если для всех $x\ne x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 верно строгое неравенство

$$f(x)<f(x_0),$$

то точка x_0 называется *точкой строгого локального максимума функции* $f(x)$.

Аналогично, если в некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство

$$f(x)\ge f(x_0),$$

то точка x_0 называется *точкой локального минимума*; если же для всех $x\ne x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 верно строгое неравенство

$$f(x)>f(x_0),$$

то точка x_0 называется *точкой строгого минимума функции* $f(x)$.

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума*, а значение функции в них – *экстремальными значениями*.

Имеют место следующие *основные теоремы дифференциального исчисления (теоремы о среднем)*.

Теорема 2.1 (Ферма). Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a,b) и в некоторой точке $x_0\in(a,b)$ имеет локальный экстремум. Тогда, если в этой точке существует конечная производная $f'(x_0)$, то $f'(x_0)=0$.

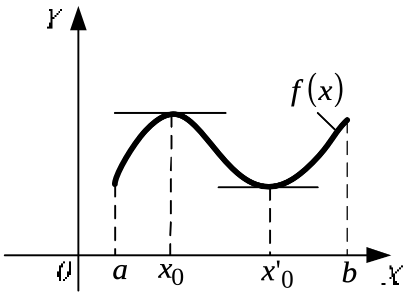


Рис. 2.1

Геометрический смысл теоремы Ферма следующий: если точка x_0 является точкой экстремума функции и существует $f'(x_0)$, то касательная, проведенная к графику $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, параллельна оси X. На рис. 2.1. таких точек две – x_0 и x_0'.

Теорема 2.2 (Ролля). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема в каждой точке интервала (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогда в интервале (a, b) существует хотя бы одна точка x, что $f'(x) = 0$.

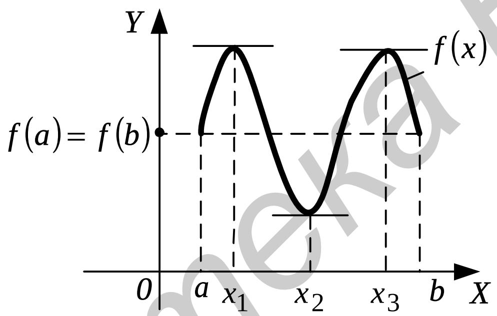


Рис. 2.2

Геометрический смысл теоремы Ролля следующий: при выполнении условий теоремы внутри отрезка $[a, b]$ обязательно найдется хотя бы одна точка x такая, что касательная к графику $f(x)$ в точке $(x, f(x))$ параллельна оси X. На рис. 2.2 таких точек три – x_1, x_2, x_3.

Следствие (обобщенная теорема Ролля). Пусть на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема и обращается в нуль в $n+1$-й точке x_0, x_1, x_2, K, x_n этого отрезка. Тогда существует число $x \in (a, b)$, что $f^{(n)}(x) = 0$.

Теорема 2.3 (Лагранжа). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b), то на (a, b) существует точка x такая, что имеет место *формула конечных приращений Лагранжа*

$$f(b) - f(a) = f'(x)(b - a). \tag{2.1}$$

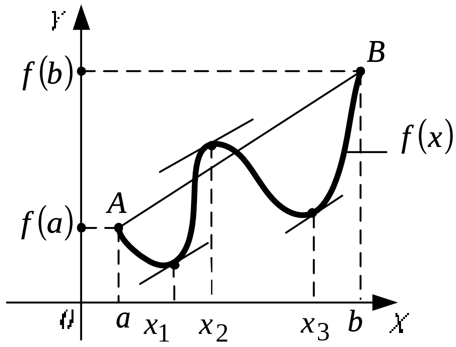


Рис. 2.3

Геометрический смысл формулы (2.1) состоит в том, что в условиях теоремы на графике функции $f(x)$ найдется точка $(x, f(x))$, $a<x<b$, в которой касательная к графику параллельна хорде, соединяющей точки $A=(a, f(a))$ и $B=(b, f(b))$ (рис. 2.3).

Часто формулу (2.1) записывают в виде

$$f(b)-f(a)=f'(a+q(b-a)),\ 0<q<1,$$

где q – некоторое число, при котором $a+q(b-a)=x$. Если принять $a=x_0$, $x-x_0=\Delta x$, то формуле Лагранжа можно придать вид

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)=f'(x_0+q\ \Delta x),\ 0<q<1. \qquad (2.2)$$

Следствие 1. (условие постоянства функции). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на (a,b), причем $f'(x)=0$, $\forall x\in(a,b)$, то функция $f(x)$ является постоянной на $[a,b]$.

Следствие 2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,b]$, дифференцируемы в (a,b) и $f'(x)=g'(x)$, $\forall x\in(a,b)$. Тогда $f(x)-g(x)=C$, $\forall x\in[a,b]$, где C – постоянная.

Теорема 2.4. (Коши). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,b]$, дифференцируемы во всех точках интервала (a,b), причем $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$. Тогда на (a,b) найдется такая точка x, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (2.3)$$

2.1. Удовлетворяет ли функция $f(x)=3x^2-1$ условиям теоремы Ферма на отрезке $[1,2]$?

Δ Данная функция не удовлетворяет теореме Ферма, так как она монотонно возрастает на отрезке $[1,2]$, и, значит, принимает наименьшее значение при $x=1$, а наибольшее – при $x=2$, т. е. не во внутренних точках отрезка $[1,2]$. Поэтому теорема Ферма не имеет места; другими словами, нельзя утверждать, что $f'(1)=f'(2)=0$. В самом деле, $f'(1)=f'_-(1)=6$, $f'(2)=f'_+(2)=12$. ▲

2.2. На интервалах $(-1,1)$ и $(1,2)$ найти точки, в которых касательная к графику функции $f(x)=(x^2-1)(x-2)$ горизонтальна.

Δ На концах отрезка $[-1,1]$ функция $f(x)$ удовлетворяет очевидному равенству $f(-1)=f(1)=0$, а на концах отрезка $[1,2]$ – равенству $f(1)=f(2)=0$. Внутри этих отрезков функция дифференцируема. Тогда по теореме Ролля существуют точки $x_1 \in (-1,1)$ и $x_2 \in (1,2)$, в которых $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Находим $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$. Эта производная обращается в нуль в точке $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{7}}{3} \in (-1,1)$ и в точке $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{7}}{3} \in (1,2)$, и, следовательно, в этих точках касательная к графику $f(x)$ горизонтальна. ▲

2.3. Доказать, что уравнение $3x^5 + 15x - 8 = 0$ имеет только один действительный корень.

Δ Так как функция $f(x) = 3x^5 + 15x - 8$ нечетна, то у нее существует по крайней мере один корень. Предположим, что существует два корня $x_1 < x_2$. Тогда на отрезке $[x_1, x_2]$ функция $f(x) = 3x^5 + 15x - 8$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Ролля: она непрерывна, на концах отрезка обращается в нуль и в каждой точке дифференцируема. Тогда существует $x \in (x_1, x_2)$, что $f'(x) = 0$. Но $f'(x) = 15(x^4 + 1) > 0$. Полученное противоречие доказывает, что данное уравнение имеет лишь один действительный корень. ▲

2.4. Доказать, что уравнение $x^4 - 4x - 1 = 0$ имеет в точности два различных корня.

Δ Функция $f(x) = x^4 - 4x - 1$ непрерывна на $\boldsymbol{R}$, ее производная $f'(x) = 4x^3 - 4 = \; = 4(x-1)(x^2 + x + 1)$ обращается в нуль лишь в точке $x = 1$. Если бы функция f обращалась в нуль, например, в трех точках, то, согласно обобщенной теореме Ролля, ее производная обращалась бы в двух точках, что невозможно. Кроме того $f(-1) = 4$, $f(0) = -1$ и $f(3) = 68$. Значит, искомые корни находятся на отрезках $[-1,0]$ и $[0,3]$. ▲

2.5. Для функции $f(x) = \sqrt{5}x^3 + x^2$, $x \in [-1,1]$. Найти все точки x такие, что имеет место формула Лагранжа.

Δ Согласно формуле (2.1), имеем $f'(x) = [f(1) - f(-1)]/2$. Но $f'(x) = 3\sqrt{5}x^2 + 2x$, $f(1) = \sqrt{5} + 1$, $f(-1) = 1 - \sqrt{5}$. Тогда $3\sqrt{5}x^2 + 2x = \sqrt{5} \Rightarrow x_1 = 1/\sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}/3$. ▲

2.6. Удовлетворяет ли функция $f(x) = e^x$ и $g(x) = x^2/\left(1 + x^2\right)$ условиям теоремы Коши на отрезке $[-3,3]$?

Δ Функции f и g непрерывны на $[-3,3]$, дифференцируемы в $(3,3)$; $g'(x) = 2x/\left(1 + x^2\right)^2$ обращается в нуль при $x = 0 \in (-3,3)$. Значит, условие $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (-3,3)$ нарушено. Следовательно, теорема Коши для функций e^x и $x^2/\left(1 + x^2\right)$ на $[-3,3]$ не имеет места. ▲

2.7. Пользуясь признаком постоянства функции, доказать, что

$$\arcsin x + \arccos x = p/2 .$$

Δ Рассмотрим функцию

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x , \quad x \in [-1,1].$$

Ее производная в $(-1,1)$ равна

$$f'(x) = 1\Big/\sqrt{1-x^2} - 1\Big/\sqrt{1-x^2} = 0.$$

Согласно следствию 1 из теоремы Лагранжа, заключаем, что $f(x) = \text{const}$, т. е.

$$\arcsin x + \arccos x = C, \quad x \in (-1, 1).$$

Для определения постоянной C в этом равенстве положим, например, $x = 0$. Получим $p/2 = C \Rightarrow \arcsin x + \arccos x = p/2$, $x \in (-1, 1)$. В точках $x = \pm 1$ это равенство, очевидно, выполняется также. ▲

2.8.* Для $x_2 > x_1$ доказать неравенство:

$$\text{arctg} x_2 - \text{arctg} x_1 < x_2 - x_1. \tag{2.4}$$

Δ К функции $f(x) = \text{arctg} x$ на отрезке $[x_1, x_2]$ применим формулу Лагранжа:

$$\text{arctg} x_2 - \text{arctg} x_1 = \frac{1}{1+x^2}(x_2 - x_1),$$

где $x_1 < x < x_2$. Так как

$$0 < \frac{1}{1+x^2} < 1 \quad \text{и} \quad x_2 - x_1 > 0,$$

то $\text{arctg} x_2 - \text{arctg} x_1 < x_2 - x_1$, и, тем самым, неравенство (2.4) доказано. В частности, положив в нем $x_1 = 0$, $x_2 = x$, получим

$$\text{arctg} x < x, \quad x > 0. \quad ▲$$

2.9. Удовлетворяет ли функция $f(x) = \ln \sin x$ на отрезке $[p/6, 5p/6]$ условиям теоремы Ферма?

Отв. Да.

2.10. Удовлетворяет ли условиям теоремы Ролля: а) функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ на $[-1, 1]$; б) функция $f(x) = \ln \sin x$ на $[p/6, 5p/6]$; в) функция $f(x) = 1 - |x|$ на $[-1, 1]$? Если нет, то почему? **Отв. а)** нет; **б)** да; **в)** нет.

2.11. На интервале $(0, 1)$ найти такую точку x, что касательная к графику функции $y = x^3$ в точке (x, x^3) будет параллельна хорде, соединяющей точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$. **Отв.** $x = \sqrt{3}/3$.

2.12.* Доказать, что корни производной многочлена $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ действительные, простые и лежат на интервалах $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$.

2.13. Проверить, что функции $f(x) = x^2 - 2x + 3$ и $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ удовлетворяют условиям теоремы Коши на $[1, 4]$ и найти соответствующее значение x.

Отв. $x = 2$.

2.14* Доказать, что многочлен

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathbf{L} + \frac{x^n}{n}, \; n \in \boldsymbol{N},$$

не имеет кратных корней.

2.15.* Доказать, что уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ при $a^2 - 3b < 0$ имеет единственный простой действительный корень.

2.16. Доказать, что уравнение $x^5 + x^4 + x^2 + 10x - 5 = 0$ имеет только один положительный корень и показать, что он содержится в интервале (0, ½).

2.17. Доказать, что уравнение $2e^x + x^2 + 18x - 6 = 0$ имеет единственный положительный корень, содержащийся в интервале (0;0,2).

2.18. Пользуясь признаком постоянства функции, доказать, что

а) $arctgx + arctgx = p/2,\ x \in R$;

б) $arctgx + arctg\dfrac{1}{x} = \begin{cases} p/2, & x > 0, \\ -p/2, & x < 0; \end{cases}$

в) $arctgx + arctg\dfrac{1-x}{x1+x} = \begin{cases} p/4, & x > -1, \\ -3p/4, & x < 0; \end{cases}$

г) $\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = 2arctgx, \quad x \ge 0$;

д) $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} p - 2\arg tgx, & x \ge 1; \\ 2arctgx, & -1 \le x \le 1; \\ -p - 2arctgx, & x \le -1. \end{cases}$

2.19. Показать, что квадратные корни из двух последовательных чисел, больших N^2, отличаются между собой менее, чем на 1/2N.

2.20. Пользуясь теоремой Лагранжа, доказать неравенства:

а) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x,\ x > 0$; б) $l^x > 1 + x,\ x \in R$; в) $l^x > ex,\ x > 1$.

Правило Лопиталя

Правило Лопиталя для неопределенностей типа 0/0, ∞/∞. Применение правила к неопределенностям типа $0 \cdot \infty$, ∞-∞, 0^0, ∞^0, 1^∞.

Теорема 2.5 (правило Лопиталя раскрытия неопределенности вида 0/0, ∞/∞).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:

а) функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки $x = x_0$, за исключением, быть может, самой точки x_0, причем, $g'(x_0) \ne 0$ в этой окрестности;

б) функции $f(x)$ и $g(x)$ являются одновременно бесконечно малыми, либо бесконечно большими при $x \to x_0$;

в) существует конечный

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Тогда существует

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A. \tag{2.5}$$

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0, $f(x_0) = g(x_0) = 0,\ g'(x_0) \ne 0,$ то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{2.6}$$

Теорема остается в силе при $x \to \pm\infty$, а также в случае одностороннего предела $(x \to x_0 \pm 0)$ при выполнении условий а) – б) соответственно на интервалах $(d, +\infty), (-\infty, -d), (x_0, x_o + d), (x_0 - d, x_0), d > 0$.

2.21. Найти

$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}.$$

Δ Нетрудно видеть, что функции $f(x)=e^{ax}-e^{-2ax}$ *и* $g(x)=\ln(1+x)$ - бесконечно малые при $x\to 0$. Далее, $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют во всякой окрестности точки $x=0$, не содержащей точки $x=-1$, причем

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}\neq 0,\quad x>-1.$$

Наконец, существует предел отношения производных

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}+2ae^{-2ax}}{1/(1+x)}=3a.$$

Поэтому применимо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}+2ae^{-2ax}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}+2ae^{-2ax}}{1(1+x)}=3a. \quad \blacktriangle$$

2.22. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Δ. Раскрывая неопределенность вида ∞/∞ по правилу Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1/2\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0. \quad \blacktriangle$$

Замечание. Для применения правила Лопиталя наличие предела в правой части равенства (2.5) существенно. Например, $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos(1/x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}=0$. Однако формальное применение правила Лопиталя дает

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{2x\cos(1/x)+\sin(1/x)}{1}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}.$$

Последний же предел, как известно, не существует. $\blacktriangle$

2.23. Известно, что при $x\to+\infty$ функции $x^k\,(k>0), \log_a x, a^x\,(a>1)$ являются бесконечно большими. Пользуясь правилом Лопиталя, сравнить эти функции между собой.

Δ а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^k}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}\log_a e}{kx^{k-1}}=\log_a e\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{kx^k}=0;$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{kx^{k-1}}{a^x\ln a}=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{k'}{a^x\ln^k a}=0.$

Следовательно, степенная функция x^k, $k>0$, растет быстрее логарифмической функции $\log_a x$, $a>1$, а показательная функция a^x, $a>1$, растет быстрее степенной функции x^k. $\blacktriangle$

При применении правила Лопиталя часто бывает удобно использовать асимптотические равенства типа

$$\sin\alpha \sim tg\alpha \sim e^{\alpha}-1 \sim \ln(1+\alpha) \sim \sin\alpha \sim tg\alpha \sim arctg\alpha \sim \arcsin\alpha \sim \alpha\,, \qquad (2.7)$$

где $\alpha=\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$.

2.24. Найти $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$.

Δ Так как $\sin x \sim x$ при $x\to 0$, то, применив правило Лопиталя, получим

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x + x\sin x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}. \ \blacktriangle$$

Неопределенности вида $0.\infty$ и $\infty-\infty$ часто удается свести к виду 0/0 или ∞/∞ с помощью алгебраических преобразований, а затем применить правило Лопиталя.

2.25. Найти пределы:

а) $L=\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(1+\sin^2 x)\cdot ctg\ln^2(1+x)\right]$; б) $L=\lim(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2 x)$.

Δ а) Имеет место неопределенность вида $0.\infty$:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{tg\ln^2(1+x)}.$$

Но $\ln(1+\sin^2 x)\sim\sin^2 x\sim x^2$ при $x\to 0$. Далее, $\ln^2(1+x)\sim x^2$, $x\to 0$, $atg^2 x\sim x^2$.

В результате, $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$. (В этом примере удалось обойтись без применения правила Лопиталя, что лишний раз подчеркивает важность асимптотических формул (2.7)).

б) Преобразуя неопределенность вида $\infty-\infty$ к виду 0/0 и используя асимптотическую формулу $\sin x\sim x$ при $x\to 0$, получаем

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2\cos x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x + x\cos x)(\sin x - x\cos x)}{x^2\sin^2 x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x\cos x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}.$$

Так как $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + x\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1+1=2$, а

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$ вычислен в примере 2.24 и равен 1/3, то искомый предел $L=2/3$.

▲

Для вычисления пределов функций вида $q(x)=(f(x))^{g(x)}$, являющихся неопределенностями типа 0^0, ∞^0, 1^∞, надо функцию $q(x)$ представить в виде $q(x)=e^{g(x)\ln f(x)}$, и тогда можно свести вычисление предела функции $g(x)\ln(x)$ к раскрытию неопределенности $0.\infty$.

2.26. Вычислить предел

а) $L=\lim\limits_{x\to\pi/2-0} tgx^{ctgx}$ б) $L=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2+1})^{1/\ln x}$.

Δ а) Имеем $tgx^{ctgx}=e^{ctgx\ln tgx}=e^{\dfrac{\ln tgx}{tgx}}$.

Но выражение $(\ln tgx)/tgx$ при $x\to p\ /2-0$ есть неопределенность вида ∞/∞. Раскрывая ее по правилу Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to p\ /2-0}\frac{\ln tgx}{tgx}=\lim_{x\to p\ /2-0}\frac{\dfrac{1}{tgx}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}}=0.$$

Тогда $L=e^0=1$.

б) По правилу Лопиталя имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1}}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x^{2+1}}}}{1/x}=1.$$

Тогда $L=e^1=e$. ▲

2.27. Показать, что следующие пределы не могут быть вычислены по правилу Лопиталя, и найти эти пределы.

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x-\cos x}$; 3) $\lim\limits_{x\to p\ /2}\dfrac{tgx}{\sec x}$. **Отв. 1)** 0; **2)** 1; **3)** 1.

2.28*. Предполагая, что существует $f''(a)$, найти

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}. \qquad \textbf{Отв. } f''(a).$$

2.29. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax-\sin bx}{\sin ax-\sin bx}$, $a\neq b$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{tg^2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x-1}{\ln x}$; 4) $\lim\limits_{x\to p\ /2}\dfrac{\cos(2m+1)x}{\cos(2n+1)x}$, $m,n\in N$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$, $a>0$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-x}{\arcsin x-\ln(1+x)}$;

7)* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a(1-x^b)-b(1-x^a)}{(1-x^a)(1-x^b)}$, $a\cdot b\neq0$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\sin x}{ctgx}$;

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}\ln x}{\sqrt[3]{2x+3}\cdot\sqrt{\ln x}}$; 10) $\lim\limits_{x\to+\infty}(p-arctg\sqrt{x})\sqrt{x}$;

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$; 12)* $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{7/8}-x^{6/7}\ln^2 x)$;

13) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/x^2}$; 14) $\lim\limits_{x\to p\ /2-0}(p-2x)^{\cos x}$;

15) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1/x)^{\sin x}$.

Отв. 1) 1. **2)** -1/2. **3)** 1. **4)** $(-1)^{m-n}\dfrac{2m+1}{2n+1}$.

5) 1/a. **6)** 0. **7)** $(a-b)/2$ **8)** 0. **9)** 0. **10)** 2. **11)** 0. **12)** $+\infty$.
13) $l^{-1/2}$. **14)** 1. **15)** 1.

Формула Тейлора

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа. Основные разложения по формуле Тейлора. Приложения формулы Тейлора

Если функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0, имеет в этой окрестности производные до $(n-1)$-го порядка и существует $f^{(n)}(x_o)$, то справедлива *следующая формула Тейлора n-го порядка функции в окрестности точки x_o с остаточным членом в форме Пеано или локальная формула Тейлора* вида

$$f(x)=f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o)+\frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2+\frac{f'''(x_o)}{3!}(x-x_o)^3+\ldots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)+o((x-x_o)^n). \qquad (2.8)$$

Кратко эта формула записывается в виде:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n), \qquad (2.9)$$

где 0!=1.

Напомним, что запись $o((x-x_o)^n)$ означает, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{o((x-x_0)^n}{(x-x_0)^n}=0,$ т.е. функция $o((x-x_0)^n)$ при $x\to x_0$ является функцией более высокого порядка малости, чем $(x-x_0)^n$ при $x\to x_o$.

Многочлен

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (2.10)$$

называется *многочленом Тейлора функции* $f(x)$ *в точке* x_0, а функция

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x) \qquad (2.11)$$

- *остаточным членом n-го порядка формулы Тейлора*.

Если $x_0=0$, то формула (2.8) (или (2.9)) принимает вид

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n), \quad x\to 0,$$

и называется *формулой Маклорена*.

Локальная формула Тейлора показывает, что, заменив $f(x)$ в окрестности точки x_0 ее многочленом Тейлора n-ой степени, мы совершим ошибку, представляющую собой при $x\to x_0$ бесконечно малую функцию более высокого порядка малости, чем $(x-x_0)^n$.

Отметим, что если $f(x)$ - четная функция, то $\forall_n \in N$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1}), \tag{2.12}$$

Если же $f(x)$ - нечетна, то

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o(x^{2n+2}). \tag{2.13}$$

Для практических целей наиболее важны следующие *основные разложения по формуле Тейлора* (формуле Маклорена):

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),$$

или

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n). \tag{2.14}$$

$$\operatorname{sh} x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\mathbf{K}+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right), \text{ или}$$

$$\operatorname{sh} x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right). \tag{2.15}$$

$$\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\mathbf{K}+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right), \text{ или}$$

$$\operatorname{ch} x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n+1}\right). \tag{2.16}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\mathbf{K}+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right), \text{ или}$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right). \tag{2.17}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\mathbf{K}+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right), \text{ или}$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n+1}\right). \tag{2.18}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\mathbf{K}+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right), \text{ или}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o\left(x^n\right). \tag{2.19}$$

В частности,

$$\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o\left(x^n\right). \tag{2.20}$$

И, наконец,

$$(1+x)^{a} = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^{2} + \mathbf{K} + \frac{a(a-1)\mathbf{K}(a-n+1)}{n!}x^{n} + o\left(x^{2n+1}\right), \qquad (2.21)$$

или

$$(1+x)^{a} = \sum_{k=0}^{n} C_{a}^{k} x^{k} + o\left(x^{n}\right),$$

где

$$C_{a}^{0} = 1, \quad C_{a}^{k} = \frac{a(a-1)\mathbf{K}(a-k+1)}{k!}, \quad k \in \boldsymbol{N}.$$

В частности,

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k} x^{k} + o\left(x^{n}\right), \qquad (2.22)$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} x^{k} + o\left(x^{n}\right). \qquad (2.23)$$

Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то для любой точки x из этой окрестности найдется точка x, лежащая между x и x_0, такая, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k} + \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (2.24)$$

Формула (2.24) называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (2.25)$$

Лагранжа.

