УДК 378

МЕТОДИЧЕСКИЙ ПРИЕМ АКТИВИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Мокеева Ольга Александровна,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики
Белорусского государственного университета
информатики и радиоэлектроники,
г. Минск, Республика Беларусь.
E-mail: mokeeva@tut.by

Мокеева Светлана Александровна,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики
Белорусского государственного университета,
г. Минск, Республика Беларусь

Аннотация

В статье представлено методическое пособие для самостоятельной работы студентов. Самостоятельная работа студентов – это такой вид учебной деятельности, в ходе которй студент приобретает и совершенствует знания, умения и навыки.

Ключевые слова: самостоятельная работа; высшая математика; определенный интеграл.

METHODICAL RECEPTION ACTIVATION OF INDEPENDENT WORK OF STUDENTS

Mokeeva Olga,
candidate of physico-mathematical sciences, associate professor, associate professor of the department of higher mathematics of Belarusian state university of informatics and radioelectronics.
Minsk, Belarus.
E-mail: mokeeva@tut.by

Mokeeva Svetlana,
Candidate of physico-mathematical sciences, associate professor, associat professor of the department of higher mathematics of Belarusian state university.
Minsk, Belarus

Abstract

The article describes methodical work for students` independent work. Independent work of students it is a kind of educational activity in which the student acquires and develops knowledge, abilities and skills.

Keywords: independent work; higher mathematics; the definite integral.

Первостепенным вопросом современного образования является подготовка специалистов завтрашнего дня, конкурентоспособных, умеющих творчески и оперативно решать нестандартные задачи. Цель учебного процесса заключается не только в передаче знаний, умений и навыков от преподавателя к студенту, но и в развитии у студентов способности к самообразованию. Студента следует рассматривать как активную фигуру учебного процесса, а не как пассивный объект обучения. Поэтому необходимо включать его в активную учебную деятельность, «учить учиться», оказывать ему помощь в приобретении знаний.

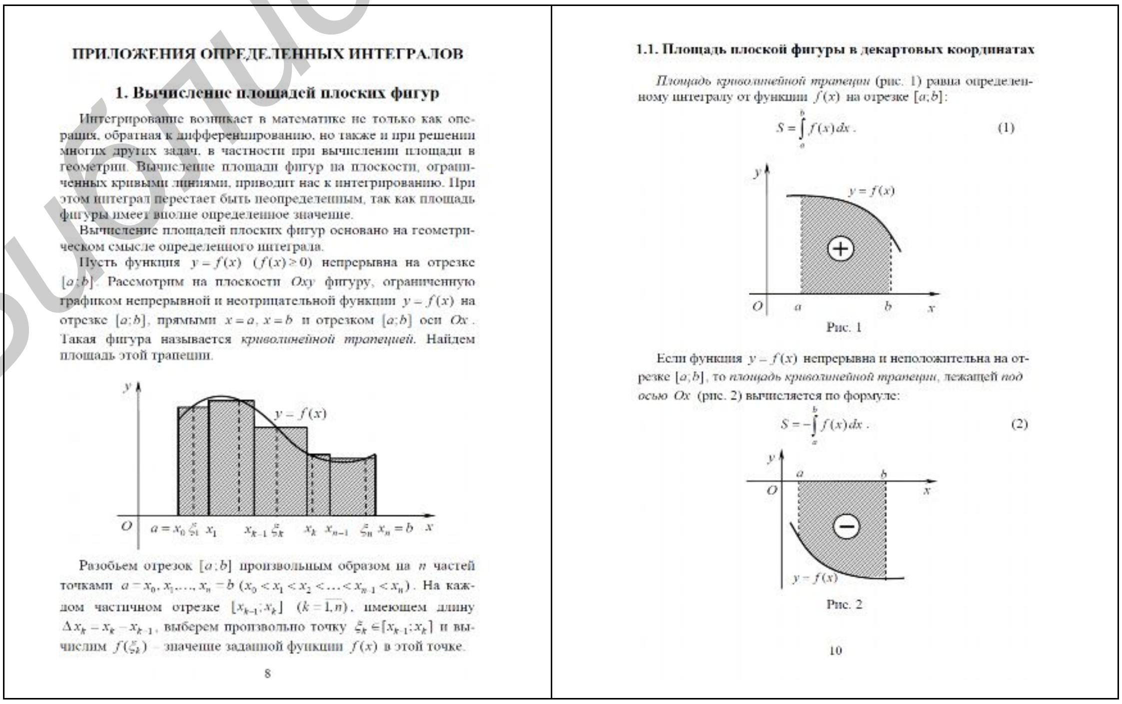
Самостоятельная работа студентов является одной из форм подготовки образованной, творческой и профессионально мобильной личности. Внедрение в учебный процесс самостоятельной управляемой работы студентов (СУРС) ставит следующие задачи: способствовать развитию у студентов стремления к постоянному пополнению и обновлению знаний и умений; формировать способность студентов осмысливать и обобщать учебный материал; разнообразить формы и методы обучения. Формы организации СУРС могут быть разными, в зависимости от дисциплины и объема часов, определенных учебным планом. Для обеспечения эффективности необходимо установить рациональное соотношение между СУРС и аудиторными занятиями; создать необходимую учебно-методическую базу; обеспечить консультационно-методическую помощь профессорско-преподавательского состава. Внедрение СУРС в учебный процесс стимулирует студентов к работе с необходимой литературой, вырабатывает навыки принятия решений.