Часто x записывается в виде $x = x_0 + q(x-x_0)$, где $0 < q < 1$, или, если $x_0 = 0$, в виде $x = \theta\, x$.

2.30. Разложить по формуле Маклорена до $o\left(x^{n}\right)$ функцию $f(x)$, если:

а) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$; б) $f(x) = \ln(5-4x)$.

Δ а) Так как

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \left(1 + \left(-1/x\right)\right)^{-1/2},$$

то, применив формулу (2.21) при $a = -1/2$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k} C_{-1/2}^{k} x^{k} + o\left(x^{n}\right),$$

где

$$C_{-1/2}^{k}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!}=(-1)^{k}\,\frac{(2k-1)!!}{2^{k}\cdot k!}.$$

Напомним, что $(2k-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot(2k-1)$.

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^{k}\cdot k!}x^{k}+o\left(x^{n}\right).$$

б) Так как $\ln(5-4x)=\ln 5+\ln\left(1-\frac{4}{5}x\right)$, то из формулы (2.20) получаем

$$\ln(5-4x)=\ln 5-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{4}{5}\right)^{k}x^{k}+o\left(x^{n}\right). \quad \blacktriangle$$

2.31. Разложить по формуле Маклорена до $o\left(x^{n}\right)$ функции:

а) $f(x)=e^{x}\ln(1+x)$, $n=4$; б) $f(x)=\dfrac{x^{2}+5}{x^{2}+x-12}$.

Δ а) Используя разложения (2.14) и (2.19), получаем

$$f(x)=\left(1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+o\left(x^{n}\right)\right)\left(x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{4}}{4}+o\left(x^{n}\right)\right)=$$

$$=x+\left(-\frac{1}{2}+1\right)x^{2}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)x^{3}+$$

$$+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)x^{4}+o\left(x^{4}\right)==x+\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{3}x^{3}+o\left(x^{4}\right).$$

б) Разделив числитель на знаменатель, представим $f(x)$ в виде

$$f(x)=1+\frac{17-x}{(x+4)(x-3)}=1-\frac{3}{x+4}+\frac{2}{x-3}=1-\frac{3}{4\left(1+\frac{x}{4}\right)}-\frac{2}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)}.$$

Используя теперь разложения (2.22) и (2.23), отсюда получаем

$$f(x)=1-\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\,\frac{x^{k}}{4^{k}}-\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k}}{3^{k}}+o\left(x^{n}\right),$$

или

$$f(x)=-\frac{5}{12}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3(-1)^{k+1}}{4^{k+1}}-\frac{2}{3^{k+1}}\right)x^{k}+o\left(x^{n}\right). \quad \blacktriangle$$

Разложение функции $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0\neq 0$ заменой $x-x_0=t$ обычно сводится к разложению функции $g(t)=f(x_0+t)$ по формуле Маклорена.

2.32. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0=2$ до $o\left((x-2)^{n}\right)$

функцию $f(x)=\ln\left(2x-x^2+3\right)$.

Δ Так как $2x-x^2+3=(3-x)(x+1)$, то, введя замену $x-2=t$, получим

$$2x-x^2+3=(1-t)(3+t)=3(1-t)\left(1+\frac{t}{3}\right).$$

Отсюда вытекает, что

$$f(x)=g(t)=\ln 3+\ln(1-t)+\ln\left(1+\frac{t}{3}\right).$$

Используя теперь стандартные разложения (2.19) и (2.20), получаем

$$g(t)=\ln 3-\sum_{k=1}^{n}\frac{t^k}{k}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{t^k}{k\cdot 3^k}+o(t_n),$$

и, значит,

$$f(x)=\ln 3+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{3^k}-1\right)\frac{(x-2)^k}{k}+o\left((x-2)^n\right). \quad \blacktriangle$$

С помощью формулы Тейлора можно вычислять пределы, приближенно находить значения функции и доказать некоторые неравенства.

2.33. Найти предел

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{tg^4 x}.$$

Δ Сохраняя в знаменателе и числителе члены до 4-го порядка относительно x, получаем

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1+x^2\right)^{1/2}\cos x}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1/2\,(-1/2)}{2}x^4+o\left(x^4\right)\right]\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right]}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{24}x^4+o\left(x^4\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}+\frac{o\left(x^4\right)}{x^4}\right)=\frac{1}{3},$$

так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{o\left(x^4\right)}{x^4}=0$. $\blacktriangle$

2.34. Вычислить приближенно $\sqrt{e}$ с точностью до 0,0001.

Δ Используя разложение по формуле Тейлора для e^x при $x=1/2$ и остаточный член в форме Лагранжа при $x=qx=\frac{1}{2}q$, получаем

$$\sqrt{e}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1}{2^3\cdot 3!}+\mathbf{K}+\frac{1}{2^n\cdot n!}+R_n,$$

где

$$R_n = \frac{e^{q/2}}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

Так как $0 < q < 1$, $2 < e < 3$, то $R_n < \dfrac{e^{1/2}}{2^{n+1}(n+1)!}$. Но $e^{1/2} < 2$. Тогда $R_n < 1\Big/\left(2^n(n+1)!\right)$. Надо подобрать число n слагаемых так, чтобы выполнялось неравенство $R_n < 0{,}0001$, т.е. $\dfrac{1}{2^n(n+1)} < 0{,}0001$. Решаем это неравенство подбором, последовательно полагая $n = 1, 2, \mathbf{K}$. При $n = 5$ имеем $R_5 < \dfrac{1}{32 \cdot 720} < 0{,}0001$.

Таким образом с точностью до $0{,}0001$.

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \frac{1}{2^4 \cdot 4!} + \frac{1}{2^5 \cdot 5!} = 1{,}6487. \quad \blacktriangle$$

2.35. Доказать неравенство

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, \text{ при } x > 0.$$

Δ По формуле Маклорена с остаточным членом $R_2(x)$ имеем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+x)^2}, \text{ где } 0 < x < x.$$

По той же формуле с остаточным членом $R_3(x)$ имеем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x_1)^3} > 0, \text{ где } 0 < x_1 < x.$$

Так как $\dfrac{x^2}{2(1+x)^2} > 0$ и $\dfrac{x^3}{3(1+x_1)^3} > 0$ при $x > 0$, то отсюда следует, что

$$x - x^2\big/2 < \ln(1+x) < x. \quad \blacktriangle$$

2.36. Разложить по формуле Маклорена до $o\left(x^{2n+1}\right)$ функции:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^4 - 3x^2 - 4}$; 2) $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$; 3) $f(x) = \cos^3 x$.

Отв. 1) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^{k+1} - \frac{1}{4^{k+1}}\right)\frac{x^{2k}}{5} + o\left(x^{2n+1}\right)$;

2) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}2^{4k-3}}{(2k)!}x^{2k} + o\left(x^{2n+1}\right)$;

3) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{3(-1)^k}{4(2k)!}\left(3^{2k-1} + 1\right)x^{2k} + o\left(x^{2n+1}\right)$.

2.37. Разложить по формуле Маклорена функции:

1) $\left(x^2-x\right)e^{-x}$; 2) $\dfrac{x^2+3e^x}{e^{2x}}$; 3) $\ln\dfrac{2-3x}{3+2x}$; 4) $\ln\left(2+x-x^2\right)$;

5) $x\sqrt{4-4x+x^2}$; 6)* $\ln\left(\dfrac{2x^2-5x+2}{2}\right)^{1/x}$; 7) $\dfrac{x^2+1}{2x-3}$;

8)* $\cos^6 x+\sin^6 x$; 9)* $x\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}$.

Отв. 1) $-x+\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{(-1)^k\cdot k}{(k-1)!}x^k+o\left(x^n\right)$; **2)** $-x+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(3+k(k-1)2^{k-2}\right)\dfrac{(-1)^k}{k!}x^k+o\left(x^n\right)$;

3) $\ln\dfrac{2}{3}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}2^{-k}}{k6^k}x^k+o\left(x^n\right)$; **4)** $\ln 2+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}2^{-k}}{k}x^k+o\left(x^n\right)$;

5) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k 2^{\frac{5}{3}-k}C_{2/3}^{k-1}x^k+o\left(x^n\right)$; **6)** $-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{2\mathrm{ch}((k+1)\ln 2)}{k+1}x^k+o\left(x^n\right)$;

7) $-\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{9}x-\dfrac{13}{12}\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k x^k+o\left(x^n\right)$; **8)** $1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^k 4^{2(k-1)}}{(2k)!}\left(7+4^{k-1}\right)x^{2k}+o\left(x^{2n+1}\right)$;

9) $1+\sum\limits_{k=1}^{n}C_{-1/2}^{k-1}\dfrac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}}x^{2k}+\sum\limits_{k=0}^{n}C_{-1/2}^{k-1}\dfrac{(-1)^k}{4^k}x^{2k+1}+o\left(x^{2n+1}\right)$.

2.38. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 функцию:

1) $1/x$, $x_0=2$; 2) $\ln(2x+1)$, $x_0=1/2$; 3) $\ln\sqrt[3]{7x-2}$, $x_0=1$;

4) $\dfrac{2x-1}{x-1}$, $x_0=2$; 5) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+10x+25}$, $x_0=-2$.

Отв. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{2^{k+1}}(x-2)^k+o\left((x-2)^n\right)$; **2)** $\ln 2+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^k+o\left(\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$;

3) $\dfrac{1}{3}\ln 5+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\dfrac{7}{5}\right)^k\dfrac{(x-1)^k}{3k}+o\left((x-1)^n\right)$; **4)** $3+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k(x-2)^k+o\left((x-2)^n\right)$;

5) $\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{(-1)^k(k-1)}{3^k}(x+2)^k+o\left((x+2)^n\right)$.

2.39. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-x}{\sin x-x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt[3]{1+3x+\frac{9}{2}x^2}}{x^3}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\mathrm{arctg}\,x}+\ln(1-x)-1}{2-\sqrt{4+x^3}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{\mathrm{sm}\,x-x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}+\ln(1-x)-1}{\arcsin x-x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\mathrm{tg}\,x}-\sqrt{1+2x}-x^2-x^3}{x-\mathrm{arctg}\,x}$.

Отв. 1) $-\frac{1}{2}$; **2)** -2; **3)** $-\frac{e}{2}$; **4)** $\frac{3}{2}$; **5)** 2; **6)** 0; **7)** -1; **8)** -3.

2.40. Вычислить приближенно с помощью формулы Тейлора:

1) $\sqrt[3]{127}$; 2) $\sqrt[4]{83}$; 3) $\sqrt[5]{250}$; 4) $\sqrt[3]{e}$; 5) $\sin 85^{\circ}$; 6) $\cos 72^{\circ}$; 7) $\ln 1{,}3$; 8) $\mathrm{arctg}\, 0{,}8$.

Отв. 1) $5{,}027$; **2)** $3{,}019$; **3)** $3{,}017$; **4)** $1{,}396$; **5)** $0{,}996$; **6)** $0{,}309$; **7)** $0{,}262$; **8)** $0{,}675$.

2.41. Доказать неравенства:

1) $\mathrm{tg}\, x > x + \frac{x^2}{3}$, $0 < x < \frac{p}{2}$; 2) $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$, $x > 0$.

3. Исследование функций с помощью производных

Исследование функций на монотонность и экстремумы

Монотонность и экстремумы функции. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума. Глобальный экстремум функции на отрезке

Пусть на отрезке $[a,b]$ определена непрерывная функция $f(x)$, имеющая в (a,b) конечную производную. Тогда:

1) для того, чтобы $f(x)$ была *неубывающей (невозрастающей)* на (a,b) необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \ge 0$ $\left(f'(x) \le 0\right)$ $\forall x \in (a,b)$.

2) для того, чтобы $f(x)$ была *возрастающей (убывающей)* на (a,b) необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$ $\forall x \in (a,b)$.

3.1. Найти интервалы возрастания функции:

а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e}, & x < e, \\ (\ln x)/x, & x \ge e \end{cases}$; б) $f(x) = \cos(p/x)$.

Δ а) Функция дифференцируема $\forall x$:

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x < e, \\ (1 - \ln x)/x^2, & x \ge e \end{cases}$$

Так как $f'(x) \le 0$, $\forall x$, то $f(x)$ является невозрастающей на $\boldsymbol{R}$. На $(-\infty, e)$ она постоянна, а на $(e, +\infty)$ строго убывает.

б) Функция $f(x) = \cos(p/x)$ определена и дифференцируема на $\forall x \ne 0$, причем

$$y' = \frac{p}{x^2} \sin \frac{p}{x}, \; x \ne 0.$$

Ясно, что знак y' совпадает со знаком функции $\sin(p/x)$. При этом

$$\sin \frac{p}{x} > 0, \text{ если } 2kp < \frac{p}{x} < (2k+1)p, \; k \in \boldsymbol{Z},$$

и

$$\sin \frac{p}{x} < 0, \text{ если } (2k+1)p < \frac{p}{x} < 2(k+1)p, \; k \in \boldsymbol{Z}.$$

Значит, функция возрастает в интервалах $\left(1/(2k+1), 1/(2k)\right)$ и убывает в интервалах $\left(1/(2k+2), 1/(2k+1)\right)$. ▲

3.2.* Доказать, что при $0 < x \le 1$ имеют место неравенства

$$x - x^3/3 < \operatorname{arctg} x < x - x^3/6\,.$$

Δ Докажем неравенство в правую сторону (в левую доказывается аналогично). Для функции $f(x) = \operatorname{arctg} x - x + x^3/6$ находим

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2(x^2-1)}{2(1+x^2)}\,.$$

Функция $f(x)$ непрерывна $\forall x \in \boldsymbol{R}$, и, в частности, на отрезке $[0,1]$, а внутри этого отрезка $f'(x) < 0$. Поэтому $f(x)$ убывает на интервале $(0,1)$. Значит, для $x \in (0,1]$ выполняется неравенство $f(x) < f(0) = 0$, или

$$\operatorname{arctg} x - x + x^3/6 < 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{arctg} x < x - x^3/6\,.\blacktriangle$$

3.3. Найти интервалы возрастания и убывания функций:

1) $f(x) = x^3 + 2x - 5$; 2) $f(x) = \ln\left(1 - x^2\right)$; 3) $f(x) = \cos x - x$;

4) $f(x) = x^3/3 + 1/x$; 5) $f(x) = \dfrac{2x}{\ln x}$; 6) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Отв. 1) Возрастает $\forall x \in \boldsymbol{R}$; **2)** возрастает в $(-1,0)$, убывает в $(0,1)$; **3)** убывает $\forall x \in \boldsymbol{R}$; **4)** возрастает в $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$; **5)** убывает в $(0,1)$ и $(1,\infty)$, возрастает в $(e,+\infty)$; **6)** убывает в $(-\infty,1)$ и $(1,\infty)$, возрастает в $(-1,1)$.

3.4. Доказать неравенства:

1) $x - x^3/3 < \sin x < x,\ x > 0$; 2) $\operatorname{tg} x > x + x^3/3,\ x \in (0, p/2)$;

3) $e^x \ge 1 + x,\ \forall x$; 4) $e^x > ex,\ x > 1$;

Определение локальных, нестрогого и строгого, экстремумов приведено выше. Дадим теперь *необходимые и достаточные условия экстремумов*.

Необходимые условия экстремума. Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует. Такие точки x_0, где $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует, называют *критическими*.

1. *Достаточные условия строгого экстремума (по первой производной).* Пусть функции $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, в некоторой $f(x)$ непрерывна. Тогда в точке x_0 – строгий максимум, если при переходе через эту точку слева направо производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус. Если же при таком переходе производная меняет знак с минуса на плюс, то в точке x_0 – строгий минимум.

2. *Достаточные условия строгого экстремума (по производным высших порядков).* Пусть функция $f(x)$ в точке x_0 имеет производные до порядка $n\,(n \in \boldsymbol{N})$ включительно и пусть в этой точке выполнены условия

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \mathbf{K} = f^{(n-1)}(x_0) = 0\,,\ f^{(n)}(x_0) \ne 0\,. \qquad (3.1)$$

Если n – четное число, то при $f^{(n)}(x_0) < 0$ в точке x_0 – максимум, а при

$f^{(n)}(x_0) > 0$ – минимум. Если же n – нечетное, то экстремум в точке x_0 – минимум.

В частности, если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то в точке x_0 – строгий максимум при $f'(x_0) < 0$ и строгий минимум при $f'(x_0) > 0$.

Пусть теперь функция $y = f(x)$ задана параметрически в виде

$$x = j(t),\ y = y(t),$$

где $j(t)$ и $y(t)$ в некотором промежутке изменения аргумента t имеют производные как первого, так и второго порядков, причем $j'(t) \neq 0$. Пусть, далее, при $t = t_0$ существует $y'(t_0)$.

Тогда:

а) если $y''(t_0) < 0$, то функция $y = f(x)$ при $x = x_0 = j(t_0)$ имеет максимум;

б) если $y''(t_0) > 0$, то функция $y = f(x)$ при $x = x_0 = j(t_0)$ имеет минимум;

в) если $y''(t_0) = 0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым.

Точки, в которых $j'(t) = 0$, требуют специального исследования.

3.5. Пользуясь первой производной, найти экстремумы функции

$$f(x) = x(x+1)^3(x-3)^2.$$

Δ Функция определена и дифференцируема на всей числовой оси, ее первая производная

$$f'(x) = 3(x+1)^2(x-3)(2x^2 - 3x + 1)$$

имеет следующие стационарные точки $\left(f'(x) = 0\right)$: $x_1 = -1$, $x_2 = (3 - \sqrt{17})/4$, $x_3 = (3 + \sqrt{17})/4$, $x_4 = 3$.

Составим теперь таблицу знаков производной на интервалах между этими точками:

Интервалы	$x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x_2 < x < x_3$	$x_3 < x < x_4$	$x > x_4$
$f'(x)$	–	–	+	–	+

Отсюда видно, что в точке $x_1 = -1$ экстремума нет, в точке x_2 – минимум, в точке x_3 – максимум, в точке x_4 – минимум.

3.6. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$.

Δ Функция дифференцируема $\forall x \in \boldsymbol{R}$. Так как уравнение $f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x$ имеет только один корень $x_0 = 0$, то экстремум может быть только в точке $x_0 = 0$. Далее последовательно находим

$$f''(x) = \operatorname{ch} x - \cos x \Rightarrow f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = \operatorname{sh} x + \sin x \Rightarrow f'''(0) = 0;$$

$$f^{(4)}(x) = \operatorname{ch} x + \cos x \Rightarrow f^{(4)}(x) = 2 > 0.$$

Таким образом, первой отличной от нуля оказалась положительная производная четвертого (четного) порядка. Значит, в точке $x_0 = 0$ – минимум и $f(0) = 2$. ▲

3.7. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x)=\begin{cases}-2x, & x<0,\\ 3x+5, & x\ge 0.\end{cases}$$

Δ Хотя производная

$$f'(x)=\begin{cases}-2, & x<0,\\ \ 3\ , & x>0,\end{cases}$$

существует во всех точках, кроме точки $x=0$, и меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку $x=0$, минимума здесь нет:

$$f(0)=5>f(x) \ \text{ при } -1<x<0.$$

Это объясняется нарушением непрерывности функции в точке $x=0$. ▲

3.8. Найти экстремумы функции $y=f(x)$, заданной параметрически:

$$\begin{aligned}x&=j\,(t)=t^5-5t^3-20t+7,\\ y&=y\,(t)=4t^3-3t^2-18t+3\end{aligned}\qquad(-2<t<2)$$

Δ Находим $j\,'(t)=5t^4-15t^2-20\ne 0$, $\forall t\in(-2,2)$. Далее, $y\,'(t)=12t^2-6t-18=0 \Rightarrow t_1=-1,\ t_2=3/2$. Эти точки – внутренние из $(-2,2)$. Находим теперь $y\,''(t)=24t-6 \Rightarrow y\,''(-1)=-30<0,\ y\,''\left(\dfrac{3}{2}\right)=30>0$. Следовательно, функция $y=f(x)$ при $t=-1$ (т. е. при $x=31$) имеет максимум $y=14$, а при $t=3/2$ (т. е. при $x=-1033/32$) – минимум $y=-17/25$. ▲

3.9. Найти экстремумы функций:

1) $f(x)=(x+1)e^{2x}$; 2) $f(x)=2x^3-15x^2+36x-14$; 3) $f(x)=\dfrac{(x+3)^3}{(x+1)^2}$;

4) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$; 5) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$; 6) $f(x)=3\sqrt[3]{x^2}-x^2$;

7) $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}$; 8) $f(x)=2\sin x+\cos 2x$; 9) $f(x)=\begin{cases}2x^2+3, & x\ne 0,\\ \ \ 4\ , & x=0\end{cases}$;

10) $f(x)=\sqrt{e^{x^2}-1}$; 11) $f(x)=x^4e^{-x^2}$;

Отв. **1)** $x=4/3$ – строгий минимум. **2)** $x=3$ – минимум. **3)** $x=3$ – строгий минимум. **4)** $x=4/3$ – минимум, $x=2$ – максимум. **5)** $x=7/5$ – минимум. **6)** $x=\pm1$ – максимумы, $x=0$ – минимум. **7)** $x=\pm1$ – минимумы, $x=0$ – максимум. **8)** $x=p/6$, $x=5p/6$ – максимумы, $x=p/2$, $x=3p/2$ – минимумы. **9)** $x=0$ – максимум. **10)** $x=0$ – минимум. **11)** $x=\pm\sqrt{2}$ – максимумы, $x=0$ – минимум.

3.10.* Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin^2\dfrac{1}{x}, & x\ne 0,\\ \ \ 0\ , & x=0\end{cases}$$

в точке $x = 0$ имеет нестрогий минимум.

3.11.* Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 + \cos\left(1/x\right)\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

имеет строгий минимум в точке $x = 0$, но ни в каком интервале $(-d, 0)$, $d > 0$, не является убывающей и ни в каком интервале $(0, d)$, $d > 0$, не является возрастающей.

3.12.* Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Доказать, что: 1) $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0$; 2) $f(x)$ в точке $x = 0$ не имеет экстремума.

3.13. Исследовать на экстремум функцию $y = f(x)$, заданную параметрически уравнениями:

1) $x = 1/t(t+1)$, $y = (t+1)^2/t$, $t > 0$; 2) $x = \ln\sin(t/2)$, $y = \ln\sin t$.

Отв. 1) $x = 1/2$ – минимум; **2)** $x = (-\ln 2)/2$ – максимум.

3.14. Исследовать на экстремум функцию $y = f(x)$, заданную неявно уравнениями:

1) $x^3 + y^3 = 3x^2$; 2) $x + y = xy(y - x)$, $|y| < |x|$;

3) $x^4 - y^4 = x^2 - 2y^2$, $y > |x|$; 4) $\left(x^2 - y^2\right)(x - y) = 1$, $y > |x|$.

Отв. 1) $x = 2$ – максимум, $x = 0$ – минимум. **2)** $x = -1$ – максимум, $x = 1$ – минимум. **3)** $x = 0$ – максимум, $x = \pm\sqrt{2}/2$ – максимумы. **4)** $x = -1/\sqrt[3]{32}$ – минимум.

3.15.* Исследовать на экстремумы в точке $x = x_0$ функцию $f(x) = (x - x_0)^{(n)} j(x)$, где $n \in N$, а функция $j(x)$ непрерывна при $x = x_0$ и $j(x_0) \neq 0$.

Отв. Минимум $f(x_0) = 0$ при $j(x_0) > 0$ и n – четное; максимум $f(x_0) = 0$ при $j(x_0) < 0$ и n – нечетное.

Наибольшее и наименьшее значения *(глобальный экстремум)* непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ достигается или в критических точках этой функции или на концах отрезка. Для определения глобального экстремума функции надо вычислить значения функции во всех критических точках на $[a, b]$, значения $f(a)$ и $f(b)$ и взять наибольшее (наименьшее) из полученных чисел.

Если функция задана и непрерывна в некотором промежутке и если этот промежуток не является отрезком, то среди значений функции $f(x)$ может и не быть ни наибольшего, ни наименьшего.

3.16. Найти глобальный экстремум функции $f(x)$ на указанных отрезках:

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$, $[-2, 5/2]$;

2. $f(x) = x^2 \ln x$, $[1, e]$;

3.* $f(x) = (x-3)^2 e^{|x|}$, $[-1, 4]$.

Δ 1. Производная $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ обращается в нуль в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, лежащих в $[-2, 5/2]$. В соответствии с правилом отыскания глобального экстремума находим значения

$$f(-2) = -3,\quad f(-1) = 8;\qquad f(2) = -19,\quad f\left(5/2\right) = -33/2.$$

Отсюда видно, что наибольшее значение функции равно $f(-1) = 8$, а наименьшее – $f(2) = -19$.

2. Производная $f'(x) = x(1 + 2\ln x)$ нигде не обращается в нуль внутри отрезка $[1, e]$, т. е. в $(1, e)$ нет критических точек этой функции. Поэтому остается только вычислить значения функции на концах отрезка: $f(1) = 0$, $f(e) = e^2$. Значит, $f(1) = 0$ – наименьшее, $f(e) = e^2$ – наибольшее значения функции $f(x)$ на $[1, e]$.

3. Так как $f(x) \ge 0$ и $f(3) = 0$, то наименьшее значение данной функции на $[-1, 4]$ равно нулю. Для определения наибольшего значения найдем локальные максимумы функции в интервале $(-1, 4)$. Находим производную

$$f'(x) = \begin{cases} (x-3)(5-x)e^{-x}, & x < 0, \\ (x-3)(x-1)e^{x}, & x > 0. \end{cases}$$

В точке $x = 0$ производная не существует. Критическими точками функции являются точки $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$, принадлежащие отрезку $[-1, 4]$. При переходе через точку $x = 0$ производная меняет знак с минуса на плюс, т. е. в этой точке минимум. В точке $x = 3$, как уже отмечено, функция принимает наименьшее значение. При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с плюса на минус, т. е. в этой точке у функции максимум. На концах отрезка $[-1, 4]$ получает значения $f(-1) = 16e$, $f(4) = e^4$, а в точке $x = 1$ – значение $f(1) = 4e$. Так как $e^4 > 16e > 4e$, то наибольшее значение данной функции на $[-1, 4]$ равно e^4. ▲

3.17.* Доказать неравенство $e^x > 1 + x$.

Δ Введем функцию $f(x) = e^x - 1 - x$ и исследуем ее на глобальный экстремум. Уравнение $f(x) = e^x - 1 = 0$ имеет единственное решение $x = 0$. В этой точке минимум, так как $f''(0) = e^x\big|_{x} = 1 > 0$. Этот минимум и есть наименьшее значение. Значит, $\forall x$ верно неравенство $f(x) > f(0) = 0$. Поэтому $e^x - 1 - x \ge 0 \Rightarrow e^x > 1 + x$. ▲

3.18.* Найти наибольший член последовательности

$$a_n = \frac{n^2}{n^3 + 200}, \;\; n \in \boldsymbol{N}.$$

Δ На промежутке $[1, +\infty]$ рассмотрим функцию $f(x) = x^2 / (x^3 + 200)$. Ее производная

$$f'(x) = \frac{x(400 - x^3)}{(x^3 + 200)^2}$$

положительна при $0 < x < \sqrt[3]{400}$ и отрицательна при $x > \sqrt[3]{400}$. Поэтому при $0 < x < \sqrt[3]{400}$ функция возрастает, а при $x > \sqrt[3]{400}$ – убывает. Из очевидного неравенства $7 < \sqrt[3]{400} < 8$ вытекает, что наибольшим членом последовательности a_n может быть либо член a_7, либо a_8. Так как $a_7 = 49/543 > a_8 = 8/89$, то наибольшим членом последовательности является член $a_7 = 49/543$. ▲

3.19. Найти наименьшее и наибольшее значения функции на указанных промежутках:

1) $f(x) = xe^{-x}$, $[0, +\infty)$.
2) $f(x) = \sqrt{(1 - x^2)(1 + 2x^2)}$, $[-1, 1]$.
3) $f(x) = \sin x \sin 2x$, $(-\infty, +\infty)$.
4) $f(x) = \arccos x^2$, $\left[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right]$.
5) $f(x) = x + \sqrt{x}$, $[0, 4]$.
6) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $[-2, 2]$.
7) $f(x) = \operatorname{arctg} x - (\ln 2)/2$, $[1/\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.
8) $f(x) = x - 2\ln x$, $[1, e]$.
9) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \dfrac{2}{x^2} & \text{при } -2 \le x < 0 \text{ и } 0 < x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$

Отв. 1) $f(1) = 1/e$ – наибольшее, $f(0) = 0$ – наименьшее. **2)** $f(\pm 1/2) = 3/\sqrt{8}$ – наибольшее, $f(\pm 1) = 0$ – наименьшее. **3)** $f(\arccos(1/\sqrt{3})) = 4/3\sqrt{3}$ – наибольшее, $f(\arccos(1/\sqrt{3}) = -4/3\sqrt{3}$ – наименьшее. **4)** $f(0) = p/2$ – наибольшее, $f(\pm\sqrt{2}/2) = p/3$ – наименьшее. **5)** $f(4) = 6$ – наибольшее, $f(0) = 0$ – наименьшее. **6)** $f(0) = 2$ – наибольшее, $f(\pm 2) = 0$ – наименьшее. **7)** $f(\pm 1/\sqrt{3}) = p/6 + 0{,}25\ln 3$ – наибольшее, $f(\sqrt{3}) = p/6 - 0{,}25\ln 3$ – наименьшее. **8)** $f(1) = 1$ – наибольшее, $f(2) = 2(1 - \ln 2)$ – наименьшее. **9)** Наибольшего значения нет, $f(0) = 1$ – наименьшее.

3.20. Найти номер n наибольшего члена последовательности a_n:

1. $a_n = \sqrt{n}/(n + 1985)$. 2. $a_n = \sqrt[3]{n}/(n + 19)$. 3. $a_n = n^{10}/2^n$.

Отв. 1) $n = 1985$. **2)** $n = 10$. **3)** $n = 14$.

3.21.* Доказать, что функция

$$f(x) = ax + \frac{b}{x}, \qquad a > 0,\ b > 0, x > 0,$$

достигает наименьшего значения при $x = \sqrt{b/a}$.

3.22.* Доказать неравенство

$$x^a \geq 1 + a \ln x, \qquad x > 0,\ a > 0.$$

Понятие глобального экстремума широко применяется при решении прикладных задач геометрического и физического содержания.

3.23. Определить размеры закрытой коробки объемом V с квадратным основанием, на изготовление которой расходуется наименьшее количество материала.

Δ Пусть x – сторона основания коробки, h – высота коробки, S – ее полная поверхность. Тогда

$$S = 2x^2 + 4xh, \qquad V = x^2 h,\ x > 0.$$

Отсюда

$$S(x) = 2x^2 + \frac{4J}{x} \Rightarrow S'(x) = 4\left(x - \frac{J}{x^2}\right).$$

Уравнение $S'(x) = 0$ имеет единственное решение $x_0 = \sqrt[3]{V}$, причем при переходе через точку x_0 функция $S'(x_0)$ меняет знак с минуса на плюс, т. е. x_0 – точка минимума функции $S(x)$. Тогда число $S(x_0)$ является наименьшим значением $S(x)$ при $x > 0$. Из равенства $V = x^2 h$ вытекает, что при $x = \sqrt[3]{V}$ высота коробки $h = \sqrt[3]{V}$. Следовательно, коробка должна быть кубом с ребром $\sqrt[3]{V}$. ▲

Замечание. Часто соображения физического или геометрического характера освобождают от необходимости прибегать к дифференциальным методам исследования вопроса о наличии наибольшего или наименьшего значения функции в исследуемой точке.

3.24. Сила действия кругового электрического тока на небольшой магнит, ось которого расположена на перпендикуляре к плоскости круга и проходит через его центр, выражается формулой

$$F = \frac{Cx}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}},$$

где a – радиус круга, x – расстояние от центра круга до магнита, $0 < x < \infty$, $C - \mathrm{const}$. При каком x величина F будет наибольшей?

Δ Производная

$$F'(x) = C\frac{a^2 - 2x^2}{\left(a^2 + x^2\right)^{5/2}}$$

имеет единственный корень $x = a/\sqrt{2}$. Он и дает решение задачи. ▲

3.25. Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного симметрично в сектор круга радиусом a с центральным углом $2a$. **Отв.** $a^2 \mathrm{tg}(a/2)$.

3.26. Найти наибольшую поверхность цилиндра, вписанного в шар радиусом a.

Отв. $2p\ a^2$.

3.27. Найти наименьший объем конуса, описанного около полушара радиусом a. **Отв.** $\sqrt{3}p\ a^3/2$.

3.28. Найти наибольший объем конуса с данной образующей l.

Отв. $2p\ l^3/9\sqrt{3}$.

3.29. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каким должны быть его стороны, чтобы объем тела, полученного от вращения этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим? **Отв.** Основание равно $p/2$.

3.30.* Точка движется по плоскости со скоростью V_1, а попав на ось X, может двигаться со скоростью $V_2 > V_1$. Найти скорейший путь из точки $A(0, a)$ в точку $B(b, 0)$.

Отв. Если $x = \dfrac{an_1}{\sqrt{V_2^2 - V_1^2}} < b$, то ломаная ACB, где $C = (x, 0)$; если $x > b$, то скорейший путь – отрезок AB.

3.31.* Из точек A и A_1 по прямым AO и A_1O по направлению к точке O выходят одновременно два тела со скоростями V и V_1. При этом $AO = l$, $A_1O = l_1$ и (AO ^ A_1O) = a. Когда расстояние между телами наименьшее?

Отв. $t\left(V^2 + V_1^2 - 2VV_1\cos a\right) = lV_1 + l_1V_1 - \left(l_1V + lV_1\right)\cos a$.

3.32. Из какой точки оси X отрезок на оси Y между точками $(0, h)$ и $(0, H)$ виден под наибольшим углом $(H > h > 0)$? **Отв.** $\left(\sqrt{Hh}, 0\right)$.

3.33.* К реке шириной a под прямым углом построен канал шириной b. Найти наибольшую длину бревна, которое можно провести из реки в этот канал.

Отв. $\left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}$.

3.34.* Завод A нужно соединить с прямолинейной железной дорогой, на которой расположен поселок B. Расстояние AC от завода до железной дороги равно a, а расстояние BC по железной дороге равно b. Стоимость перевозок грузов по шоссе в k раз $(k > 1)$ выше стоимости перевозок по железной дороге. В какую точку D отрезка BC нужно провести шоссе от завода, чтобы стоимость перевозок грузов от завода A к поселку B была наименьшей?

Отв. $BD = b - a/\sqrt{k^2 - 1}$ при $b > a/\sqrt{k^2 - 1}$; $BD = 0$ при $b \le a/\sqrt{k^2 - 1}$.

3.35. Наблюдатель находится напротив картины, закрепленной на вертикальной стене. Нижний край картины расположен выше уровня глаз наблюдателя на a, верхний край – на b. На каком расстоянии от стены должен стоять наблюдатель, чтобы угол, под которым он видит картину, оказался наибольшим?

Отв. $\sqrt{ab}$.

Исследование функций на выпуклость и точки перегиба

Выпуклость функции. Точки перегиба функции. Необходимое и достаточные условия перегиба

Функция $f(x)$ называется *выпуклой вниз (выпуклой вверх) на интервале* (a,b),

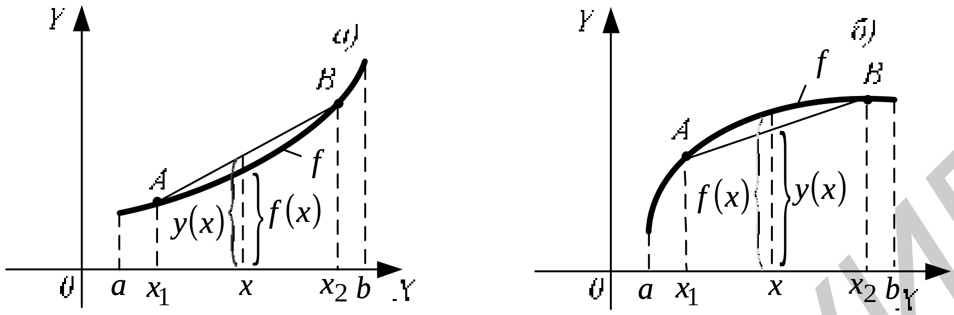


Рис. 3.1

если для любых x и x_1 из (a,b), $a \le x_1 < x_2 \le b$, хорда AB лежит не ниже (не выше) графика этой функции (рис. 3.1,а (рис. 3.1,б)), т. е. если

$$f(x) \le y(x) \quad \big(f(x) \ge y(x)\big), \ \forall x \in [x_1, x_2] \subset (a,b).$$

Достаточное условие выпуклости. Если $f(x)$ – дважды дифференцируемая на интервале (a,b), то на (a,b) функция f выпукла вниз. Если же $f''(x) < 0$, $\forall x \in (a,b)$, то на (a,b) функция $f(x)$ выпукла вверх.

Пусть $f(x)$ определена в некоторой d – окрестности точки x_0, непрерывна в этой точке и имеет в ней конечную или бесконечную производную. Тогда, если $f(x)$ при переходе через точку x_0 меняет направление выпуклости, то точка x_0 называется *точкой перегиба функции* $f(x)$. В этом случае точку $\big(x_0, f(x_0)\big)$ называют *точкой перегиба графика функции* $f(x)$.

Если $\big(x_0, f(x_0)\big)$ – точка перегиба графика функции $f(x)$, то график функции $f(x)$ переходит с одной стороны касательной к нему в этой точке, на другую ее сторону (рис. 3.2).

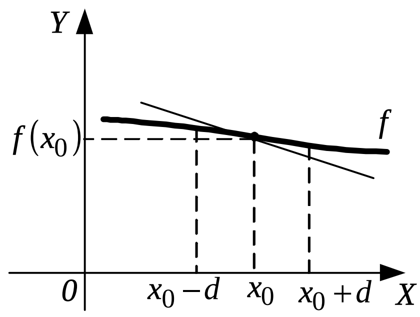


Рис. 3.2

Необходимые условия существования точки перегиба. Если x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$, то либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует.

Отсюда следует, что точки перегиба функции следует искать среди критических точек второй производной.

1-*е достаточное условие существования точки перегиба* (с использованием производной). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и дважды дифференцируема в некоторой ее окрестности, за исключением, быть может, самой точки x_0. Тогда x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$, если при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак.

2-е достаточное условие точки перегиба (с использованием высших производных). Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до порядка

$n > 2$ включительно и пусть

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда если n - нечетно, то x_0 - точка перегиба; если же n - четно, то x_0 не является точкой перегиба.

В частности, если

$$f''(x) = 0, \quad f'''(x_0) \neq 0, \tag{3.2}$$

то x_0 - точка перегиба функции $f(x)$.

3.36. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции:

1. $f(x) = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$. 2. $f(x) = x^2 \Big/ (x-1)^3$. 3. $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$.

Δ 1. Так как $f''(x) = 12(x^2 - 1)$, то $f''(x) > 0$ при $|x| > 1$ и $f''(x) < 0$ при $|x| < 1$. Следовательно, интервалы $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ являются интервалами выпуклости вниз, а $(-1, 1)$ - интервал выпуклости вверх. Поскольку при переходе через точку $x = \pm 1$ функция меняет направление выпуклости, то $x = \pm 1$ - точки перегиба функции.

2. Функция дифференцируема во всех точках $x \in \boldsymbol{R}$, кроме точки $x = 1$, где она не определена. Находим

$$f'(x) = -\frac{x(x+2)}{(x-1)^4},$$

$$f''(x) = 2\frac{x^2 + 4x + 1}{(x-4)^5} = 2\frac{(x - (-2-\sqrt{3}))(x - (-2+\sqrt{3}))}{(x-4)^5}.$$

В точках $x = -2 \pm \sqrt{3}$ $f''(x) = 0$, но $f''(1)$ не существует. На интервалах $(-\infty, -2-\sqrt{3})$, $(-2-\sqrt{3}, -2-\sqrt{3})$, $(-2+\sqrt{3}, 1)$, $(1, +\infty)$ $f''(x)$ сохраняет знак. Значит, каждый из этих интервалов – интервал выпуклости. Так как на первом и третьем интервалах $f''(x) < 0$, то здесь $f(x)$ выпукла вверх; на втором и четвертом интервалах $f''(x) > 0$, т.е. это интервалы выпуклости вниз. При переходе через точки $x = -2 \pm \sqrt{3}$, $x = 1$ функция меняет направление выпуклости. Но при $x = 1$ функция не определена, поэтому $x = 1$ не является точкой перегиба. Итак, $x = -2 \pm \sqrt{3}$ - точки перегиба функции.

3. Функция определена на $(0, +\infty)$ и дифференцируема в каждой ее точке, кроме точки $x = 1$. Находим

$$f''(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5-x}{x^3\sqrt{x}}, \ x \in (0,1); \quad f''(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{(x-5)}{x^3\sqrt{x}}, \ x > 1.$$

Отсюда $f''(x) = 0$ при $x = 5$ и $f''(x)$ не существует в точке $x = 1$. Далее,

$$f''(x) > 0 \text{ при } x \in (0,1); \ f''(x) < 0 \text{ при } x \in (1,5); \ f''(x) > 0 \text{ при } x > 5.$$

Значит, на интервалах $(0, 1)$, $(5, +\infty)$ функция выпукла вниз, а на $(1, 5)$ - вверх. При переходе через точки $x = 1$ и $x = 5$ вторая производная меняет знак. Следовательно, $x = 5$ - точка перегиба. Точка $x = 1$ не является точкой перегиба, ибо в ней у функции нет ни конечной, ни бесконечной производной. ▲

3.37. Исследовать поведение функции $f(x)=x^2-4x-(x-2)\ln(x-1)$ в точке $x_0=2$.

Δ Последовательно находим:

$$f'(2)=\left(2x-4-\ln(x-1)-\frac{x-2}{x-1}\right)\Bigg|_{x=2}=0;$$

$$f''(2)=\left(2-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)\Bigg|_{x=2}=0;$$

$$f'''(2)=\left(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}\right)\Bigg|_{x=2}=3\neq 0.$$

Согласно (3.2) заключаем, что $x=2$ - точка перегиба функции. ▲

3.38. Найти точки перегиба графика функции $y=f(x)$, заданной параметрически:

$$x=1+\operatorname{ctg} t,\ y=\frac{\cos 2t}{\sin t},\ 0<t<p. \tag{3.3}$$

Δ Функции $x(t)$ и $y(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы в $(0,p)$, причем $x_t'=-\frac{1}{\sin^2 t}<0$. Поэтому соотношения (3.3) определяют дважды дифференцируемую функцию $y=f(x)$. Находим

$$y_x'=\frac{y_t'}{x_t'},\quad y_{xx}''=\frac{(y_x')_t'}{x_t'}.$$

Но

$$y_t'=-\frac{\cos t(2\sin^2 t+1)}{\sin^2 t}\Rightarrow y_x'=\cos t(2\sin^2 t+1)\Rightarrow (y_x')_t'=3\cos 2t\sin t\Rightarrow y_{xx}''=-3\sin^3 t\cos 2t.$$

Далее,

$$y_{xx}''=0\Rightarrow t_1=\frac{p}{4},\ t_2=\frac{3p}{4}.$$

При переходе через эти точки y_{xx}'' меняет знак. Значит, при этих значениях t график функции имеет перегиб. Этим значениям t_1 и t_2 соответствуют точки $(2,0)$ и $(0,0)$ графика функции, в которых он имеет перегиб. ▲

3.39. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

1) $f(x)=x^4+x^3-18x^2+24x-12$. 2) $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+12$. 3) $f(x)=\frac{x}{(1+x^2)}$.

4) $f(x)=x+x^{5/3}$. 5) $f(x)=4\sqrt{(x-1)^5}+20\sqrt{(x-1)^3}$, $x\geq 1$.

6) $f(x)=\frac{(\ln^2 x)}{x}$. 7. $f(x)=x\sin\ln x$. 8) $f(x)=2-\left|x^5-1\right|$.

Отв. 1) На интервалах $(-\infty,-2)$ и $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ выпукла вниз, в интервале $\left(-2,\frac{3}{2}\right)$ выпукла вверх, $x=-2$ и $x=\frac{3}{2}$ - точки перегиба. **2)** На интервалах $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$ и $(1,+\infty)$ выпукла вниз, в $\left(\frac{1}{3},1\right)$ - вверх; $x=\frac{1}{3}$ и $x=1$ - точки перегиба. **3)** В интервалах $\left(-\sqrt{3},0\right)$ и $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ - выпукла вниз, в интервалах $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ и $(0,3)$ -

вверх; $x=0$ и $x=\pm\sqrt{3}$ - точки перегиба. **4)** При $x<0$ выпукла вверх, а при $x>0$ - вниз; $x=0$ - точка перегиба. **5)** Кривая везде выпукла вниз. **6)** На интервалах $\left(0, e^{(\sqrt{3}-5)/2}\right)$ и $\left(e^{(\sqrt{3}+5)/2}, +\infty\right)$ выпукла вниз, в интервале $\left(e^{(\sqrt{3}-5)/2}, e^{(\sqrt{3}+5)/2}\right)$ выпукла вверх; $e^{(\sqrt{3}\pm5)/2}$ точки перегиба. **7)** В интервалах $\left(e^{2kp-3p/4}, e^{2kp+p/4}\right)$, $k\in \mathbf{Z}$, выпукла вниз, в интервалах $\left(e^{2kp+p/4}, e^{2kp+5p/4}\right)$ - вверх; $x_k=e^{kp+p/4}$, $k\in\mathbf{Z}$, - точки перегиба. **8)** В интервалах $(-\infty,0)$ и $(1,+\infty)$ выпукла вверх, в $(0,1)$ - вниз; $x=0$ - точка перегиба, $x=1$ - точка излома (угловая точка).

3.40. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты a, b, c, чтобы функция
$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ имела точки перегиба? **Отв.** $3b^2-8ac>0$.

3.41. При каком a функция $f(x)=x^4+ax^3+3x^2/2+1$ будет выпуклой вниз на всей числовой оси? **Отв.** $|a|\le 2$.

3.42. Показать, что функция $f(x)=(x+1)/(x^2+1)$ имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

3.43. Показать, что точки перегиба функции $f(x)=x\sin x$ лежат на кривой $y^2\left(4+x^2\right)=4x^2$.

3.44. Найти точки перегиба графика функции $y=f(x)$, заданной параметрически уравнениями.

1) $x=te^t$, $y=te^{-t}$, $t>0$. **Отв.** $\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}\right)$.

2) $x=\dfrac{t^2}{t-1}$, $y=\dfrac{t^3}{t-1}$, $t>2$. **Отв.** $\left(9/2, 27/2\right)$.

3) $x=\dfrac{2t^2+2}{t}$, $y=\dfrac{t^3+3t+1}{t^2}$, $0<t<1$. **Отв.** $\left(5, 21/2\right)$.

4) $x=\dfrac{t^2-2t-5}{t^2+10t+25}$, $y=\dfrac{t^2-4t+5}{t^2+4t-5}$, $t>1$. **Отв.** $\left(1/10, 1/4\right)$.

Асимптоты функции. Построение графиков функций

Вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты. Общая схема построения графика функции. Построение графиков

Прямая L называется *асимптотой* для кривой $y=f(x)$, если расстояние от точки M, лежащей на кривой, до этой прямой стремится к нулю при движении точки M вдоль какой-нибудь ветви кривой в бесконечность (рис.3.3).

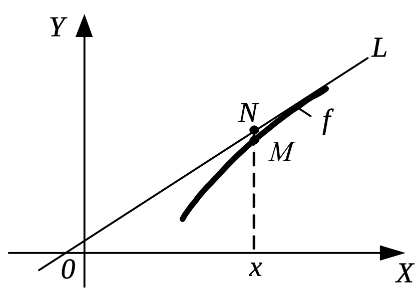


Рис. 3.3

Если $\lim\limits_{x\to x_0\pm0} f(x)=0$, то прямая $x=x_0$ называется *вертикальной асимптотой*.

Если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = A$, то прямая $y = A$ называется *горизонтальной асимптотой* (правой при $x\to+\infty$ и левой при $x\to-\infty$).

Если существуют пределы

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x};\quad b_1 = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x),$$

то прямая $y = k_1x + b_1$ называется *правой наклонной асимптотой*.

Если же существуют пределы

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x};\quad b_2 = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_1x),$$

то прямая $y = k_2x + b_2$ называется *левой наклонной асимптотой*. Очевидно, что горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной асимптоты при $k = 0$.

3.45. Найти все асимптоты графика функции.

1. $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-1}$, 2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}$.