Например, по дисциплине «Высшая математика» в соответствии с учебной программой для студентов 1 курса можно ввести СУРС по следующим темам: «Элементы аналитической геометрии в пространстве», «Кривые второго порядка», «Исследование функций», «Экстремум функции нескольких переменных», «Приложения определенных интегралов», «Некоторые приложения степенных рядов».

При разработке методических пособий для СУРС необходимо руководствоваться следующими принципами: доступность, конкретность и ясность.

Приведем разработку методического пособия для СУРС по теме «Приложения определенных интегралов».

Пособие составлено в соответствии с учебной программой дисциплины «Высшая математика». Указан список рекомендуемой литературы. Весь материал разбит на пункты. В начале каждого пункта приведены необходимые теоретические сведения и примеры с подробными решениями. Для закрепления материала составлены тестовые задания, в которых необходимо выбрать правильный вариант ответа из пяти предложенных. К тестам даны ответы. Приведенные вопросы для самоконтроля позволяют организовать контроль знаний при самостоятельной работе и подготовиться к выполнению индивидуальных заданий. В заключительной части практикума предлагаются 10 задач для самостоятельного решения и 40 вариантов заданий для индивидуальной работы студентов. В приложениях содержатся уравнения и графики некоторых линий, правила дифференцирования и интегрирования, таблица производных основных элементарных функций и основных неопределенных интегралов.



ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Вычисление площадей плоских фигур

Интегрирование возникает в математике не только как операция, обратная к дифференцированию, но также и при решении многих других задач, в частности при вычислении площади в геометрии. Вычисление площади фигур на плоскости, ограниченных кривыми линиями, приводит нас к интегрированию. При этом интеграл перестает быть неопределенным, так как площадь фигуры имеет вполне определенное значение.

Вычисление площадей плоских фигур основано на геометрическом смысле определенного интеграла.

Пусть функция $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Рассмотрим на плоскости Oxy фигуру, ограниченную графиком непрерывной и неотрицательной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a;b]$ оси Ox. Такая фигура называется *криволинейной трапецией*. Найдем площадь этой трапеции.

Разобьем отрезок $[a;b]$ произвольным образом на n частей точками $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ $(x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n)$. На каждом частичном отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ $(k = \overline{1,n})$, имеющем длину $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, выберем произвольно точку $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$ и вычислим $f(\xi_k)$ – значение заданной функции $f(x)$ в этой точке.