Δ 1. Так как $\lim\limits_{x\to 1\mp 0} f(x) = \pm\infty$, то прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой функции $f(x)$.

Горизонтальных асимптот функция не имеет, так как $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Ищем наклонные асимптоты $y = kx + b$. Находим

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x}{x^2} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x-1}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x-1} = -1.$$

Итак, $y = x-1$ - наклонная асимптота функции. С учетом вышеизложенного строим эскиз графика (рис. 3.4).

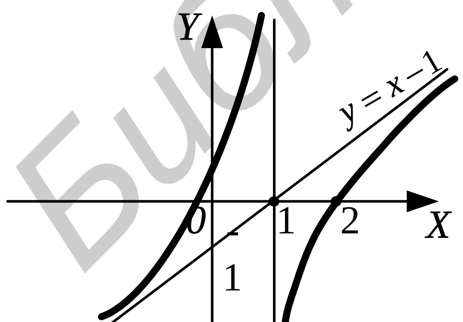


Рис. 3.4

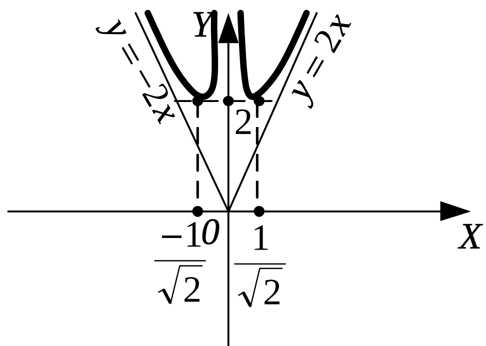


Рис. 3.5

2. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|} = +\infty$,

то прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой функции.
Горизонтальных асимптот функция не имеет, ибо очевидно, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$.

Ищем наклонные асимптоты $y=kx+b$. Имеем

$$k_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^4+1}}{-x^2}=-2.$$

Тогда

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4x^4+1}+2x^2}{x}=0, \quad \text{(почему?)}$$

Значит, $y=-2x$ - наклонная асимптота при $x\to-\infty$. Отметим, что $f(x)>-2x$, т. е. при $x\to-\infty$ точки графика функции $f(x)$ приближаются к асимптоте $y=-2x$ сверху.

Повторив эти же рассуждения при $x\to+\infty$, получим: $y=2x$ - наклонная асимптота графика при $x\to+\infty$, причем $f(x)>2x$, т. е. точки графика при $x\to+\infty$ приближаются к асимптоте сверху.

Исследуем теперь нашу функцию на монотонность. Так как

$$f(x)=\frac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}=\sqrt{4x^2+\frac{1}{x^2}}\ge\sqrt{2\sqrt{4x^2\cdot\frac{1}{x^2}}}=2$$

(известное неравенство Коши), причем знак равенства имеет место лишь при $4x^4=1/x^2$, т. е. при $x=\pm1/\sqrt{2}$, значение функции $f(1/\sqrt{2})=2$ является наименьшим на $(0,+\infty)$. На интервале $(0,1/\sqrt{2})$ $f(x)$ строго убывает, т. к. если $0<x_1<x_2<1/\sqrt{2}$, то

$$f^2(x_2)-f^2(x_1)=4(x_2^2-x_1^2)-\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2x_2^2}=(x_2^2-x_1^2)\frac{4x_1^2x_2^2-1}{x_1^2x_2^2}<0.$$

Точно так же доказывается, что на интервале $(1/\sqrt{2},+\infty)$ функция строго возрастает. Функция четная. Ее график изображен на рис. 3.5. ▲

Резюмируя вышеизложенное, рекомендуется следующая *схема построения графика функции*:
1) находим область определения функции;
2) исследуем функцию на периодичность, четность, нечетность;
3) исследуем функцию на монотонность и экстремумы;
4) находим промежутки выпуклости и точки перегиба;
5) отыскиваем асимптоты графика функции;
6) для уточнения хода графика функции находим точки пересечения его с осями координат;
7) по этим данным строим график функции.

Реализуем эту схему на следующем примере.

3.46. Построить график функции $f(x)=\sqrt[3]{(x+3)x^2}$.

Δ 1. Функция определена $\forall x\in\boldsymbol{R}$.

2. Функция ни четна, ни нечетна и непериодична.

3. Находим $f'(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+3)^2}}$. Отсюда критическими точками функции

являются $x=-2$ (в ней производная обращается в нуль) и точки $x_2=0$, $x_3=-3$ (в них производная бесконечна). Эти точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty,-3)$, $(-3,-2)$, $(-2,0)$ и $(0,+\infty)$. Исследуем знак производной $f'(x)$ на этих промежутках. Результаты исследования заносим в таблицу (знак k означает возрастание, а знак (- убывание функции):

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	$+\infty$	+	0	−	∞	+
$f(x)$	k	0	k	max $\sqrt[3]{3}$	(	min 0	k

4. Находим $f''(x)=-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^5}}$. Точками возможного перегиба являются $x_4=0$ и $x_5=-3$. Они разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty,-3)$, $(-3,0)$ и $(0,+\infty)$. Исследуем знак $f''(x)$ на этих промежутках. Результаты исследования заносим в таблицу.

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	+	∞	-	∞	−
$f(x)$	Выпукла вниз	Перегиб 0	Выпукла вверх	Перегиба нет	Выпукла вверх

5. Вертикальных асимптот нет. Для наклонной асимптоты $y=kx+b$ находим коэффициенты: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{(x+3)x^3}}{x}=1$; $b=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{(x+3)x^2}-x)=1$.
Итак, $y=x+1$ - наклонная асимптота.

6. Точки $(-3,0)$ и $(0,0)$ являются точками пересечения графика функции с осями координат: $(-3,0)$ - с осью X, $(0,0)$ - с осями X и Y.

7. По этим данным строим график искомой функции (рис. 3.6):

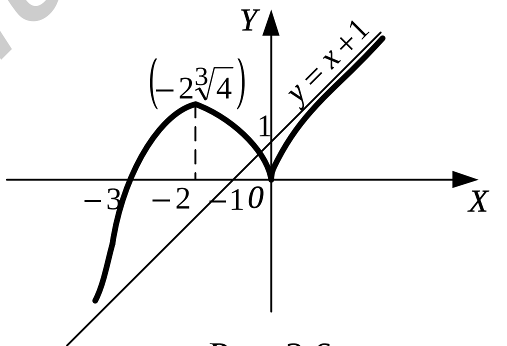


Рис. 3.6

3.47. Построить график функции:

1. $y=-\dfrac{1}{16}(x+1)^2(x-3)^2$. 2. $y=\dfrac{3\sqrt[3]{6(x-1)^2}}{2(x^2+6x+9)}$. 3. $y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)}$.

4. $y=\dfrac{-8-x^2}{\sqrt{x^2-4}}$.　　5. $y=\dfrac{x^3-27x+54}{x^3}$.　　6. $y=\ln\dfrac{x+6}{x}-1$.

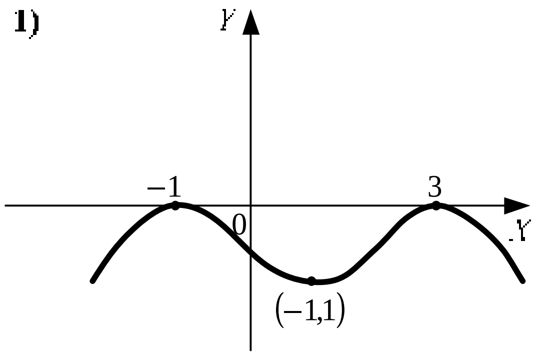
7. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x+2)^2}$.　　8. $y=\sqrt{(\sin x+\cos x)/\sqrt{2}}$.　　9. $y=16x^3+12x^2-5$.

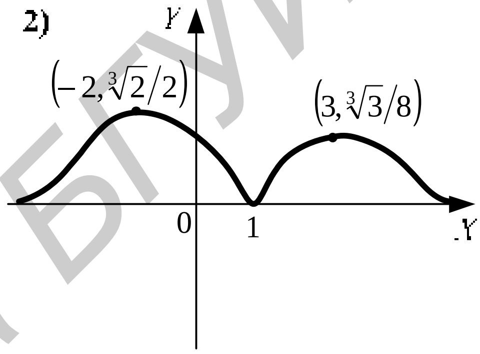
10. $y=3\sqrt[3]{(x+4)^2}-2x-8$.　　11. $y=\dfrac{10x+10}{x^2+2x+2}$.　　12. $y=\dfrac{9-10x^2}{\sqrt{4x^2-1}}$.

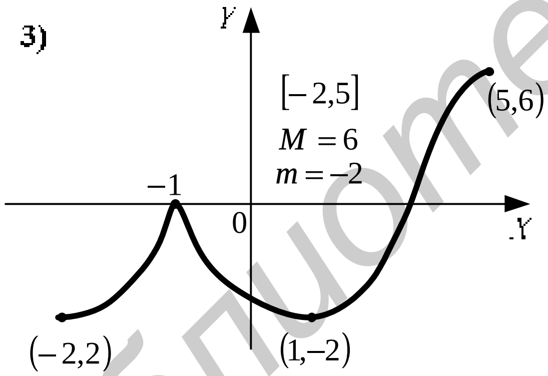
13. $y=\dfrac{x^3-4}{x^2}$;　　14. $y=2\ln\dfrac{x-1}{x}+1$.　　15. $y=\sqrt[3]{x(x-1)^2}$.

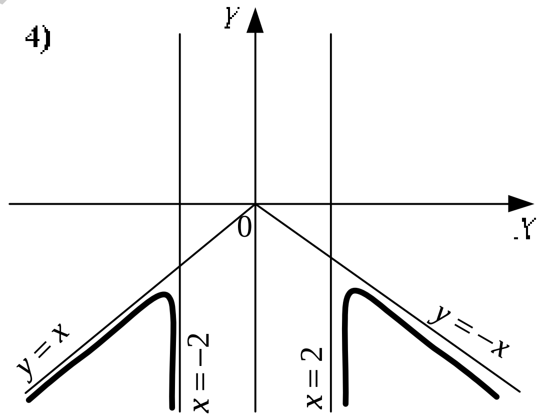
16. $y=\ln(\sqrt{2}\cos x)$.

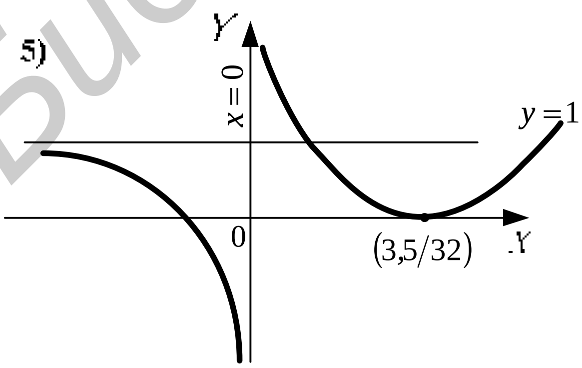
В качестве **ответов** приводим эскизы графиков этих функций (M - наибольшее значение функции, m - наименьшее).

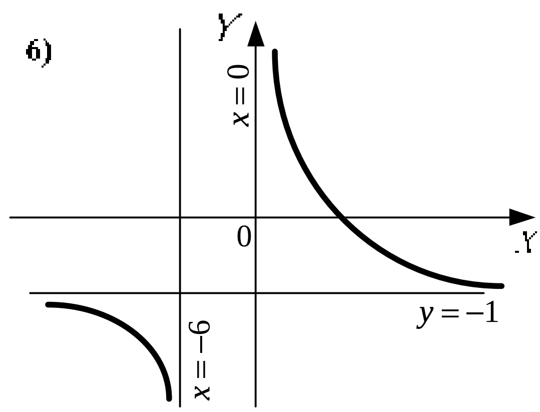
1)


2)


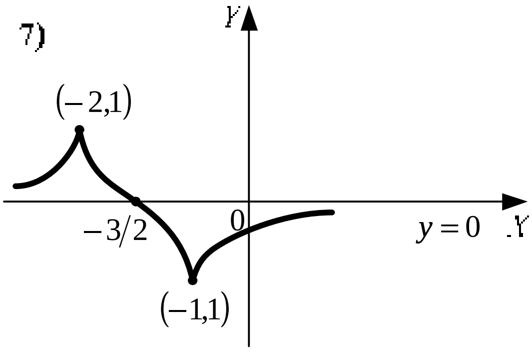
3)


4)


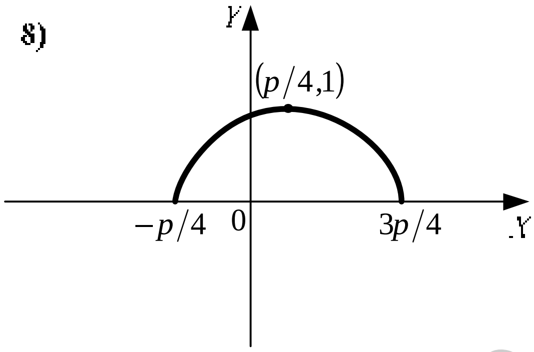
5)


6)


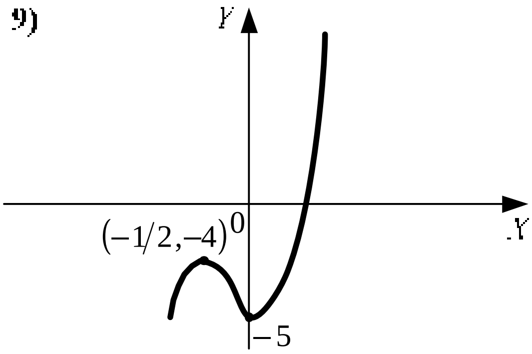
7)



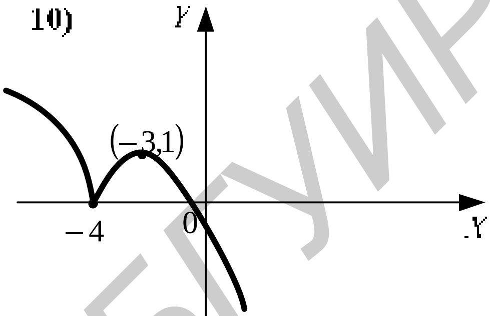
8)



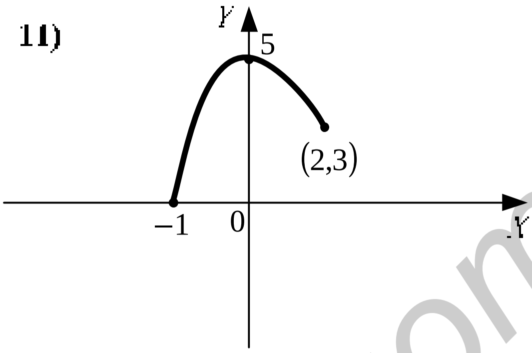
9)



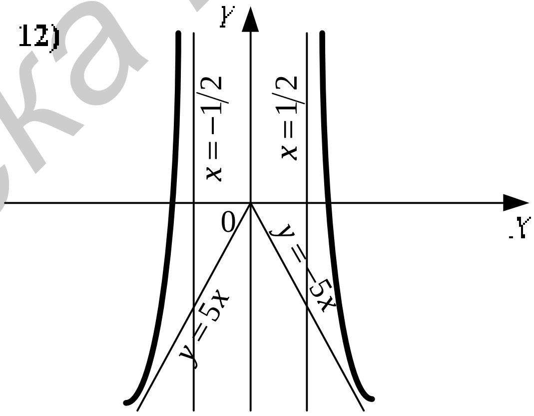
10)



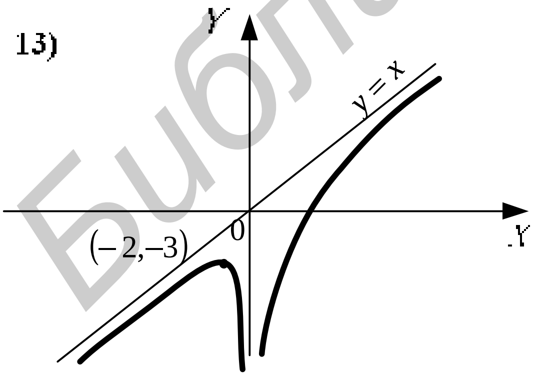
11)



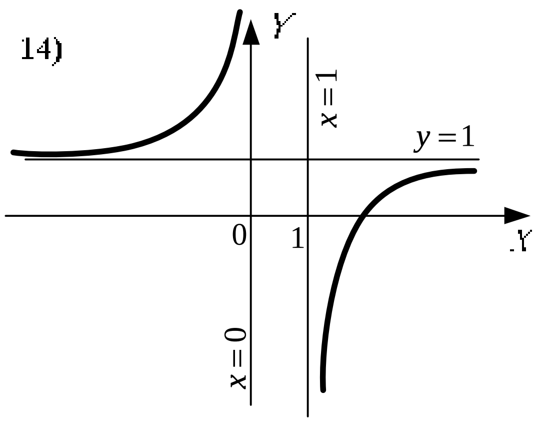
12)

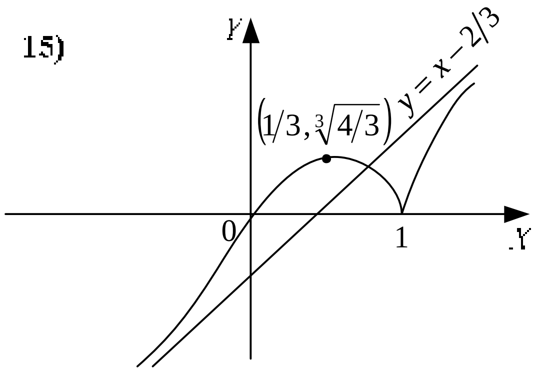


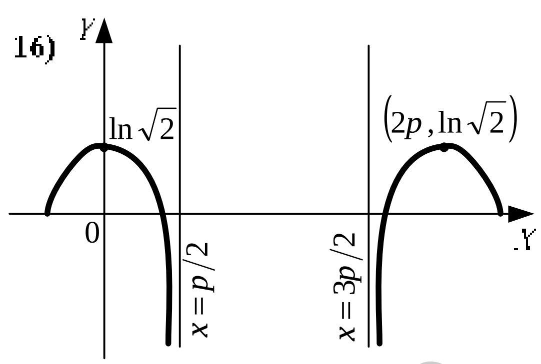
13)



14)







4. Векторные и комплексные функции действительной переменной. Элементы дифференциальной геометрии

Вектор-функция и ее годограф. Предел и непрерывность вектор-функции. Дифференцирование вектор-функции. Касательная и нормальная плоскость к кривой. Кривые на плоскости и в пространстве. Кривизна и кручение кривой. Комплексные функции действительной переменной. Формулы Френе

Пусть $T \subset \boldsymbol{R}$ – некоторое подмножество действительных чисел. Если каждому $t \in T$ поставлен в соответствие вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$ трехмерного пространства, то говорят, что на множестве T определена *вектор-функция*, или, что то же самое, *векторная функция скалярного аргумента*.

Если в пространстве R^3 фиксирована декартова система координат XYZ, то задание функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in T$, равносильно заданию трех скалярных функций $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, которые называются *координатными функциями* для $\vec{r}(t)$, т.е.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in T. \tag{4.1}$$

Если $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - координатные орты, то

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \tag{4.2}$$

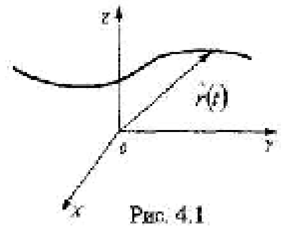


Рис. 4.1

Если начало всех векторов $\vec{r}(t)$ совпадает с началом координат, то эти векторы называются *радиусами-векторами*, а множество их концов – *годографом векторной функции* $\vec{r}(t)$, $t \in T$. Физический смысл годографа вектор-функции $\vec{r}(t)$ состоит в том, что он является траекторией движущейся точки $M = M(t)$ (рис. 4.1), совпадающей с концом радиус-вектора $\vec{r}(t)$, если считать, что параметр t есть время.

Если при всех $t \in T$ имеем $z(t) = 0$, то вектор-функция $\vec{r}(t)$ называется *двумерной* или *плоской* (расположенной в плоскости XY). В этом случае

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j},\ t \in T. \tag{4.3}$$

Вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ называют *пределом* функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0. Тогда $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$ или $\vec{r}(t) \to 0$ при $t \to t_0$, если

$$\lim_{t \to 0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = \lim_{t \to t_0} \sqrt{(x(t) - a_1)^2 + (y(t) - a_2)^2 + (z(t) - a_3)^2} = 0. \tag{4.4}$$

Выполнение условия (4.4) равносильно выполнению равенств

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = a_1, \qquad \lim_{t\to t_0} y(t) = a_2, \qquad \lim_{t\to t_0} z(t) = a_3. \tag{4.5}$$

Свойства пределов вектор-функций:

1°. $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{t\to t_0} |\vec{r}(t)| = |\vec{a}|$,

2°. Если $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$, $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = A$, где $f(t)$ - скалярная функция, то $\lim\limits_{t\to t_0} (f(t)\cdot\vec{r}(t)) = A\cdot\vec{a}$,

3°. Если $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) = \vec{a}_1$, $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t) = \vec{a}_2$, то

$$\lim_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t)) = \lim_{t\to t_0}\vec{r}_1(t) + \lim_{t\to t_0}\vec{r}_2(t) = \vec{a}_1 + \vec{a}_2,$$

$$\lim_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t)) = \left(\lim_{t\to t_0}\vec{r}_1(t), \lim_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)\right) = (\vec{a}_1,\vec{a}_2),$$

$$\lim_{t\to t_0}[\vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t)] = \left[\lim_{t\to t_0}\vec{r}_1(t), \lim_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)\right] = [\vec{a}_1,\vec{a}_2].$$

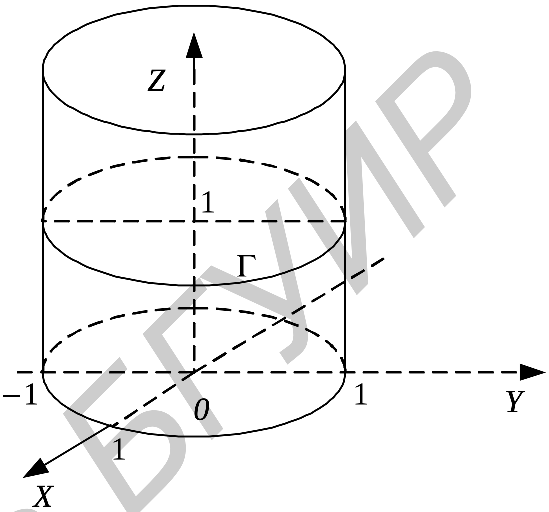


Рис. 4.2

4.1. Построить годограф *Г* вектор-функции

$x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$, $t \in \boldsymbol{R}$.

Δ Имеем

$x^2 + y^2 = 1$ - цилиндр радиусом 1 в пространстве, $z = 1$ - плоскость, параллельная плоскости XY, проведенная на высоте $z = 1$ (рис. 4.2) ▲

4.2. Найти предел вектора-функции

$\vec{r}(t) = \left(\dfrac{1-t}{1+t}, \dfrac{\sin 2t}{t}, -\dfrac{\ln(1-t)}{t}\right)$ при $t = 0$

Δ Имеем

$$\lim_{t\to 0}\vec{r}(t) = \left(\lim_{t\to 0}\frac{1-t}{1+t}, \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{t}, \lim_{t\to 0}\left(-\frac{\ln(1-t)}{t}\right)\right) = (1,2,1). \blacktriangle$$

Вектор-функция $\vec{r}(t)$ называется *непрерывной* при $t = t_0$, если

(4.6)

Отсюда и из (4.5) следует, что *вектор-функция непрерывна тогда и только тогда, когда непрерывными являются ее координатные функции* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Из определения (4.6) непрерывности вектор-функций следует, что сумма, скалярное и векторное произведение непрерывных вектор-функций является непрерывной вектор-функцией.

Прямая M_0M, проходящая через конец $M_0 = M(t_0)$ вектора $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ в направлении вектора $\Delta\vec{r}$ (в направлении движения по годографу) (рис. 4.3) называется *секущей годографа*, а ее предельное положение при $\Delta t \to 0$ – касательной к годографу в точке M_0.