8

1.1. Площадь плоской фигуры в декартовых координатах

Площадь криволинейной трапеции (рис. 1) равна определенному интегралу от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Рис. 1

Если функция $y = f(x)$ непрерывна и неположительна на отрезке $[a;b]$, то *площадь криволинейной трапеции*, лежащей *под осью* Ox (рис. 2) вычисляется по формуле:

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Рис. 2

10

и отрезком $[c;d]$ оси Oy (рис. 6, 7), то ее площадь определяется формулами:

1) $S=\int\limits_c^d \varphi(y)\,dy$, если $\varphi(y)\ge 0$; (3)

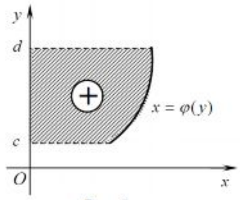


Рис. 6

2) $S=-\int\limits_c^d \varphi(y)\,dy$, если $\varphi(y)\le 0$.

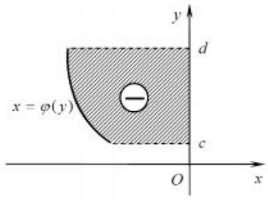


Рис. 7

Если функции $x=\varphi_1(y)$ и $x=\varphi_2(y)$ непрерывны на отрезке $[c;d]$ и для всех $y\in[c;d]$ выполняется неравенство

Итак,

$$S=\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=\int\limits_{-1}^{1}dx-\int\limits_{-1}^{1}x^2dx=x\Big|_{-1}^{1}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: $\frac{4}{3}$ кв. ед.

Пример 1.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $x=3$, кривой $y=3x^2-6x$ и осью Ox на отрезке $[0;3]$.

Решение. Построим эскиз графика функции (рис. 10). График кривой $y=3x^2-6x$ – парабола, ветви которой направлены вверх.

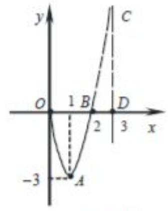


Рис. 10

Площадь OAB (S_1) расположена под осью Ox, вычисляем по формуле (2), а площадь BCD (S_2) – над осью Ox, используем формулу (1). Отрезок интегрирования $[0;3]$ разделим на два отрезка: $[0;2]$ и $[2;3]$. Тогда искомая площадь вычисляется по формуле:

$$S=-S_1+S_2=-\int\limits_0^2(3x^2-6x)\,dx+\int\limits_2^3(3x^2-6x)\,dx=-(x^3-3x^2)\Big|_0^2+$$

$$+(x^3-3x^2)\Big|_2^3=-(8-12)+(27-27-8+12)=4+4=8\text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: 8 кв. ед.

Тест 1.1. Площадь фигуры, ограниченной кривой $y=2x-x^2+8$ и осью Ox равна:

1) 8 кв. ед.; 2) 12 кв. ед.; 3) 64 кв. ед.; 4) 36 кв. ед.; 5) 25 кв. ед.

Тест 1.2. Какая из указанных формул подходит для вычисления площади фигуры, ограниченной осью Oy и линиями $y=x^3, y=8$:

1) $S=\int\limits_0^8 y^{\frac{1}{3}}dy$; 2) $S=\int\limits_0^2 x^3dx$; 3) $S=\int\limits_2^8 x^3dx$;

4) $S=\int\limits_0^2 y^{\frac{1}{3}}dy$; 5) $S=\int\limits_2^8 y\,dy$.

Тест 1.3. Площадь фигуры, ограниченной линиями $x=2t-t^2$, $y=2t^2-t^3$ вычисляется по формуле:

$$S=-\int\limits_0^2(2t^2-t^3)(2-2t)\,dt.$$

В результате вычисления, площадь равна:

1) $\frac{64}{5}$ кв. ед.; 2) 24 кв. ед.; 3) $-\frac{4}{15}$ кв. ед.;

4) $\frac{32}{3}$ кв. ед.; 5) $\frac{8}{15}$ кв. ед.