Производной $r'(t_0)$ вектор-функции $r'(t)$ в точке t_0 называется предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t}, \qquad (4.7)$$

если он существует. При $\Delta \vec{r} \neq 0$ вектор $\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ всегда направлен по секущей в сторону возрастания параметра t. Поэтому, если $r'(t_0) \neq \vec{0}$, то вектор производной $r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ направлен по касательной к годографу (рис. 4.3) в точке M_0 в сторону возрастания параметра t.

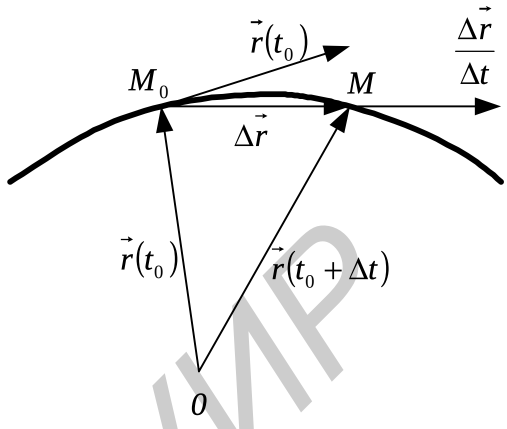


Рис. 4.3

Уравнение касательной к годографу вектор-функции имеет вид

$$\vec{r} = (x, y, z) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0) \cdot t, \; t \in \boldsymbol{R},$$

или в координатной форме

$$\begin{aligned} x &= x(t_0) + x'(t_0) \cdot t, \\ y &= y(t_0) + y'(t_0) \cdot t, \\ z &= z(t_0) + z'(t_0) \cdot t, \; t \in \boldsymbol{R}. \end{aligned} \qquad (4.8)$$

Отсюда получаем уравнение касательной в каноническом виде

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}. \qquad (4.9)$$

Нормальной плоскостью a к кривой называется плоскость, перпендикулярная касательной прямой в точке касания M_0 (рис. 4.4). Она описывается уравнением

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0. \qquad (4.10)$$

Каждая прямая l, проходящая через точку M_0 и лежащая в нормальной плоскости a (рис. 4.4), называется *нормалью*.

Справедливы следующие правила дифференцирования вектор-функций:

$$\left(\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)\right)' = \vec{r}_1{}'(t) + \vec{r}_2{}'(t),$$

$$\left(f(t)\vec{r}(t)\right)' = f'(t)\vec{r}(t) + f(t)\vec{r}\,'(t),$$

$$\left(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)\right)' = \left(\vec{r}_1{}'(t), \vec{r}_2(t)\right) + \left(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2{}'(t)\right),$$

$$\left[\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)\right]' = \left[\vec{r}_1{}'(t), \vec{r}_2(t)\right] + \left[\vec{r}_1(t), \vec{r}_2{}'(t)\right].$$

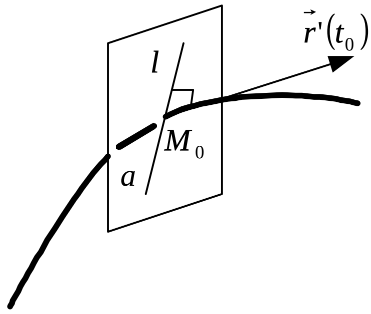


Рис. 4.4

Если в точке t_0 выполнены условия

$$r'(t_0) = \vec{0}, \; r''(t_0) = \vec{0}, \; \ldots, \; r^{(n-1)}(t_0) = \vec{0}, \; r^{(n)}(t_0) \neq \vec{0},$$

то уравнение касательной к годографу в конце радиуса-вектора $\vec{r}(t_0)$ имеет вид

$$\vec{r} = (x, y, z) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}^{\,(n)}(t_0) \cdot t, \; t \in \boldsymbol{R}.$$

При этом, если координатные функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ n раз дифференцируемы, то

$$\vec{r}^{(k)} = (x^{(k)}(t), y^{(k)}(t), z^{(k)}(t)),\ k = 1,2,...,n.$$

Дифференциалом вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 называется выражение

$$d\vec{r} = r'(t_0)dt = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))dt = (x'(t_0)dt, y'(t_0)dt, z'(t_0)dt) = (dx, dy, dz), \qquad (4.11)$$

где $dt = \Delta t$ - приращение аргумента.

Дифференциал n-го порядка определяется с помощью рекуррентного соотношения

$$d^n\vec{r}(t) = d(\vec{r}^{(n-1)}(t)dt^{n-1}) = r^{(n)}(t)dt^n. \qquad (4.12)$$

Если функция $t = t(s)$ дифференцируема при $s = s_0$, $t(s_0) = t_0$, а вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0, то сложная функция $\vec{r}(s) = \vec{r}(t(s))$ дифференцируема в точке s_0, причем

$$\vec{r}'(s_0) = \vec{r}_t'(t_0)\cdot t_s'(s_0) = (x_t'(t_0)\cdot t_s'(s_0), y_t'(t_0)\cdot t_s'(s_0), z_t'(t_0)\cdot t_s'(s_0)) =$$
$$= (x_t'(t_0), y_t'(t_0), z_t'(t_0))\cdot t_s'(s_0). \qquad (4.13)$$

Теорема Лагранжа. Если вектор-функция $\vec{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), то существует точка $c \in (a,b)$, такая, что $|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \le |\vec{r}'(c)|(b-a)$.

Формула Тейлора. Если вектор-функция $\vec{r}(t)$ определена в некоторой окрестности точки t_0 и имеет n производных в этой точке, то для нее справедлива формула Тейлора:

$$\vec{r}(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\vec{r}^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k + \vec{0}(\Delta t^n),\ \Delta t = t - t_0. \qquad (4.14)$$

4.3. Показать, что $(\vec{r}(t), \vec{r}'(t)) = 0$, $\forall t \in (a,b)$, если $\vec{r}'(t)$ существует на (a,b) и $|\vec{r}(t)| = c = const$ для всех $t \in (a,b)$.

Δ Имеем $|\vec{r}(t)|^2 = (\vec{r}'(t), \vec{r}(t)) = c^2$. Используя правило дифференцирования скалярного произведения получаем

$$(\vec{r}(t), \vec{r}(t))' = 2(\vec{r}(t), \vec{r}'(t)) = (c^2)' = 0 \Rightarrow (\vec{r}(t), \vec{r}'(t)) = 0,$$

т. е. в этом случае векторы $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}'(t)$ ортогональны.

4.4. Написать уравнения касательной и нормальной плоскости к годографу вектор-функции $\vec{r}(t) = (t, \operatorname{tg} t, -\sin^2 t)$ в точке $t_0 = p/4$.

Δ Касательный вектор $\vec{t} = \vec{r}'(t) = \left(1, \frac{1}{\cos^2 t}, -2\sin t\cdot\cos t\right)$ при $t_0 = p/4$ имеет вид $\vec{t}_0 = \vec{r}'(t_0) = \left(1, \frac{1}{2}, -1\right)$. Точка $M_0 = \left(\frac{p}{4}, -1, -\frac{1}{2}\right)$. Согласно (4.9), уравнение касательной описываются соотношениями

$$\frac{x - p/4}{1} = \frac{y-1}{1/2} = \frac{z + 1/2}{-1},$$

а нормальная плоскость – уравнением (4.10):

$$\left(x-\frac{p}{4}\right)+\frac{1}{2}(y-1)-1\left(z+\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow 2x+y-2z-(4+p)/2=0. \ ▲$$

Кривой или *параметрически заданной кривой* называется множество Γ в пространстве $\boldsymbol{R}^3$, заданные как непрерывный образ отрезка $[a,b]$, т.е.

$$t \to M(t) \in \boldsymbol{R}^3, \quad t \in [a,b],$$

где $M(t)$ - непрерывное отображение. В этом случае пишут

$$\Gamma = \{M(t); \ a \le t \le b\}.$$

Если в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ фиксирована декартова система координат XYZ, то задание отображения $M(t)$ равносильно заданию трех функций

$$x = x(t), \ y = y(t), \ z = z(t), \ a \le t \le b,$$

называемых координатными функциями отображения $M(t)$, т.е.

$$M(t) = (x(t), y(t), \text{и } z(t)), \ a \le t \le b. \tag{4.15}$$

Таким образом, кривую Γ можно задать одним из трех видов:

а) $\Gamma = \{M(t); \ a \le t \le b\}$;

б) $\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)), a \le t \le b\}$; (4.16)

в) $\Gamma = \{\vec{r}(t); a \le t \le b\}$.

Непрерывность отображения $M(t)$ означает непрерывность всех его координатных функций. Отображение $M(t)$ называется *параметризацией кривой*, t - параметром.

Будем говорить, что точка $M(t_2)$ кривой Γ следует за точкой $M(t_1)$, или точка $M(t_1)$ предшествует точке $M(t_2)$, если $a \le t_1 \le t_2 \le b$. Если на кривой задан порядок точек, то такая кривая называется *ориентированной*. Точка $M(a)$ называется *начальной*, а точка $M(b)$ - *конечной* точкой ориентированной кривой.

Углом между ориентированными кривыми, пересекающимися в некоторой точке, называется угол между их касательными в этой точке.

Если равенство $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$ выполняется при $t_1 = a$, $t_2 = b$, т.е. $M(a) = M(b)$, то кривую Γ называют *замкнутой*. Замкнутую кривую, не имеющую точек самопересечения, отличных от точек $M(a)$ и $M(b)$, называют *простым контуром*. Точка $M(a)$ называется начальной, а точка $M(b)$ - конечной точкой кривой.

Кривая Γ называется *дифференцируемой кривой*, если в (4.16, в) вектор-функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема на [a,b]. Если $\vec{r}'(t_0) \ne \vec{0}$, то точку $M_0 = M(t_0)$ называют *неособой* точкой кривой, если же $\vec{r}'(t_0) = \vec{0}$ - *особой*. Если $\vec{r}'(t)$ непрерывна на $[a,b]$, то кривая Γ называется *непрерывно дифференцируемой*.

Если кривая Γ лежит в некоторой плоскости, то эту кривую называют *плоской*. Если это плоскость XY, то уравнение кривой Γ имеет вид

$$\Gamma = \{x = x(t), y = y(t), z = 0; \ a \le t \le b\}.$$

Обычно в этом случае опускают уравнение $z = 0$ и записывают уравнение кривой в виде

$$\Gamma = \{x = x(t), y = y(t); \ a \le t \le b\}. \tag{4.17}$$

4.5. Пусть вектор-функция $\vec{r}(t)$ не обращается в нуль в некоторой окрестности U точки t_0, и пусть $j = j(t)$ - наименьший неотрицательный угол, выраженный в радианах, между векторами $\vec r_0 = \vec r(t_0)$ и $\vec r = \vec r(t)$, $0 \le \varphi \le \pi$. Тогда $\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \varphi(t)$, поскольку $\varphi(t_0) = 0$. Положим $\Delta t = t - t_0$. Предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ называется *угловой скоростью вращения* вектор-функции $\vec r(t)$ в точке t_0 и обозначается через $\omega = \omega(t_0; \vec r)$. Доказать, что если $\vec r_0 = \vec r(t_0) \ne 0$, и существует $\vec r\,' = \vec r\,'(t_0)$, то существует и угловая скорость вращения $\omega = \omega(t_0; \vec r)$, причем

$$\omega = \frac{|[\vec r_0, \vec r_0{}']|}{\vec r_0^{\,2}}. \tag{4.18}$$

Для случая $|\vec r(t)| = const$ получить отсюда формулу

$$\omega = \frac{|[\vec r_0{}']|}{|\overline{r_0}|}. \tag{4.19}$$

Каков ее механический смысл?

Δ При $\Delta\varphi \to 0$ справедливо $\Delta\varphi \sim \sin\Delta\varphi$. Учитывая, что $\Delta\varphi \to 0$ при $t \to 0$ и то, что

$$|[\vec r(t_0), \vec r(t_0 + \Delta t)]| = |\vec r(t_0)| \cdot |\vec r(t_0 + \Delta t)| \cdot |\sin\Delta\varphi|,$$

получаем

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{|[\vec r(t_0), \vec r(t_0 + \Delta t)]|}{|\Delta t| \cdot |\vec r(t_0)| \cdot |\vec r(t_0 + \Delta t)|} = \frac{1}{\vec r_0^{\,2}}\left|\frac{[\vec r(t_0), r(t_0 + \Delta t)]}{\Delta t}\right| =$$

$$= \frac{1}{\vec r_0^{\,2}} \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\left[\vec r_0, r_0 + \vec r_0 \Delta t + o(\Delta t^2)\right]}{\Delta t}\right| = \frac{|[\vec r_0, \vec r_0{}']|}{\vec r_0^{\,2}},$$

так как $[\vec r_0, \vec r_0] = \vec 0$, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{o(\Delta t^2)}{\Delta t} = 0$.

Согласно примеру 4.3, если $|\vec r(t)| = c$, то $(\vec r_0, \vec r_0{}') = 0 = |\vec r_0| \cdot |\vec r_0{}'| \cdot \cos\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec r_0$ и $\vec r_0{}'$. Поскольку $\vec r_0 \ne \vec 0$, то либо $\vec r_0{}' = \vec 0$, либо $\varphi = \pi/2$ и, следовательно, $\sin\varphi = 1$. В обоих случаях $|[\vec r_0, \vec r_0{}']| = [\vec r_0] \cdot [\vec r_0{}'] \sin\varphi = [\vec r_0] \cdot [\vec r_0{}']$. Отсюда и из (4.18) получаем равенство (4.19). ▲

Если $\bar r = \bar r(t)$ - годограф (путь) движения точки, то $\vec r\,'(t) = \vec V$ - скорость движения. В силу (4.19) получим формулу

$$\omega = \frac{|\vec V|}{|\vec r|} = \frac{V}{r},\ V = \omega \cdot r,$$

связывающую значение угловой скорости ω и линейной V при движении точки по поверхности шара $|\vec r| = r = \text{const}$.

4.6. Представить пересечение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$ в виде параметрически заданной кривой.

Δ На плоскости XY образующая цилиндра, параллельного оси Z, имеет вид

$$x^2 + y^2 = Rx \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}R\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R^2}{2}\right) -$$

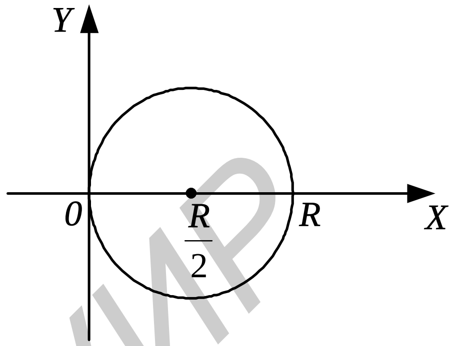


Рис. 4.5

окружность радиусом $\frac{R}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{R}{2}, 0\right)$ (рис. 4.5). Значит, $0 \le x \le R$. Положим

$$x = \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}R \cdot \cos 2t,\ y = \frac{1}{2}R \cdot \sin 2t,\ -\frac{p}{2} \le t \le \frac{p}{2}.$$

Из уравнения поверхности сферы имеем

$$Z^2 = R^2 - \left(x^2 + y^2\right) = R^2 - Rx = R^2 - \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}R^2 \cos 2t = \frac{1}{2}R^2(1 - \cos 2t) = 2R^2 \cdot \sin^2 t,$$

т.е. $Z = \pm\sqrt{2} \cdot R \cdot \sin t$

Знак “$\pm$” свидетельствует о том, что имеются две кривые – одна на верхней поверхности сферы, вторая – на нижней.

Итак, параметрические уравнения кривой имеют вид

$$x = \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}R \cdot \cos 2t,\ y = \frac{1}{2}R \cdot \sin 2t,\ z = \pm\sqrt{2}R \cdot \sin t,\ -\frac{p}{2} \le t \le \frac{p}{2},$$ (рис. 4.6).

Кривая Γ называется *кривой Вивиани*. ▲

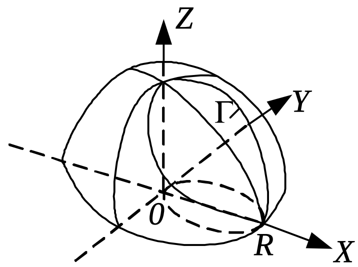


Рис. 4.6

4.7. При каких a кривая $x = e^{at} \cdot \cos t$, $x = e^{at} \cdot \sin t$, $z = e^{at}$, $-\infty < t < \infty$, пересекает все образующие конуса $x^2 + y^2 = z^2$ под углом $\frac{p}{4}$?

Δ Касательный вектор к искомой кривой имеет вид

$$\vec{r} = \vec{r}\,'(t) = \left(e^{at}(a\cos t - \sin t), e^{at}(a \sin t + \cos t), ae^{at}\right).$$

Вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$, направленный по образующей конуса $x^2 + y^2 = z^2$, имеет вид

$$\vec{a}\,' = \left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}\right) = \left(e^{at}\cos t, e^{at}\sin t, e^{at}\right).$$

Поскольку

$$|\vec{r}\,'(t)| = e^{at}\sqrt{2a^2 + 1},\ |\vec{a}(t)| = e^{at}\sqrt{2},$$

то

$$\cos\left(\vec{r}\,'(t) \text{щ} \vec{a}\,'(t)\right) = \frac{\left(\vec{r}\,'(t), \vec{a}(t)\right)}{\left|\vec{r}\,'(t)\right| \cdot \left|\vec{a}(t)\right|} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + 1}}.$$

Если угол между векторами $\vec{r}\,'(t)$ и $\vec{a}(t)$ равен $\frac{p}{4}$ или $\frac{3p}{4}$, то из последнего равенства получаем

$$\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+1}}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \blacktriangle$$

Как известно, *длина дуги* $\Gamma=\{\vec{r}(t); a\le t\le b\}$ вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b|\vec{r}'(t)|dt=\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt, \tag{4.20}$$

а дифференциал длины дуги – формулой

$$dS=|\vec{r}'(t)|dt. \tag{4.21}$$

Кривая, имеющая конечную длину дуги, называется *спрямляемой*. Гладкая дуга является спрямляемой.

Пусть $s=s(t)$ - длина той части кривой Γ, которая соответствует изменению параметра от a до t. Тогда из (4.21) имеем

$$\frac{ds}{dt}=|\vec{r}'(t)|. \tag{4.22}$$

Пусть кривая Γ является гладкой, без особых точек, т. е. $|\vec{r}'(t)|>0$. Тогда из $s=s(t)$ имеем $t=t(s)$, где s - переменная длина дуги, $0\le s\le S$. Уравнение кривой Γ можно записать в виде

$$\vec{r}=\vec{r}(t(s))=\vec{r}(s),\ 0\le s\le S \tag{4.23}$$

где S - длина дуги Γ.

Если параметром кривой Γ является переменная длина ее дуги s, то s называется *натуральным параметром*, а уравнение (4.23) кривой – *натуральным уравнением*.

4.8. Найти длину дуги $s=s(t)$ винтовой линии

$$x=a\cos t,\ \ y=a\sin t,\ z=bt,\ 0\le t\le T, \tag{4.24}$$

$a>0$, $b>0$, и записать ее натуральное уравнение.

Δ Касательный вектор к кривой (4.24) равен

$$\vec{r}'(t)=(-a\sin t,\ a\cos t,\ b).$$

Тогда

$$|\vec{r}'(t)|=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

По формуле (4.22) получаем

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow s=s(t)=t\sqrt{a^2+b^2}+c,$$

где $c=0$, поскольку $s(0)=0$. Следовательно, $t=\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Подставив значение t в соотношение (4.24), получим искомое натуральное представление винтовой линии в виде

$$x=a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \ y=a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \ z=\frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \ 0\le s\le S,$$

где длина дуги $S=T\sqrt{a^2+b^2}$. $\blacktriangle$

Если параметром непрерывно дифференцируемой кривой Γ является переменная длина дуги s, то $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right|=1$, т. е. вектор

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad |\vec{t}| = 1, \tag{4.25}$$

является единичным касательным вектором к кривой Γ, иначе говоря,

$$\vec{t} = (\cos a,\ \cos b,\ \cos g) = \left(\frac{\partial x}{\partial s},\ \frac{\partial y}{ds},\ \frac{\partial z}{ds}\right) \Leftrightarrow\ \frac{\partial x}{ds} = \cos a,\ \frac{\partial y}{ds} = \cos b,\ \frac{\partial z}{ds} = \cos g\,. \tag{4.26}$$

где $\cos a$, $\cos b$, $\cos g$ - направляющие косинусы касательной к кривой Γ.

Пусть

$$\Gamma = \{\vec{r}(s);\ 0 \le s \le S\}\ - \tag{4.27}$$

дважды непрерывно дифференцируемая кривая и $\vec{t} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ - единичный касательный вектор. Угловая скорость вращения касательного вектора $\vec{t}$ в данной точке кривой называется *кривизной кривой* в этой точке и обозначается $k = k(s)$, т. е.

$$k = k(s) = w(s; \vec{t}) = \left|\frac{d\vec{t}(s)}{ds}\right|. \tag{4.28}$$

Обратная величина к кривизне называется *радиусом* R *кривизны* кривой в данной точке, т. е.

$$R = R(s) = \frac{1}{k(s)} = \frac{1}{k}. \tag{4.29}$$

Если $k \ne 0$, то единичный вектор в направлении вектора $\dfrac{d\vec{t}}{ds}$ называется *главным нормальным вектором* и обозначается $\vec{n}$, т. е.

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k \cdot \vec{n}\,. \tag{4.30}$$

Прямая, проходящая через точку кривой Γ параллельно вектору $\vec{n}$, называется *главной нормалью*.

Вектор

$$\vec{b} = [\vec{r}, \vec{n}] \tag{4.31}$$

называется *бинормальным вектором*. Прямая, проходящая через точку кривой параллельно вектору $\vec{b}$, называется *бинормалью*.

Если кривая (4.27) трижды непрерывно дифференцируема, то производная $\dfrac{d\vec{b}}{ds}$ бинормального вектора $\vec{b}$ коллинеарна с вектором $\vec{n}$, т. е.

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -c \cdot \vec{n}, \tag{4.32}$$

где коэффициент $c = c(s)$ называется *кручением кривой* в данной ее точке.

Для производной $\dfrac{d\vec{n}}{ds}$ справедлива формула

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -k\vec{t} + c\vec{b}\,. \tag{4.33}$$

Формулы (4.30), (4.32), (4.33) называются *формулами Френе*.

Тетраэдр с вершиной в точке M кривой Γ, ребра которого имеют длину, равную единице, и направлены по векторам $\vec t, \vec n$ и $\vec b$, называется сопровождающим *трехгранником Френе*.

Если кривая $\Gamma = \{\vec r(t);\ a \le t \le b\}$ трижды непрерывно дифференцируема, то

$$\vec r = \frac{1}{|\vec r\,'|}\vec r\,', \tag{4.34}$$

$$\vec n = \frac{[\,[\vec r\,',\ \vec r\,''],\vec r\,']}{|\,[\,[\vec r\,',\vec r\,''],\vec r\,']|} = \frac{1}{|\,[\,[\vec r\,',\vec r\,''],\vec r\,'']|}\cdot[\,[\vec r\,',\vec r\,''],\vec r\,'], \tag{4.35}$$

$$\vec b = \frac{1}{|\,[\vec r\,',\vec r\,'']|}\cdot[\vec r\,',\vec r\,''], \tag{4.36}$$

$$k = \frac{|\,[\vec r\,',\vec r\,'']|}{|\vec r\,'|^3} = \frac{1}{R}, \tag{4.37}$$

$$c = \frac{(\vec r\,',\vec r\,'',\vec r\,''')}{|\,[\vec r\,',\vec r\,'']|^2}, \tag{4.38}$$

или в координатном виде:

$$k = \frac{\sqrt{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}}{\left(\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\right)^3}, \tag{4.39}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}. \tag{4.40}$$

Точки, в которых кривизна $k = 0$, называются точками *распрямления кривой*, а точки, в которых кручение $c = 0$, - *точками уплощения*.

Плоскость, проходящая через данную точку кривой Γ параллельно касательной и главной нормали (перпендикулярно бинормали), называется *соприкасающейся плоскостью*. Плоскость, параллельная главной нормали и бинормали (перпендикулярная касательной), называется *нормальной плоскостью*. Плоскость, параллельная касательной и бинормали (перпендикулярная главной нормали), называется *спрямляющей плоскостью* (рис. 4.7).