Тест 1.4. Площадь, ограниченная *лемнискатой Бернулли* $r^2=a^2\cos 2\varphi$ равна:

1) a^2 кв. ед.; 2) $\frac{a^2}{4}$ кв. ед.; 3) 4 кв. ед.;

4) $2a$ кв. ед.; 5) a кв. ед.

Тест 1.5. Площадь фигуры, ограниченной кривой $y=x^2-2x$, прямыми $x=-1$, $x=1$ и осью Ox имеет вид:

1) $S=\int\limits_{-1}^{2}(x^2-2x)\,dx$; 2) $S=\int\limits_{-1}^{0}(x^2-2x)\,dx-\int\limits_{0}^{1}(x^2-2x)\,dx$;

3) $S=\int\limits_{-1}^{1}(x^2-2x)\,dx+\int\limits_{1}^{2}(x^2-2x)\,dx$;

4) $S=\int\limits_{-1}^{0}-(x^2-2x)\,dx-\int\limits_{0}^{1}(x^2-2x)\,dx$;

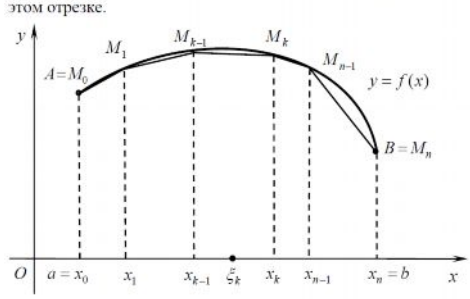
5) $S=\int\limits_{-1}^{0}dx-\int\limits_{0}^{1}(x^2-2x)\,dx$.

2. Вычисление длины дуги плоской кривой

2.1. Длина дуги плоской кривой в декартовых координатах

Под *длиной дуги* понимается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломаной возрастает неограниченно, а длина наибольшего звена стремится к нулю. В этом случае кривая называется *спрямляемой*.

Пусть кривая AB задана уравнением $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на этом отрезке.



Тест 5.2. По формуле Симпсона приближенное вычисление определенного интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ (при $2n = 8$) равно:

1) 0,4657; 2) 0,6935; 3) 0,9205; 4) 0,7854; 5) 0,7152.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение интегральной суммы. Каким образом интегральная сумма связана с определенным интегралом?
2. Каков геометрический смысл определенного интеграла?
3. Как вычисляется площадь криволинейной трапеции?
4. Как вычисляется площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций и вертикальными прямыми?
5. Как найти площадь криволинейной трапеции, если она ограничена функциями вида $x = g(y)$?
6. Как вычисляется площадь плоской фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически и в полярных координатах?
7. Как вычисляется длина дуги плоской кривой?
8. Указать формулы для вычисления объемов пространственных тел.
9. Как вычислить площадь поверхности вращения?
10. Какие существуют методы приближенного вычисления определенных интегралов?

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 9,\ y = x,\ y = -\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком *спирали Архимеда* $r = a\varphi$, $a \geq 0$.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Перед выполнением индивидуальных заданий необходимо изучить теоретический материал, ознакомиться с решениями типовых примеров, ответить на тестовые задания и вопросы для самоконтроля. Студент выполняет индивидуальные задания по варианту, номер которого соответствует номеру его фамилии в журнале посещаемости занятий. Работа должна быть выполнена в отдельной тетради. Условие каждого задания следует записывать полностью, а решения подробно. Необходимые чертежи должны выполняться четко. Студент защищает свою работу у преподавателя.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