Уравнение соприкасающейся плоскости в точке, в которой кривизна $k \ne 0$, имеет вид

$$(\vec r - \vec r_0,\ \vec r_0\,',\ \vec r_0\,'') = 0,$$

или в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0. \tag{4.41}$$

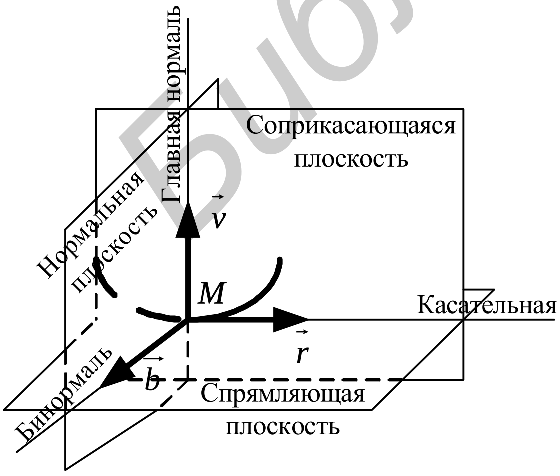


Рис. 4.7

Бинормаль в точке M_0 описывается соотношениями

$$\frac{x-x_0}{y_0'z_0''-z_0'y_0''}=\frac{y-y_0}{z_0'x_0''-x_0'z_0''}=\frac{z-z_0}{x_0'y_0''-y_0'x_0''}\,. \tag{4.42}$$

Векторное уравнение нормальной плоскости:

$$(\vec r-\vec r_0,\ \vec r_0')=0;$$

в координатной форме:

$$(x-x(t_0))x'(t_0)+(y-y(t_0))y'(t_0)+(z-z(t_0))z'(t_0)=0\,.$$

Векторное уравнение спрямляющей плоскости имеет вид

$$\left(\vec r-\vec r_0,\left[\,[\vec r_0',\ \vec r_0''],\ \vec r_0'\,\right]\right)=0\,. \tag{4.43}$$

Точка O', лежащая на главной нормали к кривой на расстоянии, равном радиусу R кривизны, в направлении вектора главной нормали $\vec n$, называется центром кривизны кривой в данной точке (рис. 4.8). Радиус-вектор $\vec r=\vec r(x)$ кривизны определяется соотношением

$$\vec r=\vec r(t)=\vec r(t)-R(t)\cdot\vec n(t)\,.$$

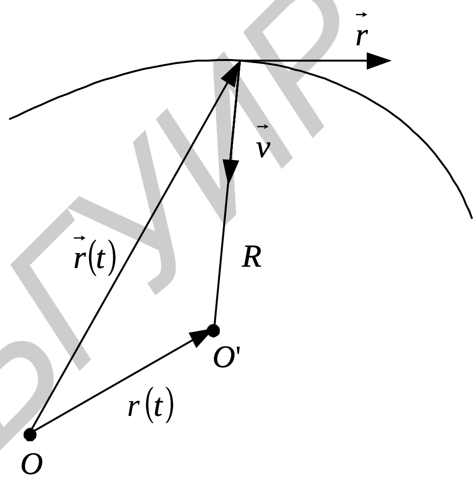


Рис. 4.8

Годограф вектор функции $\vec r=\vec r(x)$ или, другими словами, кривая Γ_1, соединяющая множество центров кривизны Γ, называется *эволютой* кривой Γ. Если кривая Γ_1 является эволютой кривой Γ, то сама кривая Γ при этом называется *эвольвентой* кривой Γ_1.

Уравнение эволюты кривой Γ имеет вид

$$\vec r=\vec r(t)+\frac{1}{k^2}\cdot\frac{s'\,\vec r''-s''\,\vec r'}{(s')^3}, \tag{4.44}$$

где, если $\vec r=\vec r(t)=(x(t),\,y(t),\,\mathrm{z}(t))$, то

$$s'=|\vec r'|=\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,,\ s''=\frac{x'x''+y'y''+z'z''}{\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}}\,.$$

Если кривая Γ лежит в плоскости XY, то

$$k=\frac{1}{R}=\frac{|x'y''-x''y'|}{\left(\sqrt{(x')^2+(y')^2}\right)^3}, \tag{4.45}$$

а центр кривизны $(x\,,h)$ определяется соотношениями

$$x=x-y'\cdot\frac{(x')^2+(y')^2}{x'y''-x''y'}\,,$$

$$h=x+y'\cdot\frac{(x')^2+(y')^2}{x'y''-x''y'}\,, \tag{4.46}$$

$$\vec r(t)=(x,\,y)=(x(t),\,y(t))\,.$$

Для случая, когда кривая Γ является графиком функции $y=f(x),\ a\le x\le b$, кривизна k и координаты x и h ее центра определяются формулами:

$$k=\frac{|y''|}{\left(\sqrt{1+(y')^2}\right)^3}, \tag{4.47}$$

$$x = x - y'\cdot\frac{1+(y')^2}{y''}, \qquad h = y+\frac{1+(y')^2}{y''}. \tag{4.48}$$

4.9. Найти сопровождающий трехгранник Френе винтовой линии (4.24), ее кривизну и кручение.

Δ В примере 4.8 показано, что координаты x, y, z натурального уравнения винтовой линии определяются соотношениями

$$x=a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad y=a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad z=\frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad s\ge 0.$$

Поэтому

$$\vec{t}=\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ b\right).$$

Отсюда

$$\frac{d\vec{t}}{ds}=\frac{1}{a^2+b^2}\left(-a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ -a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right).$$

Тогда по формуле (4.28)

$$k=\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

По формуле (4.30) находим

$$\vec{n}=\frac{1}{k}\frac{d\vec{t}}{ds}=\left(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},-\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},0\right),$$

а по формуле (4.31) вычисляем

$$\vec{b}=[\vec{t},\vec{n}]=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & b\\ -\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(b\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},-b\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},a\right).$$

Дифференцируя это равенство, получаем

$$\frac{d\vec{b}}{ds}=\frac{1}{a^2+b^2}\left(b\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \mathrm{b}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right)=-\frac{b}{a^2+b^2}\vec{n}.$$

Отсюда и из формулы (4.32) следует, что кручение $c = \dfrac{b}{a^2 + b^2}$. ▲

4.10. Найти радиус кривизны и эволюту эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0.$$

Δ Параметрические уравнения эллипса имеют вид

$$x = \cos t, \quad y = b \sin t, \; 0 \leq t \leq 2p .$$

Тогда

$$\vec{t} = (x', y') = (-a \sin t, b \cos t),$$

$$\frac{d\vec{t}}{dt} = \vec{r}''(t) = \vec{t}' = (-a \cos t, \; -b \sin t) = (x'', \; y'')$$

По формуле (4.37) находим

$$R = \frac{1}{k} = \frac{\left(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}{ab \sin^2 t + ab \cos^2 t} = \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab}.$$

Отсюда по формулам (4.46) находим координаты (x, h) точек эволюты:

$$x = a \cos t - b \cos t \cdot \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t,$$

$$h = b \sin t - a \sin t \cdot \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t,$$

т. е. эволютой эллипса является *астроида*. ▲

4.11. Показать, что если кручение $c = 0$, то кривая плоская.

Δ Если у кривой $\Gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(s); \; 0 \leq s \leq S\}$, где s - переменная длина дуги, ее кручение $c = 0$ во всех точках, то в силу формулы (4.32) имеем $\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \vec{0}$, т. е. бинормаль $\vec{b}$ кривой Γ является вектором $\vec{b}(s) = \vec{b}_0$. Тогда для любой точки кривой Γ будем иметь

$$\left(\vec{t}, \vec{b}_0\right) = \left(\frac{d\vec{r}(s)}{ds}, \vec{b}_0\right) = \frac{d}{ds}\left(\vec{r}(s), \vec{b}_0\right) = 0.$$

Отсюда следует, что $\left(\vec{t}(s), \vec{b}_0\right) = \mathrm{const}$, $\quad 0 \leq s \leq S$. Это означает, что концы всех радиус-векторов $\vec{r}(s)$ лежат в плоскости $\left(\vec{r}, \vec{b}_0\right) = c$, $\quad \vec{r} = (x, y, z)$ - радиус-вектор точек плоскости, на которой лежит кривая Γ. ▲

4.12. Построить годографы вектор-функций:

а) $x = \sin t, \; y = \cos t, \; z = t^2, \; t \in \boldsymbol{R}$;

б) $x = 1, \; y = t, \; z = t^2, \; t \in \boldsymbol{R}$;

в) $x = t, \; y = t^2, \; z = t^3, \; t \in \boldsymbol{R}$;

г) $x = a(t - \sin t), \; y = a(1 - \cos t), \; z = 0, \; 0 \leq t \leq 2p$;

д) $x = t^2 - 2t + 3, \; y = t^2 - 2t + 1, \; z = 0, \; t \in \boldsymbol{R}$;

е) $x = a \sin^2 t, \; y = b \cos t, \; z = t, \; 0 \leq t \leq 2p$.

4.13. Доказать, что годограф вектор-функции

$$\vec{r}(t) = (\sin 2\varphi,\ 1-\cos 2\varphi,\ 2\cos\varphi)$$

лежит на сфере.

4.14.* Доказать, что годограф вектор-функции

$$\vec{r}(t) = (a_1t^2 + b_1t + c_1,\ a_2t^2 + b_2t + c_2,\ a_3t^2 + b_3t + c_3)$$

лежит в некоторой плоскости.

4.15. Найти предел вектор-функции при $t \to \pi$:

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{\sin t}{t-\pi},\ \frac{\ln\left(\frac{t}{\pi}\right)}{\pi - t},\ 1 \right).$$ **Отв.** $\left(-1, -\frac{1}{\pi}, 1\right)$.

4.16. Найти производную вектор-функции $\vec{r}(t)$ и написать уравнение касательной и нормальной плоскости в произвольной точке ее годографа:

$\vec{r}(t) = (t,\ t^2,\ t^3),\ \ t_0 = 1;$ **Отв.** $\vec{r}\,'(t_0) = (1,\ 2,\ 3)$,

$\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$,

$x + 2y + 3z - 6 = 0$;

4.17. Доказать, что $(\vec{r}_1,\ \vec{r}_2,\ \vec{r}_3)' = (\vec{r}_1',\ \vec{r}_2,\ \vec{r}_3) + (\vec{r}_1,\ \vec{r}_2',\ \vec{r}_3) + (\vec{r}_1,\ \vec{r}_2,\ \vec{r}_3')$.

4.18. Найти производные функций:

а) $\vec{r}^{\,2}(t)$; **Отв.** $2(\vec{r}, \vec{r}\,')$;

б) $\sqrt{\vec{r}^{\,2}(t)}$; **Отв.** $(\vec{r}, \vec{r}\,')\big/\sqrt{\vec{r}^{\,2}}$;

в) $[[\vec{r}(t), \vec{r}\,'(t)], \vec{r}\,''(t)]$; **Отв.** $[[\vec{r}, \vec{r}\,''], \vec{r}\,''] + [[\vec{r}, \vec{r}\,'], \vec{r}\,''']$;

г) $(\vec{r}(t), \vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t))$; **Отв.** $(\vec{r}, \vec{r}\,', \vec{r}\,''')$.

4.19. Доказать, что если $\vec{r} = \vec{a}\cos\omega t + \vec{b}\sin\omega t$, где $\omega \in \boldsymbol{R}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - постоянные векторы, то

а) $[\vec{r}, \vec{r}\,'] = \omega[\vec{a}, \vec{b}]$; б) $\vec{r}\,'' + \omega^2\vec{r} = \vec{0}$.

4.20. Доказать, что уравнения

$$x = \cos t,\quad y = \sin t,\quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2},$$

и

$$x = \sqrt{t(2-t)}, \qquad y = t - 1,\ \ 0 \le t \le 2,$$

являются параметризациями одной и той же кривой.

4.21.* Доказать, что уравнения

$$x = a\cos t,\quad y = b\sin t,\quad -\pi \le t \le \pi\ ,$$

и

$$x = a\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y = b\frac{2t}{1+t^2},\quad -\infty \le t \le +\infty,$$

являются параметризациями одной и той же кривой. Как точка движется по этой кривой, когда параметр t растет от $-\infty$ до $+\infty$?

4.22. Показать, что кривая

$$x = e^{at}\cos t,\quad y = e^{at}\sin t,\quad z = e^{at}$$

лежит на конусе $x^2 + y^2 = z^2$.

4.23. Показать, что кривая

$$x = \frac{t}{1+t^2+t^4},\quad y = \frac{t^2}{1+t^2+t^4},\quad z = \frac{t^3}{1+t^2+t^4}$$

лежит на некоторой сфере.

4.24. Найти проекцию кривой

$$x = e^t\cos t,\quad y = e^t\sin t,\quad z = t,\quad -\infty < t < \infty,$$

на плоскость XY. **Отв.** $r = e^{j}$ $(t = j)$.

4.25. Найти уравнения касательной к кривой:

а) $x = e^t,\ \ y = e^{-t},\ \ z = t^2 - 2,$ при $t = 0$. **Отв.** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{0}$.

б) $x = e^t\cos t,\ \ y = e^t\sin t,\ \ z = e^t,$ при $t = 0$. **Отв.** $x = y + 1 = z$.

4.26. Составить уравнение касательной к кривой:

$$x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t),\quad z = 4a\sin\frac{t}{2},\quad \text{при}\ t = \frac{p}{2}.$$

Какой угол a образует эта касательная с осью Z? **Отв.** $x + \dfrac{a(4-p)}{2} = y = \dfrac{z}{\sqrt{2}} - a$;

$a = \dfrac{p}{4}$.

4.27. Найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $x = t^4,\ \ y = t^3,\ \ z = t^2$ в произвольной ее точке t_0.

Отв. Если $t_0 \neq 0$, то $\dfrac{x - t_0^4}{4t_0^3} = \dfrac{y - t_0^3}{3t_0^2} = \dfrac{z - t_0^2}{2t_0}$,

$4t_0^3\left(x - t_0^4\right) + 3t_0^2\left(y - t_0^3\right) + 2t_0\left(z - t_0^2\right) = 0$.

4.28. В каких точках касательная кривой

$$x = 3t - t^3,\ \ y = 3t^2,\ \ z = 3t + t^3$$

параллельна плоскости $3x + y + z + 2 = 0$? **Отв.** $(-2,\ 3,\ -4);\ (-2,\ 12,\ 14)$.

4.29. Найти нормальную плоскость кривой

$$x = y,\ \ y = x^2 + y^2,$$

перпендикулярную прямой $x = y = z$. **Отв.** $8x + 8y + 8z - 5 = 0$.

4.30. Найти касательную к кривой

$$x^2 + y^2 = 10,\ \ y^2 + z^2 = 25$$

в точке $M = (1,\ 3,\ 4)$. **Отв.** $x + 3y = 10,\ 3y + 4z = 25.$

4.31. Доказать, что касательные к кривой

$$x = a(\sin t + \cos t),\quad y = a(\sin t - \cos t),\quad z = be^{-t}$$

пересекают плоскость XY по окружности $x^2 + y^2 = 4a^2$.

4.32.* Написать уравнения касательной и нормальной плоскости к кривой:

$$x = t,\quad y = t^2,\quad z = t^3,\ t_0 = 1.$$

Какая кривая получится в пересечении касательных с плоскостью XY?

Отв. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$, $x + 2y + 3z - 6 = 0$; парабола $y = \dfrac{3}{4}x^2$.

4.33. Доказать, что кривая

$$x = e^t \cos t,\quad y = e^t \sin t,\quad z = e^t$$

пересекает образующие конуса $x^2 + y^2 = z^2$ под одним и тем же углом.

4.34. Найти производную длины дуги по параметру для следующих кривых:

а) цепной линии $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a},\ -a \le x \le a$; **Отв.** $\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$.

б) эллипса $x = a\cos t,\quad y = b\sin t,\quad 0 \le t \le 2p$; **Отв.** $\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$.

в) гиперболы $x = a\operatorname{ch}t,\quad y = b\operatorname{sh}t,\quad t \in \boldsymbol{R}$; **Отв.** $\sqrt{a^2\operatorname{sh}^2 t + b^2\operatorname{ch}^2 t}$.

г) астроиды $x = a\cos^3 t,\quad y = a\sin^3 t,\quad 0 \le t \le 2p$; **Отв.** $\dfrac{3}{2}a\,|\sin 2t|$.

д) винтовой линии $x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad z = bt,\quad t \in \boldsymbol{R}$. **Отв.** $\sqrt{a^2 + b^2}$.

4.35. Найти производную длины дуги для кривых, заданных в полярных координатах:

а) архимедовой спирали $r = aj$; **Отв.** $a\sqrt{1 + j^2}$.

б) гиперболической спирали $r = \dfrac{a}{j}$; **Отв.** $\dfrac{a}{j^2}\sqrt{1 + j^2}$.

в) логарифмической спирали $r = ae^{bj}$, $\varphi \in \boldsymbol{R}$. **Отв.** $ae^{bj}\sqrt{1 + b^2}$.

4.36. Найти кривизну и радиус кривизны для кривых:

а) параболы $y = ax^2$; **Отв.** $k = \dfrac{1}{R} = \dfrac{2|a|}{\left(1 + 4a^2x^2\right)^{3/2}}$.

б) кубической параболы $y = x^3$; **Отв.** $k = \dfrac{1}{R} = \dfrac{6|x|}{\left(1 + 9x^4\right)^{3/2}}$.

в) синусоиды $y = \sin x$; **Отв.** $k = \dfrac{1}{R} = \dfrac{|\sin x|}{\left(1 + \cos^2 x\right)^{3/2}}$.

г) цепной линии $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$; **Отв.** $k = \dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{x}{a}}$.

д) $y = a\ln\cos\dfrac{x}{a}$. **Отв.** $k = \dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{a}\cdot\left|\cos\dfrac{x}{a}\right|$.

4.37. Найти кривизну и центр кривизны в произвольной точке (x, y) кривых:

а) гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; **Отв.** $k = \dfrac{a^4b^4}{\left(b^4x^2 + a^4y^2\right)^{3/2}} = \dfrac{ab}{\left(\varepsilon^2x^2 - a^2\right)^{3/2}}$;

$x = \frac{1}{a^4}c^2x^3,\ h = -\frac{1}{b^4}c^2y^3,\ c^2 = a^2 + b^2,\ e = \frac{c}{a} -$ эксцентриситет.

б) полукубической параболы $3ay^2 = 2x^3$; **Отв.** $k = \frac{3a^2}{\left(x(2a+3x)^3\right)^{1/2}}$;

$$x = -\frac{x(a+3x)}{a},\ h = \frac{2y(a+2x)}{x}.$$

в) астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. **Отв.** $k = \frac{1}{3\sqrt[3]{a\,|\,xy\,|}}$;

$$x = \sqrt[3]{x}\left(3a^{2/3} - 2x^{2/3}\right)(x+2a)(a-x)^2,\ \ h = \frac{2ay(x+a)}{x(x+2a)}.$$

4.38. Найти кривизну кривых в произвольной точке:

а) эллипса $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\ |\,t\,| \le 2p$; **Отв.** $\frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}$.

б) гиперболы $x = a\,\mathrm{ch}t,\ \ y = b\,\mathrm{sh}t,\ \ t \in \boldsymbol{R}$; **Отв.** $\frac{ab}{\left(a^2\mathrm{sh}^2t + b^2\mathrm{ch}^2t\right)^{3/2}}$.

в) циклоиды $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ t \in \boldsymbol{R}$. **Отв.** $\frac{1}{4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}$.

4.39. Найти эволюту кривых:

а) $x = t^2,\ \ y = t^3$; **Отв.** $x = -\frac{1}{2}\left(9t^2 + 2\right)t^2,\ h = \frac{1}{3}\left(4t^2 + 1\right)t$.

б) циклоиды $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t)$;

Отв. $x = p\ a + a(t - \sin t),\ h = -2a + a(1 - \cos t)$.

в) гиперболы $x = a\,\mathrm{ch}t,\ \ y = b\,\mathrm{sh}t$; **Отв.** $x = \frac{a^2 + b^2}{a}\mathrm{ch}^3t,\ h = -\frac{a^2 + b^2}{b}\mathrm{sh}^3t$.

4.40. Найти радиус кривизны кривых, заданных в полярных координатах:

а) лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2j$; **Отв.** $\frac{a^2}{3j}$.

б) кардиоиды $r^2 = a(1 + \cos j)$; **Отв.** $\frac{4}{3}a\left|\cos\frac{j}{2}\right|$.

в) спирали Архимеда $r = aj$; **Отв.** $\frac{a\left(1 + j^2\right)^{3/2}}{2 + j^2}$.

г) гиперболической спирали $r = \frac{a}{j}$; **Отв.** $\frac{a}{j^4}\left(1 + j^2\right)^{3/2}$.

в) логарифмической спирали $r = ae^{bj}$. **Отв.** $a\sqrt{1 + b^2}$.

4.41.* Найти параболу, соединяющую начало координат $O=(0,0)$ с точкой $M=(1,0)$ так, чтобы дуга параболы OM образовала вместе с нижней половиной окружности $x^2+y^2=1$ кривую с непрерывной касательной и непрерывной кривизной. **Отв.** $y=\sqrt{2}\left(x-1+\sqrt{1-x}\right)$.

4.42. Написать уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей к винтовой линии

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,\ t=t_0=0\,.$$

Δ Находим

$$x_0=x(0)=a,\ y_0=y(0)=0,\ z_0=z(0)=0\,,$$
$$\vec{r}_0\,'=\vec{r}\,'(t_0)=(-a\sin t, a\cos t, b)\big|_{t=0}=(0,a,b)\,,$$
$$\vec{r}_0\,''=\vec{r}\,''(t_0)=(-a\cos t, -a\sin t, 0)\big|_{t=0}=(-a,0,0)\,.$$

Согласно (4.10), уравнение нормальной плоскости имеет вид

$$(x-a)\cdot 0+(y-0)\cdot a+(z-0)\cdot b=0\ \Rightarrow\ ay+bz=0\,.$$

Уравнение соприкасающейся плоскости, согласно соотношению (4.41), представляется в виде

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z\\ 0 & a & b\\ -a & 0 & 0\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ by-az=0\,.$$

Далее находим

$$[\vec{r}_0\,', \vec{r}_0\,'']=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & a & b\\ -a & 0 & 0\end{vmatrix}=\left(0,-ab,a^2\right),$$

$$[\,[\vec{r}_0\,', \vec{r}_0\,''], \vec{r}_0\,']=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -ab & a^2\\ 0 & a & b\end{vmatrix}=\left(ab^2-a^3,0,0\right).$$

По формуле (4.43) получаем уравнение спрямляющей плоскости:

$$(x-x_0)\left(ab^2-a^3\right)+(y-y_0)\cdot 0+(z-z_0)\cdot 0=0\,,$$

или

$$x\left(ab^2-a^3\right)=0\ \Rightarrow\ x=0\,.\qquad ▲$$

4.43. Написать уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляюшей плоскостей для произвольной точки кривой $(t=t_0)$:

а) $x=t,\ \ y=t^2,\ \ z=t^3,\ t_0=1$,

Отв. $x+2y+3z-6=0,\ 3x-3y+z-1=0,\ 11x+8y-9z-10=0.$

б) $x=e^t,\ \ y=e^{-t},\ \ z=t\sqrt{2},\ \ t=0$,

Отв. $x-y+\sqrt{2}z=0,\ x-y-\sqrt{2}z=0,\ x+y-2=0.$

в) $x=e^t\cos t,\ \ y=e^t\sin t,\ \ z=e^t,\ t_0=0$,

Отв. $x+y+z-2=0,\ -x-y+2z-1=0,\ x-y-1=0.$

г) $y^2 = x,\ x^2 = z,\ t = t_0$. **Отв.** $2y_0(x-x_0)+(y-y_0)+4y_0^3(z-z_0)=0,$

$$6y_0^2(x-x_0)+8y_0^3(y-y_0)+(z-z_0)=0,$$

$$(1-32y_0^6)(x-x_0)-2y_0(12y_0^4+1)(y-y_0)+2y_0^2(8y_0^2+3)(z-z_0)=0.$$

4.44. Найти уравнение главной нормали бинормали к кривым:

а) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t_0 = 0$. **Отв.** $y = 0$, $z = 0$; $\dfrac{x-a}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{0}$.