1.1.	$y = x^2,\ y = x + 2$
1.2.	$y^2 = x^3,\ y = 4,\ x = 0$
1.3.	$x = 12\cos t + 5\sin t,\ y = 5\cos t - 12\sin t$
1.4.	$y = x^2 - 6x + 5,\ y = 0$
1.5.	$r = 4\sin^2\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$
1.6.	$y = x^2 + 4x,\ y = x + 4$
1.7.	$3x^2 - 4y = 0,\ 2x - 4y + 1 = 0$
1.8.	$y = x^2 + 1,\ y = x + 3$
1.9.	$r^2 = 2\cos 2\varphi$
1.10.	$y^2 = 9x,\ y = 3x$
1.11.	$y = \frac{1}{1+x^2},\ y = \frac{x^2}{2}$
1.12.	$y - x = 0,\ y = 2x,\ x - 2 = 0$

2.29.	$y = \ln(x^2 - 1),\ 2 \leq x \leq 3$
2.30.	$r = 8(1 - \cos\varphi),\ -\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq 0$
2.31.	$y = 2\ln\frac{4}{4-x^2},\ -1 \leq x \leq 1$
2.32.	$r = 2\cos\varphi,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{12}$
2.33.	$y = \frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3},\ 2 \leq x \leq 8$
2.34.	$y = \arccos x,\ 0 \leq x \leq \frac{8}{9}$
2.35.	$y = 2\sqrt{x},\ \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{3}$
2.36.	$y = \ln\frac{5x}{2},\ \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$
2.37.	$r = a\cos^3\left(\frac{\varphi}{3}\right),\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
2.38.	$y = \ln\cos x,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$
2.39.	$x = 8\sin t + 6\cos t,\ y = 6\sin t - 8\cos t,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
2.40.	$y = \frac{1}{2}e^x + 2,\ 0 \leq x \leq 1$

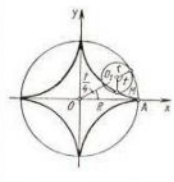
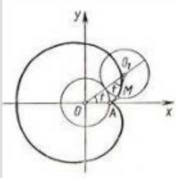
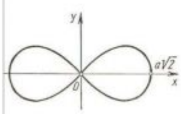
Задание 3. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры Ф вокруг указанной оси координат.

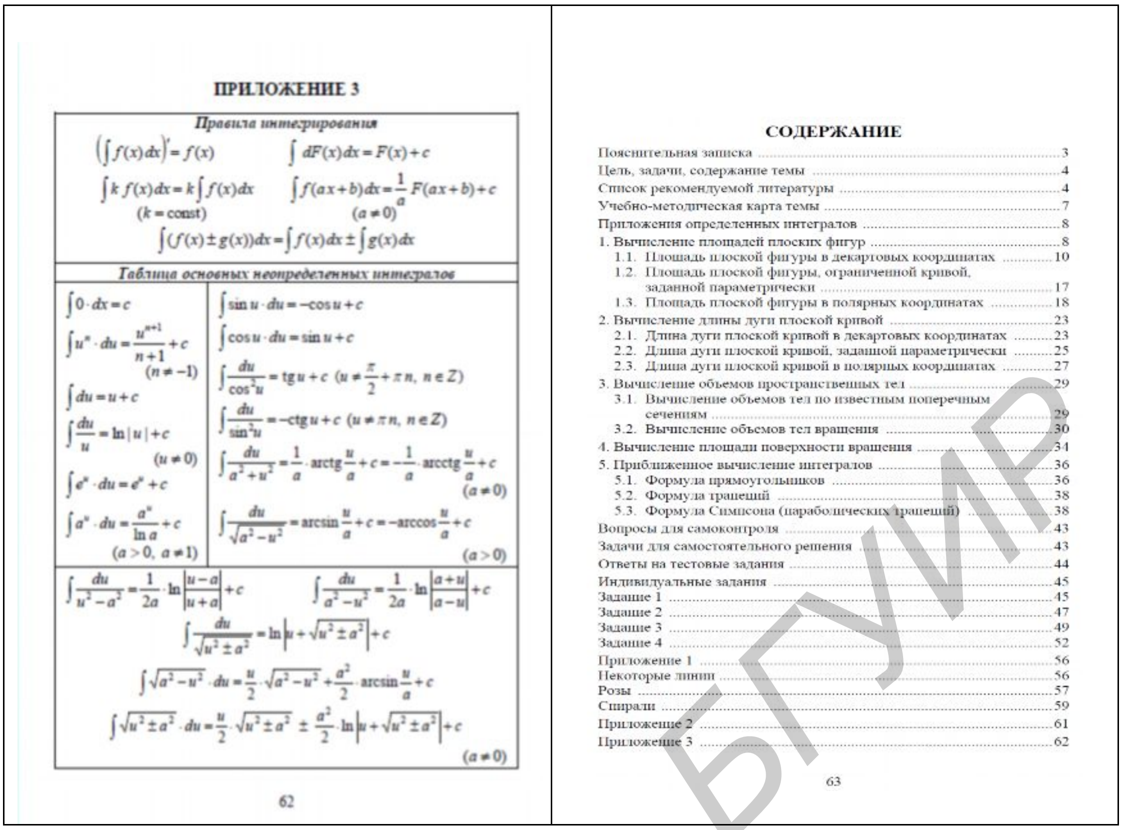
Вариант	Ф	*ось координат*
1	$y = \frac{1}{x},\ y = x,\ y = 0,\ x = 2$	*Ox*
2	$y = \sin x,\ y = 0,\ 2\pi \leq x \leq 3\pi$	*Oy*