б) $x = y^2$, $z = x^2$, $t = t_0$. **Отв.** $\dfrac{x-x_0}{1-32y_0^6} = -\dfrac{y-y_0}{2y_0(1+2y_0^4)} = \dfrac{z-z_0}{2y_0(8y_0^2+3)}$;

$$\frac{x-x_0}{6y_0^2} = -\frac{y-y_0}{8y_0^3} = -(z-z_0).$$

в) $x = \dfrac{1}{4}t^4$, $y = \dfrac{1}{3}t^3$, $z = \dfrac{1}{2}t^2$, $t_0 = 1$. **Отв.** $\dfrac{x-\frac{1}{4}}{3} = \dfrac{y-\frac{1}{3}}{0} = -\dfrac{z-\frac{1}{2}}{3}$;

$$x-\frac{1}{4} = -\frac{y-\frac{1}{3}}{2} = \frac{z-\frac{1}{2}}{1}.$$

Если каждому действительному числу t из некоторого множества $T \subset \boldsymbol{R}$ ставится в соответствие комплексное число $z = z(t) = x + iy = x(t) + iy(t)$, то говорят, что на множестве T определена *комплексная функция скалярного аргумента*, при этом $x = x(t)$ называется *действительной частью* функции $z(t)$, $y = y(t)$ - *мнимой* её частью. Так как геометрически на комплексной плоскости число z изображается вектором, то функцию $z = z(t) = x(t) + iy(t) = (x(t), y(t))$ можно трактовать как вектор-функцию скалярного аргумента. Функция $z = z(t)$ имеет в точке t_0 предел $a + ib$, если $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$, $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = b$. Функция непрерывна при $t = t_0$, если $a = x(t_0)$, $b = y(t_0)$. Для производной справедливо равенство

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) = (x'(t), y'(t)).$$

Графиком функции $z = z(t)$ на комплексной плоскости является кривая.

4.45. Определить вид кривой

$$z = 4\operatorname{tg} t - i3\sec t = 4\frac{\sin t}{\cos t} - i\frac{3}{\cos t}.$$

Δ Имеем параметрическое представление кривой:

$$x = 4\frac{\sin t}{\cos t},\quad y = -3\frac{1}{\cos t}.$$

Чтобы установить зависимость между x и y, исключим параметр t. Первое уравнение разделим на 4, второе – на (-3):

$$\frac{x}{4} = \frac{\sin t}{\cos t},\quad \frac{y}{-3} = \frac{1}{\cos t}.$$

Возведем обе части каждого уравнения в квадрат:

$$\frac{x^2}{16}=\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t},\ \frac{y^2}{9}=\frac{1}{\cos^2 t}.$$

Вычтем из второго уравнения первое, получим

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=\frac{1-\sin^2 t}{\cos^2 t}=\frac{\cos^2 t}{\cos^2 t}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$$ - гипербола. ▲

4.46. Определить действительные и мнимые части функций:

а) $z(t)=(t+i)^3$; **Отв.** $x(t)=t^3-3t$, $y(t)=3t^2-1$.

б) $z(t)=e^{2t-i\frac{p}{2}}$; **Отв.** $x(t)=0$, $y(t)=-e^{2t}$.

4.47. Определить вид кривой:

а) $z=3\sec t+i2\mathrm{tg}\, t$; **Отв.** Гипербола $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$.

б) $z=2\sec t-i3\mathrm{tg}\, t$; **Отв.** Гипербола $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

в) $z=\mathrm{ctg}\, t-i2\sec t$; **Отв.** Гипербола $-x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

г) $z=5\mathrm{sh}4t-i4\mathrm{ch}4t$; **Отв.** Гипербола $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.

д) $z=2e^{it}+\frac{1}{e^{it}}$ (воспользоваться формулой Эйлера $e^{it}=\cos t\pm\sin t$);

Отв. Эллипс $\frac{x^2}{9}+y^2=1$.

е) $z=t^2+4\mathrm{t}+20+\mathrm{i}(\mathrm{t}^2+4\mathrm{t}+4)$. **Отв.** $y=x-16$.

Самостоятельная работа
“Дифференциальное исчисление функций одной переменной”

Структура

1. Исходя из определения, найти $f'(0)$.

2. Дифференцирование сложных функций.

а) Производная функции, заданная явно.

б) Логарифмическое дифференцирование.

в) Производная функции, заданной неявно.

г) Производная функции, заданной параметрически.

3. Задача на геометрический (а) и физический (б) смысл производной.

4. Используя дифференциал, вычислить приближенно значение.

5. Производные высших порядков.

а) Найти производную n-го порядка.

б) Найти указанную производную функции, заданной неявно.

в) Найти указанную производную функции, заданной параметрически.

6. Задача на теоремы о среднем.

7. Используя правило Лопиталя, найти предел.

а) Неопределенность типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

б) Другие неопределенности.

8. Задача на формулу Тейлора.

а) Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0.

б) Вычислить приближенно с помощью формулы Тейлора с указанной точностью e.

в) Найти предел с помощью формулы Тейлора.

9. Найти глобальный экстремум функции $f(x)$ на $[a,b]$.

10. Построить график функции (а, б).

11. Вектор-функция скалярного аргумента.

а) Найти годограф вектор-функции.

б) Составить уравнения касательной и нормальной плоскости к кривой в точке, отвечающей значению параметра t_0.

Вариант 1

1. $f(x)=\begin{cases} x+\arcsin\left(x^2\sin\dfrac{6}{x}\right), x\neq 0. \\ 0 \quad , x=0. \end{cases}$ **Отв.** 1.

2. а) $f(x)=4\ln\dfrac{x}{1+\sqrt{1-4x^2}}-\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$. **Отв.** $\dfrac{2}{x^3\sqrt{1-4x^2}}$.

б) $f(x)=(tg\,x)^{\ln tg\, x/4}$. **Отв.** $f(x)\cdot\dfrac{\ln tg\;x}{\sin \boldsymbol{2x}}$.

в) $\ln x+e^{-y/x}=0$. **Отв.** $y'_x=y/x+e^{-y/x}$.

г) $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}-arctg\sqrt{\dfrac{1-t}{t}}, \\ \boldsymbol{y}=\sqrt{t}-\sqrt{1-t}\,\arcsin\sqrt{\boldsymbol{t}}. \end{cases}$ **Отв.** $\dfrac{\sqrt{t}\arcsin\sqrt{t}}{2(1-t)}$.

3. а) Доказать, что отрезок касательной к гиперболе $y=c/x$, заключенный между координатными осями, делится в точке касания пополам.

б) Тело массой 100 кг движется прямолинейно по закону $S=2t^2+3t+1$. Определить кинетическую энергию $\left(mV^2/2\right)$ тела через 5 с.

Отв. 26450.

4. $y=\sqrt[3]{3x+\cos x}$ при $x=0{,}01$. **Отв.** 1,01.

5. а) $y=(7x+1)/17(4x+3)$. **Отв.** $\dfrac{(-1)^{n+1}4^{n-1}n!}{(4x+3)^{n+1}}$.

б) $y=x+arctgy,\quad y''_{xx}-?$ **Отв.** $-\left(2y^2+2\right)/y^5$.

в) $\begin{cases} x = 1/t^2, \\ y = 1/\left(t^2+1\right), \quad y''_{xx} - ? \end{cases}$ **Отв.** $-2t^6/\left(1+t^2\right)^3$.

6. Выполняется ли теорема Лагранжа для $f(x) = x - x^3$ на [–2, 1]. Если да, то найти соответствующее значение x. **Отв.** $x = -1$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx - \sin x}{x\text{-}\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)ctgx$. **Отв. а)** 3; **б)** 0.

8. а) $f(x) = \ln(1+\sin x)$, $x_0 = 4$;

б) $\cos 5^{\circ}$; $\varepsilon = 0{,}00001$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

Отв. а) $f(x) = x^2/2 - x^3/3 - x^5/5 + o\left(x^5\right)$; **б)** 0,99619; **в)** $\dfrac{1}{3}$.

9. $f(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln x$, $\left[1/\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$.

Отв. $f(1/\sqrt{3}) = p/6 + 0{,}25\ln 3 -$ наибольшее значение,

$f(\sqrt{3}) = p/3 - 0{,}25\ln 3 -$ наименьшее.

10. а) $f(x) = \dfrac{e^{-(x+2)}}{x+2}$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x(x-6)^2}$.

11. а) $\vec{r} = 4\operatorname{cosec} t \cdot \vec{i} - 2\operatorname{ctg} t \cdot \vec{j}$; б) $\vec{r} = r\cos t \cdot \vec{i} + r\sin t \cdot \vec{j} + at \cdot \vec{k}$, $t_0 = p/2$.

Отв. а) $y = x^2/16 - y^2/4 = 1$; **б)** $\dfrac{x}{-r} = \dfrac{y-r}{0} = \dfrac{z-(ap/2)}{a}$, $\quad 2rx - 2az + p\ a^2 = 0$.

Вариант 2

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 + \operatorname{tg}^2\left(x^2 \cdot \cos\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ **Отв.** 0.

2. а) $f(x) = \dfrac{\arccos x}{x} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$. **Отв.** $-\dfrac{\arccos x}{x^2}$.

б) $f(x) = (\sin x)^{\frac{1}{x}}$. **Отв.** $\left(-\dfrac{\ln\sin x}{x^2} + \dfrac{\cos x}{x\sin x}\right)(\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

в) $x^4 + y^4 = x^2 y^2$. **Отв.** $\dfrac{2x^2 - y}{y(x-2y^2)}$.

г) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$ **Отв.** $\operatorname{tg} t$.

3. а) В какой точке кривой $y = 2 + x - x^2$ касательная к ней параллельна оси OX?

Отв. $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{9}{4}\right)$.

б) Закон движения тела описывается формулой $S(t)=5t^2+t$. Найти скорость тела через 15 секунд после начала движения. **Отв.** 151.

4. $y=\sqrt[3]{x}$ при $x=1{,}02$. **Отв.** $1{,}007$.

5. а) $y=\sin^2 x$. **Отв.** $-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

б) $x^2-xy+y^2=1,\quad y''_{xx}-?$ **Отв.** $\frac{3(xy'-y)}{(x-2y)^2}=\frac{6}{(x-2y)^3}$.

в) $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^2, \quad y''_{xx}-? \end{cases}$ **Отв.** $\frac{3}{4(1-t)}$.

6. Выполнятся ли теорема Ролля для функции $f(x)=\frac{1}{x^2}$ на отрезке $[-1,1]$?

Отв. Нет.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. **Отв. а)** 1; **б)** $e^{1/3}$.

8. а) $f(x)=\operatorname{tg} x$, $x_0=0$, до члена с x^5.

б) $\sqrt[5]{250}$; ε = 0,0001; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$.

Отв. а) $f(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right)$; **б)** 3,0171; в) $-\frac{1}{12}$.

9. $f(x)=\sqrt{5-4x}$, $[-1,1]$. **Отв.** $f(1)=1-$наименьшее значение, $f(-1)=3-$наибольшее.

10. а) $f(x)=\frac{x}{(1-x^2)^2}$; б) $f(x)=\frac{e^x}{1+x}$.

11. а) $\vec{r}=(2t)\vec{i}+(t-7)\vec{j}$; б) $\vec{r}=\left(\frac{1}{\cos t}\right)\vec{i}+(\operatorname{tg} t)\vec{j}+2t\vec{k}$, $t_0=\pi$.

Отв. а) прямая $x-2y-14=0$; **б)** $\frac{x+1}{0}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2\pi}{-1}$, $\quad -y+2z-4\pi=0$.

Вариант 3

1. $f(x)=\begin{cases} 2x+\ln\left(1+x^4\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right), & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$ **Отв.** 2.

2. а) $f(x)=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **Отв.** $\frac{1}{\sin x}$.

б) $f(x)=(x+1)^{\frac{1}{\sin x}}$. **Отв.** $\dfrac{\sin x-(x+1)\cos x\ln(x+1)}{(x+1)\sin^2 x}\cdot(x+1)^{\frac{1}{\sin x}}$.

в) $y=x^2+\operatorname{arctg}(xy)$. **Отв.** $\dfrac{2x+2x^3y^2+y}{1+x^2y^2-x}$.

г) $\begin{cases} x=\sin^2 t, \\ y=\cos^2 t. \end{cases}$ **Отв.** -1.

3. а) Найти расстояние от начала координат до нормали к линии $y=e^{2x}+x^2$, проведенной в точке $x=0$. **Отв.** $2/\sqrt{5}$.

б) Зависимость пути от времени задана уравнением $S(t)=t\ln(t+1)$. Найти скорость движения в конце 2-ой секунды.

Отв. 1,76 м/сек.

4. $y=\cos x$ при $x=151^{\circ}$. **Отв.** $-0{,}875$.

5. а) $y=\dfrac{1}{x(1-x)}$. **Отв.** $n!\left(\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}+\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}\right)$.

б) $y^2=2px, \quad y''_{xx}-?$ **Отв.** $-\dfrac{p^2}{y^3}$.

в) $\begin{cases} x=1+e^{at}, \\ y=at+e^{-at}, \quad y''_{xx}-? \end{cases}$ **Отв.** $2e^{-3at}-e^{-2at}$.

6. Для функций $f(x)=x^2+2$ и $F(x)=x^3-1$ проверить выполнение условий теоремы Коши на отрезке $[1,2]$ и найти x. **Отв.** $\dfrac{14}{9}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$. **Отв. а)** ∞; **б)** 1.

8. а) $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=1$, до члена с $(x-1)^2$.

б) $\arcsin 20^{\circ}$; ε = 0,001; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\ln(1+x)}{e^x-1-x}$.

Отв. а) $1+\dfrac{1}{2}(x-1)-\dfrac{1}{8}(x-1)^2+o(x-1)^2$; **б)** 0,304; **в)** 1.

9. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}, \quad [0,4]$. **Отв.** $f(0)=-\dfrac{1}{2}$ – наименьшее значение, $f(4)=4{,}5$ – наибольшее.

10. а) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-7}{x+2}$; б) $f(x)=x^3e^{-4x}$.

11. а) $\vec r=\left(t^2+t+2\right)\vec i+\left(t^2+t+1\right)\vec j$; б) $\vec r=\dfrac{1}{\cos t}\vec i+\dfrac{\sin t}{\cos t}\vec j+at\vec k$, $t_0=\dfrac{\pi}{4}$.

Отв. а) часть прямой $x-y-1=1$ для $x>0$, $y>0$;

б) $\dfrac{x-\sqrt2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-a\pi/4}{a}$, $8x+8y+4az-\left(4\sqrt2+8+a^2\pi\right)=0$.

Вариант 4

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(1+2x^2+x^3\right)}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ **Отв.** 2.

2. а) $f(x)=\dfrac12\ln(1+x)-\dfrac14\ln(1+x^2)-\dfrac{1}{2(1+x)}$. **Отв.** $\dfrac{1}{(1+x)^2(1+x^2)}$.

б) $f(x)=\sqrt[x]{x}$. **Отв.** $\sqrt[x]{x}\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

в) $\sqrt{x^2+y^2}=c\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}$. **Отв.** $y'_x=\dfrac{cy+x\sqrt{x^2+y^2}}{cx-y\sqrt{x^2+y^2}}$.

г) $\begin{cases}x=e^{-t},\\ y=e^{2t}.\end{cases}$ **Отв.** $-2e^{3t}$.

3. а) Под каким углом кривая $y=\ln x$ пересекает ось OX? **Отв.** $\dfrac{\pi}{4}$.

б) В какой точке параболы $y^2=18x$ ордината возрастает вдвое скорее, чем абсцисса? **Отв.** $\left(\dfrac98;\dfrac92\right)$.

4. $y=\arcsin x$ при $x=0{,}45$. **Отв.** $0{,}499$.

5. а) $y=x^4e^x$. **Отв.** $e^x\left(x^n+n^2x^{n-1}+\dfrac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}+\ldots+n!\right)$.

б) $x^2-xy+y^2=15$, $y''_{xx}-?$ **Отв.** $\dfrac{6}{(x-2y)^3}$.

в) $\begin{cases}x=t^2+2t,\\ y=\ln(t+1), \quad y''_{xx}-?\end{cases}$ **Отв.** $-\dfrac{1}{2(t+1)^4}$.

6. Для функций $f(x)=\sin x$ и $F(x)=\cos x$ проверить выполнение условий теоремы Коши на отрезке $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ и найти x. **Отв.** $\dfrac{\pi}{4}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$. **Отв. а)** 1; **б)** 1.

8. а) $f(x)=e^{2x-x^2}$, $x_0=0$, до члена с x^3.

б) $\operatorname{arctg}0{,}2$**;** $e=0{,}001$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-\cos x}$.

Отв. а) $f(x)=1+2x+x^2+-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{x^4}{3!}+o\left(x^3\right)$; **б)** $0{,}197$; **в)** 1.

9. $f(x)=\sqrt{5-4x},\ \ [-1,1]$. **Отв.** $f(1)=1-$ наименьшее значение, $f(-1)=3-$ наибольшее.

10. а) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4x-5}$; б) $f(x)=x^3e^{-x}$.

11. а) $\vec{r}=(2\operatorname{ch}t)\vec{i}+(7\operatorname{sh}t)\vec{j}$; б) $\vec{r}=t\,\vec{i}+t^2\vec{j}+2t^3\vec{k},\ t=1$.

Отв. а) гипербола $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{49}=1$. **б)** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{6}$, $x+2y+6z-13=0$.

Вариант 5

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ **Отв.** 4.

2. а) $f(x)=e^x\left(1+\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)$. **Отв.** $\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}$.

б) $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$. **Отв.** $\dfrac{3x^2+5}{3(x^2+1)}\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$.

в) $\ln y+\dfrac{x}{y}=c$. **Отв.** $y'_x=\dfrac{y}{x-y}$.

г) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{t+1},\\ y=\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2.\end{cases}$ **Отв.** $\dfrac{-2t}{t+1}$.

3. а) Найти угол, под которым пересекаются прямая $x+y-4=0$ и парабола $2y=8-x^2$. **Отв.** $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$.

б) Одна сторона прямоугольника увеличивается со скоростью $V_1=2$, а другая со скоростью $V_2=3$. С какой скоростью увеличивается его площадь в момент, когда одна сторона 20, а другая 50? **Отв.** 160.

4. $y = \mathrm{tg}x$ при $x = 43^{\circ}$. **Отв.** $0{,}930$.

5. а) $y = e^x \cos x$. **Отв.** $e^x 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(x + \frac{pn}{4}\right)$.

б) $x^2 + y^2 = 4, \quad y''_{xx} - ?$ **Отв.** $-\frac{4}{y^3}$.

в) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \quad y''_{xx} - ? \end{cases}$ **Отв.** $\frac{-2e^t}{(\cos t + \sin t)^3}$.

6. Выполняется ли теорема Ролля для функции $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ на $[-1,1]$?

Отв. Нет.

7. а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x}{\mathrm{ctg}x} - \frac{p}{2\cos x} \right)$. **Отв. а)** 0; **б)** -1.

8. а) $f(x) = \sin^2 x,\ x_0 = 0$, до члена с x^6.

б) $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$; $e = 0{,}01$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{\ln(1+x) - x}$.

Отв. а) $f(x) = \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} + o\left(x^6\right)$; **б)** $0{,}78$; **в)** -2.

9. $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad [0{,}01; 100]$. **Отв.** $f(1) = 2 -$ наименьшее значение,

$f(0{,}01) = f(100) = 100{,}01 -$ наибольшее.

10. а) $f(x) = \frac{x}{(1 - x^2)^2}$; б) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}$.

11. а) $\vec{r} = \left(\frac{3}{\sin t} \right) \vec{i} - \left(\frac{4\cos t}{\sin t} \right) \vec{j}$; б) $\vec{r} = (t\cos t)\vec{i} + (t\sin t)\vec{j} + 2t\vec{k},\ t_0 = p$.

Отв. а) гипербола $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. б) $\frac{x + p}{-1} = \frac{y}{-p} = \frac{z - 2p}{2}$, $\quad x + p\ y - 2z + 3p\ = 0$.

Вариант 6

1. $f(x) = \begin{cases} \mathrm{arctg}\left(x^2 \cos^2 \frac{1}{5x} \right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ **Отв.** 4.

2. а) $f(x) = \frac{1}{4(1 + x^4)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{1 + x^4}$. **Отв.** $\frac{x}{x^4 - 1}$.

б) $f(x) = (\mathrm{arctg}x)^x$. **Отв.** $(\mathrm{arctg}x)^x \left(\frac{x}{(1 + x^2)\mathrm{arctg}x} + \ln(\mathrm{arctg}x) \right)$.

в) $x^3 + x^2y + y^2 = 0$. **Отв.** $y'_x = -\dfrac{x(3x+2y)}{x^2+2y}$.

г) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}. \end{cases}$ **Отв.** $\dfrac{2}{3\sqrt[6]{t}}$.

3. а) Доказать, что касательные, проведенные к гиперболе $y = \dfrac{x-4}{x-2}$ в точке ее пересечения с осями координат, параллельны между собой.

б) Точка движется по прямой $y = 2x + 7$ так, что абсцисса убывает с постоянной скоростью $V = -2$. Какова скорость изменения ординаты? **Отв.** -4.

4. $y = \operatorname{arctg} x$ при $x = 0{,}98$. **Отв.** $0{,}775$.

5. а) $y = \cos^3 x$. **Отв.** $\dfrac{3}{4}\cos\left(x + \dfrac{pn}{2}\right) + \dfrac{3^n}{4}\cos\left(3x + \dfrac{pn}{2}\right)$.

б) $x^2 + y^2 = 144, \quad y''_{xx} - ?$ **Отв.** $-\dfrac{144}{y^3}$.

в) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^2, \quad y''_{xx} - ? \end{cases}$ **Отв.** $\dfrac{3}{4(1-t)}$.

6. Функция $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ на концах отрезка $[0, 4]$ принимает равные значения $f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4}$. Справедлива ли для этой функции теорема Ролля на отрезке $[0, 4]$?

Отв. Нет.

7. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-x}{1 - \sin \dfrac{px}{2}}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. **Отв. а)** ∞; **б)** $\dfrac{1}{e}$.

8. а) $f(x) = x^3 - 2x^2 + +3x + 5, \; x_0 = 2$.

б) $\sin 1^{\mathbf{0}}$; $e = 0{,}001$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos x}{\cos x - 1}$.

Отв. а) $f(x) = 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 - (x-2)^3$; **б)** $0{,}017$; **в)** 3.

9. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11, \; [0, 5]$. **Отв.** $f(3) = -16$ – наименьшее значение, $f(5) = 16$ – наибольшее.

10. а) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$; б) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

11. а) $\vec{r} = (2+t)\,\vec{i} + (3-2t)\,\vec{j}$; б) $\vec{r} = (2\sin t)\,\vec{i} + (\cos t)\,\vec{j} + 4t\,\vec{k}, \; t_0 = p$.

Отв. а) прямая $2x + y - 7 = 0$.

б) $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+1}{0} = \dfrac{z - 4p}{4}, \quad x - 2z + 8p = 0$.

Вариант 7

1. $f(x)=\begin{cases} x^2\cos^2\dfrac{11}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$ **Отв.** 0.

2. а) $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\ln\dfrac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. **Отв.** $\dfrac{1}{3x^2-2}$.

б) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$. **Отв.** $\dfrac{x^2-4x+2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}$.

в) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$. **Отв.** $y'_x=\dfrac{x+y}{x-y}$.

г) $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=b\sin^3 t. \end{cases}$ **Отв.** $-\dfrac{b}{a}\operatorname{tg}t$.

3. а) Найти значение независимой переменной, при котором касательная к кривой $y=\ln x$ параллельна прямой $y=x-1$. **Отв.** $x=1$.

б) С какой скоростью изменяется объем шара, если его радиус r изменяется со скоростью V? **Отв.** $4p\,r^2V$.

4. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при $x=29^{\circ}$. **Отв.** $0{,}437$.

5. а) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$. **Отв.** $4^{n-1}\cos\left(4x+\dfrac{pn}{2}\right)$.

б) $y=x+\ln y,\quad y''_{xx}-?$ **Отв.** $\dfrac{y}{(1-y)^3}$.

в) $\begin{cases} x=\arccos t, \\ y=\ln(1-t)^2, \end{cases}\quad y''_{xx}-?$ **Отв.** $-\dfrac{2}{\sqrt{1-t^2}}$.

6. Для отрезка параболы $y=x^2$, заключенного между $A(1;1)$ и $B(3;9)$ найти точку, касательная к которой параллельна хорде AB. **Отв.** $(2;4)$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{4}}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-2\operatorname{tg}x}{1+\cos 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$. **Отв. а)** $\dfrac{1}{2}$; **б)** $\dfrac{1}{e}$.