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

(*материал из справочника* [17] *списка рекомендуемой литературы*)

НЕКОТОРЫЕ ЛИНИИ

название, уравнение	*график*
астроида уравнение в декартовых координатах: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$ параметрические уравнения: $x = R\cos^3\left(\frac{t}{4}\right),\ y = R\sin^3\left(\frac{t}{4}\right)$	
кардиоида параметрические уравнения: $x = 2a\cos t - a\cos 2t,\ y = 2a\sin t - a\sin 2t$ полярное уравнение (с полюсом в точке A): $r = 2a(1 - \cos\varphi)$	
лемниската Бернулли уравнение в декартовых координатах: $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ полярное уравнение: $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$	



ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Правила интегрирования

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \qquad \int dF(x)dx = F(x)+c$$

$$\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx \;\; (k=\text{const}) \qquad \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c \;\; (a \neq 0)$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Таблица основных неопределенных интегралов

$$\int 0 \cdot dx = c$$

$$\int u^n \cdot du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

$$\int du = u + c$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \quad (u \neq 0)$$

$$\int e^u \cdot du = e^u + c$$

$$\int a^u \cdot du = \frac{a^u}{\ln a} + c \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

$$\int \sin u \cdot du = -\cos u + c$$

$$\int \cos u \cdot du = \sin u + c$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + c \quad \left(u \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\right)$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + c \quad (u \neq \pi n,\ n \in Z)$$

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg}\frac{u}{a} + c = -\frac{1}{a} \cdot \operatorname{arcctg}\frac{u}{a} + c \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c = -\arccos\frac{u}{a} + c \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c \qquad \int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$$

$$\int \sqrt{a^2-u^2} \cdot du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin\frac{u}{a} + c$$

$$\int \sqrt{u^2 \pm a^2} \cdot du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \cdot \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c \quad (a \neq 0)$$

62

СОДЕРЖАНИЕ

63

Организация учебного процесса не только должна побуждать студента работать самостоятельно, но и должна быть построена таким образом, чтобы студент сам стремился к самообразованию и по мере необходимости мог получить помощь в этом процессе. Для получения глубоких и прочных знаний нужен систематический, целеустремленный, каждодневный, упорный и серьезный труд. Творческий подход к построению занятий, их неповторимость, насыщенность многообразием приемов, методов и форм могут обеспечить эффективность учебного процесса.