8. а) $f(x)=1+5x+3x^2+4x^3,\ x_0=1$.

б) $\lg 11;\ e=0{,}001$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$.

Отв. а) $f(x)=13+23(x-1)+15(x-1)^2+4(x-1)^3$; **б)** $1{,}041$; в) $-\dfrac{1}{3}$.

9. $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$, $[-2,0]$. **Отв.** $f(-1)=-1-$ наименьшее значение, $f(0)=0-$ наибольшее.

10. а) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; б) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

11. а) $\vec r=\left(\dfrac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}\right)\vec i+5\left(\dfrac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}\right)\vec j$; б) $\vec r=t\,\vec i+t^3\,\vec j+2t\,\vec k$, $t=2$.

Отв. а) гипербола $\dfrac{y^2}{25}-x^2=1$.

б) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-8}{12}=\dfrac{z-4}{2}$, $x+12y+2z-104=0$.

Вариант 8

1. $f(x)=\begin{cases}3^{x^2\sin\frac{2}{x}}-1+2x, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ **Отв.** 2.

2. а) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$. **Отв.** $\dfrac{2x^2}{1-x^6}\sqrt{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

б) $f(x)=x^{\sqrt{x}}$. **Отв.** $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}\ln x\right)$.

в) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. **Отв.** $y'_x=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$.

г) $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t).\end{cases}$ **Отв.** $\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$.

3. а) На параболе $y=x^2$ взяты две точки с абсциссами $x_1=1$, $x_2=3$. Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней будет параллельна проведенной секущей? **Отв.** $x=2$.

б) Точка движется по прямой $y=2x+3$ так, что абсцисса возрастает с постоянной скоростью $V=3$. Какова скорость изменения ординаты? **Отв.** 6.

4. $y=3^x$ при $x=0{,}2$. **Отв.** $1{,}22$.

5. а) $y=\sin ax\sin bx$. **Отв.** $\dfrac{(a-b)^n}{2}\cos\left((a-b)x+\dfrac{pn}{2}\right)-\dfrac{(a+b)^n}{2}\cos\left((a+b)x+\dfrac{pn}{2}\right)$.

б) $x^2+5xy+y^2-2x-6=0$, $y''_{xx}-?$ **Отв.** $\dfrac{16y-16xy'-4y'-10}{(5x+2y)^2}$.

в) $\begin{cases}x=t+\cos t,\\ y=2-\sin t,\end{cases}$ $y''_{xx}-?$ **Отв.** $-\dfrac{1}{(1-\sin t)^2}$.

6. Проверить выполнение условий теоремы Лагранжа и найти соответствующую промежуточную точку x для функции $f(x) = x^{4/3}$ на $[-1,1]$. **Отв.** 0.

7. а) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}} \dfrac{\text{tg}x}{\text{tg}5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}$. **Отв. а)** 5; **б)** 1.

8. а) $f(x) = \text{arctg}x,\ x_0 = 0$ до члена с x^7.

б) $\sqrt{5}$; $e = 0{,}0001$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}}$.

Отв. а) $f(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$; **б)** 2,2361; **в)** -1.

9. $f(x) = x\sqrt[3]{x-1},\ [1,2]$. **Отв.** $f(1) = 0$ – наименьшее значение, $f(2) = 2$ – наибольшее.

10. а) $f(x) = \dfrac{x^4+3}{x}$; б) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

11. а) $\vec{r} = \left(2\sin^2 t\right)\vec{i} + \left(\cos^2 t\right)\vec{j}$; б) $\vec{r} = e^{2t}\vec{i} + e^{2t}\vec{j} + 3t\vec{k},\ t_0 = 0$.

Отв. а) Отрезок прямой $\dfrac{x}{2} + y = 1$, заключенный между координатными осями.

б) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{3}$, $2x + 2y + 3z - 4 = 0$.

Вариант 9

1. $f(x) = \begin{cases} arctgx^5 \cdot \sin\dfrac{7}{x}, & x \neq 0; \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$ **Отв.** 0.

2. а) $f(x) = \sin\left(\cos^2 x\right)\cdot\cos\left(\sin^2 x\right)$. **Отв.** $-2\sin 2x\cos(\cos 2x)$.

б) $f(x) = \dfrac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$. **Отв.** $\dfrac{(x-2)^8\left(x^2-7x+1\right)}{(x-1)(x-3)\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$.

в) $y - 0{,}3\sin y = x$. **Отв.** $y'_x = \dfrac{10}{10 - 3\cos y}$.

г) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1}, \\ y = \dfrac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}. \end{cases}$ **Отв.** $\dfrac{t+1}{t(t^2+1)}$.

3. а) В какой точке кривой $y^2 = 2x^3$ касательная перпендикулярна к прямой $4x - 3y + 2 = 0$? **Отв.** $\left(\dfrac{1}{8}; -\dfrac{1}{16}\right)$.

б) Тело, брошенное вверх, движется по закону $S=-4{,}905t^2+981t+950$ (S – в м, t – в сек.). В какой момент времени t его скорость будет равной 0?

Отв. 100 с.

4. $y=\sqrt[3]{x}$ при $x=9$. **Отв.** $2{,}083$.

5. а) $y=\cos ax\cos bx$. **Отв.** $\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left((a-b)x+\frac{pn}{2}\right)+\frac{(a+b)^n}{2}\cos\left((a+b)x+\frac{pn}{2}\right)$.

б) $x^2-xy+y^2=1,\quad y''_{xx}-?$ **Отв.** $\frac{6}{(x-2y)^3}$.

в) $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\ln\cos t,\quad y''_{xx}-?\end{cases}$ **Отв.** $-\frac{1+\sin^2 t}{\cos^4 t}$.

6. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ на $[1,2]$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-x}{x\text{-}\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^x$. **Отв. а)** 2; **б)** 1.

8. а) $f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4,\ x_0=4$;

б) $\cos 9^{\mathbf{0}}$; $e=0{,}001$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\ln\left(1+x^3\right)}$.

Отв. а) $f(x)=-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4$; **б)** $0{,}987$; **в)** $\frac{1}{6}$.

9. $f(x)=x^2-x^3,\ [-1,1]$. **Отв.** $f(-1)=f(0)=0$ – наименьшее значение, $f(1)=2$ – наибольшее.

10. а) $f(x)=\frac{4x}{4+x^2}$; б) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$.

11. а) $\vec r=\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}\vec i+\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\vec j$; б) $\vec r=\left(e^t\cos t\right)\vec i+\left(e^t\sin t\right)\vec j+e^t\vec k,\ t_0=0$.

Отв. а) полуокружность $y=\sqrt{4-x^2}$. **б)** $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$, $x+y+z-2=0$.

Вариант 10

1. $f(x)=\begin{cases}e^{x^2\sin 5x}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ **Отв.** 1.

2. а) $f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$. **Отв.** $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

б) $f(x)=x^{x^2}$. **Отв.** $x^{x^2+1}(1+2\ln x)$.

в) $\mathrm{tg}y=xy$. **Отв.** $y'_x=\frac{y\cos^2 y}{1-x\cos^2 y}$.

г) $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases}$ **Отв.** $\dfrac{-2}{1-t^2}$.

3. а) Найти точки, в которых касательные к кривой $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ параллельны оси абсцисс. **Отв.** $(0; 20); (1; 15); (-2; -12)$.

б) Тело, брошенное вверх, движется по закону $S = -4{,}905t^2 + 98{,}1t + 950$ (S – в м, t – в сек.). На какую высоту поднимется тело, когда его скорость станет равной 0? **Отв.** $H = 500$ м.

4. $y = \sqrt[5]{x}$ при $x = 33$. **Отв.** $2{,}012$.

5. а) $y = \sin ax \cos bx$. **Отв.** $\dfrac{(a-b)^n}{2}\sin\left((a-b)x + \dfrac{\pi n}{2}\right) + \dfrac{(a+b)^n}{2}\sin\left((a+b)x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$.

б) $x^2 + y^2 = 25, \quad y''_{xx} - ?$ **Отв.** $-\dfrac{25}{y^3}$.

в) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad y''_{xx} - ?$ **Отв.** $-\dfrac{1}{a\sin^3 t}$.

6. Выполнимы ли условия теоремы Ролля на отрезке $[0, \pi]$ для функции $y = \operatorname{tg} x$?

Отв. Нет.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$. **Отв.** а) $-\dfrac{1}{3}$; б) 1.

8. а) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x_0 = 4$, до члена с x^2. б) $\ln 1{,}05$; $\varepsilon = 0{,}001$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

Отв. а) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}x^2 + o\left(x^2\right)$; **б)** $0{,}049$; **в)** $\dfrac{1}{3}$.

9. $f(x) = xe^{5x}$, $[0, 5]$. **Отв.** $f\left(-\dfrac{1}{5}\right) = -\dfrac{1}{5e}$ – наименьшее значение,

$f(0) = 0$ – наибольшее.

10. а) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$; б) $f(x) = \left(2 + x^2\right)e^{-x^2}$.

11. а) $\vec{r} = (\operatorname{sh} t)\vec{i} + (2\operatorname{ch} t)\vec{j}$; б) $\vec{r} = (\sin t)\vec{i} + \left(\cos^2 t\right)\vec{j} + (\cos t)\vec{k}$, $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Отв. а) гипербола $\dfrac{y^2}{4} - x^2 = 1$. **б)** $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{-1}$, $\quad z = 0$.

Вариант 11

1. $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{1 - 2x^3 \sin\dfrac{5}{x}} - 1 + x, & x \ne 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ **Отв.** 1.

2. а) $f(x)=\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. **Отв.** $\dfrac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$.

б) $f(x)=x^{x^{x}}$. **Отв.** $x^{x^{x}}\cdot x^{x}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x+\ln^{2}x\right)$.

в) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$. **Отв.** $y'_x=-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

г) $\begin{cases} x=a\cos^{2}t, \\ y=b\sin^{2}t. \end{cases}$ **Отв.** $-\dfrac{b}{a}$.

3. а) Под какими углами пересекаются кривые $y=x^{2}$ и $x=y^{2}$? **Отв.** $\dfrac{p}{2}$.

б) Зависимость пути от времени задана уравнением $S=t\ln(t+1)$. Найти скорость движения в конце 2-ой секунды. (t задано в секундах, S – в метрах).

Отв. 1,76 м/сек.

4. $y=\cos x$ при $x=59^{\circ}$. **Отв.** $0{,}52$.

5. а) $y=\sin^{3}x$. **Отв.** $\dfrac{3}{4}\sin\left(x+\dfrac{pn}{2}\right)-\dfrac{3^{n}}{4}\sin\left(3x+\dfrac{pn}{2}\right)$.

б) $x+xy+y^{2}=5,\quad y''_{xx}-?$ **Отв.** $\dfrac{y-xy'+1}{(x+2y)^{2}}$.

в) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t}, \\ y=\dfrac{1}{1+t^{2}}, \quad y''_{xx}-? \end{cases}$ **Отв.** $\dfrac{t^{4}\left(2t^{2}-6\right)}{\left(1+t^{2}\right)^{3}}$.

6. Выполнимы ли условия теоремы Ролля на отрезке $\left[-\dfrac{p}{2},\dfrac{p}{2}\right]$ для функции $f(x)=\operatorname{ctg}x$? **Отв.** Нет.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{p}{x}}{\operatorname{ctg}\frac{p\,x}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$. **Отв.** а) $\dfrac{p^{2}}{2}$; б) 1.

8. а) $f(x)=\operatorname{tg}x,\ x_0=0$, до члена с x^{3}. б) $\sin 20^{\circ}$; $e=0{,}001$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\operatorname{arctg}x-\sin x}$.

Отв. а) $f(x)=x+\dfrac{x^{3}}{3}+o\left(x^{3}\right)$; **б)** $0{,}342$; **в)** 1.

9. $f(x)=xe^{3x},\ [-2,0]$. **Отв.** $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{3e}$ – наименьшее значение, $f(0)=0$ – наибольшее.

10. а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$; б) $f(x)=e^{8x-x^2-14}$.

11. а) $\vec r=(a\,\mathrm{ch}\,t)\vec i+(b\,\mathrm{sh}\,t)\vec j$; б) $\vec r=t\vec i+t^2\vec j+t^3\vec k$, $t_0=1$.

Отв. а) гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. **б)** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$, $x+2y+3z-3=0$.

Вариант 12

1. $f(x)=\begin{cases}\arcsin\left(x^2\cos\dfrac{1}{8x}\right)+\dfrac{2}{3}x, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ **Отв.** $\dfrac{2}{3}$.

2. а) $f(x)=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}\quad(a>0)$. **Отв.** $\sqrt{a^2-x^2}$.

б) $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$. **Отв.** $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}\right)$.

в) $a\cos^2(x+y)=b$. **Отв.** $y'_x=-1$.

г) $\begin{cases}x=2t-1,\\ y=t^3.\end{cases}$ **Отв.** $\dfrac{3}{2}t^2$.

3. а) Под какими углами пересекаются кривые $y=\sin x$ и $y=\cos x$? **Отв.** $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$.

б) Точка движется по гиперболе $y=\dfrac{10}{x}$ так, что ее абсцисса растет равномерно со скоростью 1 м/с. С какой скоростью изменяется ее ордината в положении $(5;2)$?

Отв. $-0{,}4$ м/сек.

4. $y=\lg x$ при $x=12$. **Отв.** $1{,}04$.

5. а) $y=\cos^2 x$. **Отв.** $2^{n-1}\cos\left(2x+\dfrac{pn}{2}\right)$.

б) $x^2+y^2=16$, $y''_{xx}-?$ **Отв.** $-\dfrac{16}{y^3}$.

в) $\begin{cases}x=\sqrt{2}t,\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}},\end{cases}\quad y''_{xx}-?$ **Отв.** $\dfrac{3(t^2+1)}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$.

6. Пусть $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-5)$. Показать, что уравнение $f'(x)=0$ имеет три действительных корня.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$. **Отв. а)** 0; **б)** 1.

8. а) $f(x) = xe^x$, $x_0 = 0$, до члена с x^5. б) $\sqrt{e}$; $e = 0{,}01$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

Отв. а) $f(x) = x + x^2 + \dfrac{x^3}{2!} + \dfrac{x^4}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)$; **б)** $1{,}65$; **в)** $-\dfrac{1}{12}$.

9. $f(x) = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$, $[-3, -2]$. **Отв.** $f(-3) = -4{,}5$ – наименьшее значение,

$f(-2) = 8$ – наибольшее.

10. а) $f(x) = x^3 - 3x^2$; б) $f(x) = xe^{-x}$.

11. а) $\vec{r} = (3\cos t)\vec{i} + (4\sin t)\vec{j}$; б) $\vec{r} = (2\cos t)\vec{i} + (2\sin t)\vec{j} + 4t\vec{k}$, $t_0 = \dfrac{p}{2}$.

Отв. а) эллипс $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. **б)** $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z - 2p}{4}$, $x - 2z + 4p = 0$.

Вариант 13

1. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x^2 + x^2 \sin \dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ **Отв.** 0.

2. а) $f(x) = \ln \dfrac{x + a}{\sqrt{x^2 + b^2}} + \dfrac{a}{b} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{b}$. **Отв.** $\dfrac{a^2 + b^2}{(x + a)\left(x^2 + b^2\right)}$.

б) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$. **Отв.** $(\cos x)^{\sin x}(\cos x \ln \cos x - \sin x \operatorname{tg} x)$.

в) $e^y = x + y$. **Отв.** $y'_x = \dfrac{1}{e^y - 1}$.

г) $\begin{cases} x = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1 + t^2}}, \\ y = \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1 + t^2}}, \ t > 0. \end{cases}$ **Отв.** 1.

3. а) В каких точках кривой $y = 2 + x - x^2$ касательная к ней параллельна биссектрисе первого координатного угла? **Отв.** $(0; 2)$.

б) С какой скоростью изменяется площадь поверхности шара, если его радиус r меняется со скоростью V? **Отв.** $8p\ rV$.

4. $y = \operatorname{arctg} x$ при $x = 1{,}04$. **Отв.** $0{,}805$.

5. а) $y = \sin^2 x$. **Отв.** $-2^{n-1} \cos\left(2x + \dfrac{pn}{2}\right)$.

б) $y^2 + 3\ln y = x^3$, y''_{xx} – ? **Отв.** $\dfrac{3xy}{y^3}\left(2 - \dfrac{3x^3}{2y^2 + 3}\right)$.

в) $\begin{cases} x=\sin 2t, \\ y=\dfrac{2}{\sin^2 t}, \quad y''_{xx}-? \end{cases}$ **Отв.** $-\dfrac{1}{\cos^3 2t}$.

6. Функция $f(x)=\sqrt[5]{(x-2)^4}$ на концах отрезка $[0,4]$ принимает одинаковые значения $f(0)=f(4)=\sqrt[5]{16}$. Справедлива ли для этой функции теорема Ролля на $[0,4]$?

Отв. Нет.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{1-\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{px}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{px}{2}}$. **Отв. а)** 1; **б)** $\dfrac{1}{e}$.

8. а) $f(x)=1+3x+5x^2-2x^3,\ x_0=-1$. б) $\sqrt[4]{19};\ e=0{,}001$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\operatorname{tg}x-\sin x}{e^{4x}-e^{2x}}$.

Отв. а) $f(x)=5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3$; **б)** 2,087; **в)** $\dfrac{1}{2}$.

9. $f(x)=2^x,\ [-1,5]$. **Отв.** $f(-1)=\dfrac{1}{2}-$наименьшее значение, $f(5)=32-$наибольшее.

10. а) $f(x)=\dfrac{4x}{4+x^2}$; б) $f(x)=x\operatorname{arctg}x$.

11. а) $\vec r=(a\cos t)\vec i+(b\sin t)\vec j$; б) $\vec r=e^t\vec i+e^{-t}\vec j+t^2\vec k,\ t_0=0$.

Отв. а) эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. **б)** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{0}$, $x-y=0$.

Вариант 14

1. $f(x)=\begin{cases} 2(1-\cos 2x)+\sin\left(x^2\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x}\right), & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$ **Отв.** 0.

2. а) $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}+\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$. **Отв.** $\dfrac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$.

б) $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$. **Отв.** $\dfrac{54-36x+4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}$.

в) $y^3=\dfrac{x-y}{x+y}$. **Отв.** $y'_x=\dfrac{2y^2}{3(x^2-y^2)+2xy}$.

г) $\begin{cases} x=3t+1, \\ y=t^2. \end{cases}$ **Отв.** $\dfrac{2t}{3}$.

3. а) Найти угловой коэффициент касательной к $x^3+y^2-xy-7=0$ в точке $(1;2)$.

Отв. $k=-\dfrac{1}{3}$.

б) Две точки движутся по прямой по законам $S_1 = t^3 - 5t^2 - 17t - 4$, $S_2 = t^3 - 3t$. В какой момент времени их скорости равны? **Отв.** $t = 2$.

4. $y = e^x$ при $x = 0{,}1$. **Отв.** $1{,}1$.

5. а) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$. **Отв.** $\dfrac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(1-2x)^{n+1/2}}$.

б) $x^2 - xy + y^2 = 17, \quad y''_{xx} - ?$ **Отв.** $\dfrac{6}{(x-2y)^3}$.

в) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t, \quad y''_{xx} - ? \end{cases}$ **Отв.** $\dfrac{1}{t\cos^2 t}$.

6. Пусть $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$. Показать, что уравнение $f'(x) = 0$ имеет три действительных корня.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$. **Отв. а)** 0; **б)** $\dfrac{1}{5}$.

8. а) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5,\ x_0 = 3$. б) $\sqrt[5]{33}$; $e = 0{,}001$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1 - \sin x}{\cos x - 1}$.

Отв. а) $f(x) = -4 + 3(x-3) + 5(x-3)^2 - (x-3)^3$; **б)** $2{,}012$; **в)** -1.

9. $f(x) = 3^x$, $[-1, 5]$. **Отв.** $f(-1) = \dfrac{1}{3}$ – наименьшее значение,

$f(5) = 243$ – наибольшее.

10. а) $f(x) = \dfrac{(x^2-5)^3}{125}$; б) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{4-x^2}}$.

11. а) $\vec{r} = \dfrac{a}{\sqrt{1+t^2}}\vec{i} + \dfrac{at}{\sqrt{1+t^2}}\vec{j}$; б) $\vec{r} = e^t\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + t^2\vec{k},\ t_0 = 1$.

Отв. а) полуокружность $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

б) $\dfrac{x-e}{e} = \dfrac{y-e^{-1}}{-e^{-1}} = \dfrac{z-1}{2}, \quad e^3x - ey - 2e^2z - e^4 - 2e^2 + 1 = 0$.

Вариант 15

1. $f(x) = \begin{cases} \sin x + \operatorname{arctg}\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right), & x \ne 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ **Отв.** 1.

2. а) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$. **Отв.** $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

б) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. **Отв.** $\dfrac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}$.

в) $\operatorname{arctg}(x+y) = x$. **Отв.** $y'_x = (x+y)^2$.

г) $\begin{cases} x = \dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, \\ y = \dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}. \end{cases}$ **Отв.** $-\operatorname{tg}3t$.

3. а) В каких точках кривой $y = 2 + x - x^2$ касательная к ней параллельна оси абсцисс? **Отв.** $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{9}{4}\right)$.

б) Точка движется по дуге окружности (в I квадранте) $x^2 + y^2 = 100$ так, что ордината возрастает с постоянной скоростью $V = 2$. Найти скорость изменения абсциссы в момент, когда ордината равна 6. **Отв.** $-1{,}5$.

4. $y = \sin x$ при $x = 29^{\circ}$. **Отв.** $0{,}485$.

5. а) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$. **Отв.** $(-1)^n n!\left(\dfrac{1}{(x-2)^{n+2}} - \dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$.

б) $y^2 + 2\ln y = x^4,\quad y''_{xx} - ?$ **Отв.** $\dfrac{2x^2 y}{\left(1+y^2\right)^3}\left(\left(1+y^2\right)^2 + 2x^4\left(1-y^2\right)\right)$.

в) $\begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t, \qquad y''_{xx} - ? \end{cases}$ **Отв.** $\dfrac{-(4\sin 2t + 2\cos 2t)}{(\cos t - \sin t)^2}$.

6. Выполнимы ли условия теоремы Ролля на отрезке $[0, 2p]$ для функции $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$? **Отв.** Нет.

7. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x - 2}{x^3 - 7x + 6}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{5}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$. **Отв. а)** 0; **б)** $\dfrac{1}{5}$.

8. а) $f(x) = \operatorname{ch}x,\ x_0 = 0$ до члена с x^4. б) $\operatorname{tg}18^{\circ}$; $e = 0{,}001$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{3x}}{\sin 3x - \operatorname{tg}2x}$.

Отв. а) $f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)$; **б)** $0{,}324$; в) -2.

9. $f(x) = 4x^2 - 8x - 5,\ [0, 2]$. **Отв.** $f(1) = -9$ – наименьшее значение,
$f(0) = f(2) = -5$ – наибольшее.

10. а) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$; б) $f(x) = x^2 \ln(x+2)$.

11. а) $\vec{r} = \left(t^2 - 2t + 3\right)\vec{i} + \left(t^2 - 2t + 1\right)\vec{j}$; б) $\vec{r} = \left(e^t \cos t\right)\vec{i} + \left(e^t \sin t\right)\vec{j} + e^t \vec{k},\ t_0 = 0$.

Отв. а) часть прямой $x - y - 2 = 0$, где $x \ge 2$. **б)** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-1}{1}$, $\quad x + z - 2 = 0$.

Литература

1. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика (Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной).– Мн.: Выш. шк., 1992. – 384 с.

2. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: Учебное пособие для вузов /Под ред. Л.Д. Кудрявцева. – М.: Наука, 1984. – 592 с.

3. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах (Функции одной переменной). – М.: Наука, 1973. – 400 с.

Св. план 2006, поз. 69

Учебное издание

Карпук Андрей Андреевич
Жевняк Ростислав Михайлович
Цегельник Владимир Владимирович
Назарова Ирина Владимировна

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для студентов радиотехнических специальностей БГУИР
всех форм обучения

В 10 частях

Часть 4

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Ответственный за выпуск А. А. Карпук

Подписано в печать 27.09.2006.	Формат 60x84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».	Печать ризографическая.	Усл. печ. л. 6,39.
Уч.-изд. л. 4,9.	Тираж 500 экз.	Заказ 72.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП №02330/0131666 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6