

## ЭФФЕКТИВНОСТЬ СВЁРТОЧНОГО КОДИРОВАНИЯ В ЦИФРОВЫХ СИСТЕМАХ С МНОГОПОЗИЦИОННОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Э.Б. ЛИПКОВИЧ, М. БУРКОВА

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
ул. П. Бровки, 6, г. Минск, 220013, Республика Беларусь  
kafstk@bsuir.by*

Приведены расчетные формулы для определения помехоустойчивости цифровых систем и энергетического выигрыша от кодирования (ЭВК) при использовании многопозиционных видов модуляции КАМ-М и ФМ-М, несистематического свёрточного кодирования и декодирования по алгоритму Витерби.

*Ключевые слова:* отношение несущая-шум (ОНШ), приёмное устройство (ПУ).

Определяющим показателем эффективности цифровых систем с помехоустойчивым кодированием является ЭВК, который показывает меру снижения ОНШ на входе ПУ за счёт кодирования, при сохранении заданной вероятности ошибки  $P_{\text{ош}}$  и принятого вида модуляции

$$\Delta G_{\text{к}} = \rho_0 - \rho_{\text{ок}} + 10 \cdot \lg R_{\text{ск}}, \text{ дБ}, \quad (1)$$

где  $\rho_0, \rho_{\text{ок}}$  - ОНШ при отсутствии и наличии кодирования, дБ;  
 $R_{\text{ск}}$  - кодовая скорость свёрточного кода.

Для получения аналитической зависимости  $\Delta G_{\text{к}}$  от параметров системы и вероятности ошибки необходимы расчётные соотношения для  $\rho_0$  и  $\rho_{\text{ок}}$ . Вывод формул для определения  $\rho_0$  в системах с КАМ-М и ФМ-М модуляцией, когерентной демодуляцией и аддитивным белым гауссовым шумом (АБГШ) в каналах связи основывается на соотношениях [1]:

$$\rho_{\text{ош}}^{\text{КАМ-М}} = \frac{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \cdot \text{erfc}(z)}{m} \cdot \left(1 - 0,5 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \cdot \text{erfc}(z)\right), \text{ для } m - \text{ чётных}; \quad (2)$$

$$\rho_{\text{ош}}^{\text{КАМ-М}} = \frac{1 - \left(1 - \text{erfc}(z)\right)^2}{m}, \text{ для } m - \text{ нечётных}; \quad z = \sqrt{3 \cdot m \cdot h_0 / 2 \cdot (M - 1)}; \quad (3)$$

$$\rho_{\text{ош}}^{\text{ФМ-М}} = \frac{\text{erfc}(z)}{m}; \quad z = \left(\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) \sqrt{h_0 \cdot m}; \quad (4)$$

$$\text{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_z^{\infty} \exp(-u^2) du \cong \frac{1}{z\sqrt{\pi}} \cdot 10^{-z^2/2,3}, \quad (5)$$

где  $M$  - порядок модуляции;  $m = \log_2 M$  - кратность модуляции;  $h_0 = E_0/N_0$  - пороговое отношение;  $\text{erfc}(z)$  - дополнительный интеграл вероятности.

Выполнив преобразование соотношений (2) - (5) относительно  $h_0$ , и учтя, что  $\rho_0 = 10 \lg h_0 \cdot m$ , получим расчётные формулы для определения ОНШ при отсутствии кодирования

$$\rho_0^{\text{КАМ-М}} = 10 \cdot \lg \left(1,533 \cdot (M - 1) \cdot (A_0 - 0,5 \cdot \lg(2,3 \cdot A_0)) \cdot \mu_0\right), \text{ дБ}; \quad (6)$$

$$A_0 = -\lg P_{\text{ош}} - \lg \frac{m \cdot \sqrt{\pi}}{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)}, \text{ для } m - \text{ чётных}; \text{ для } m - \text{ нечётных принять } \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) = 1;$$

$$\rho_0^{\Phi M-M} = 10 \cdot \lg \left[ 2,3 \cdot (A_1 - 0,5 \cdot \lg(2,3 \cdot A_1)) / \sin^2 \left( \frac{\pi}{M} \right) \right] \cdot \mu_0, \text{ дБ}; \quad (7)$$

$$A_1 = -\lg P_{\text{ош.в}} - \lg m \cdot \sqrt{\pi}, \text{ для } m=1, 2, 3 \dots$$

где  $\mu_0 = 1 - m \cdot P_{\text{ош.в}}$  – коэффициент, компенсирующий погрешность принятых приближений для  $P_{\text{ош.в}} \geq 10^{-2}$ .

Вывод формул для определения ОНШ на входе ПУ, систем с АБГШ, свёрточным кодированием, многопозиционной модуляцией и декодированием по алгоритму Витерби, основывается на соотношениях [1]:

$$P_{\text{ош.в}}^{\text{HAM-M}} = \frac{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \cdot d_c \cdot R_{\text{СК}}}{m} \cdot \text{erfc} \left( \sqrt{3 \cdot m \cdot h_{\text{ОК}} \cdot d_c \cdot R_{\text{СК}} / 2 \cdot (M-1)} \right); \quad (8)$$

$$P_{\text{ош.в}}^{\Phi M-M} = \frac{d_c \cdot R_{\text{СК}}}{m} \cdot \text{erfc} \left[ \sin^2 \left( \frac{\pi}{M} \right) \cdot \sqrt{h_{\text{ОК}} \cdot m \cdot d_c \cdot R_{\text{СК}}} \right], \quad (9)$$

где  $d_c$  – свободное расстояние Хэмминга;  $h_{\text{ОК}} = E_{\text{ОК}}/N_0$  – пороговое отношение при наличии кодирования;  $P_{\text{ош.в}}$  – вероятность ошибки на бит на выходе декодера Витерби.

Используя (5), выполним преобразование соотношений (8) – (9) относительно  $h_{\text{ОК}}$ . Учтя, что  $\rho_0 = 10 \lg(h_{\text{ОК}} \cdot m \cdot R_{\text{СК}})$ , получим формулы для определения ОНШ при наличии кодирования

$$\rho_{\text{ОК}}^{\text{HAM-M}} = 10 \cdot \lg \frac{1,833 \cdot (M-1) \cdot (A_1 - 0,5 \cdot \lg(2,3 \cdot A_1)) \cdot \mu_0}{d_c \cdot \beta(P_{\text{ош.в}})}, \text{ дБ}; \quad (10)$$

$$A_2 = -\lg P_{\text{ош.в}} + \lg \frac{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \cdot d_c \cdot R_{\text{СК}} \cdot \beta(P_{\text{ош.в}})}{m \cdot \sqrt{\pi}}, \text{ для } m - \text{чётных}; \text{ для } m - \text{нечётных} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) = 1;$$

$$\beta(P_{\text{ош.в}}) = \left( 1 - \frac{1,2 \cdot \left(1 - \sqrt{P_{\text{ош.в}}}\right)}{-\lg P_{\text{ош.в}}} \right);$$

$$\rho_{\text{ОК}}^{\Phi M-M} = 10 \cdot \lg \frac{2,3 \cdot (A_2 - 0,5 \cdot \lg(2,3 \cdot A_2)) \cdot \mu_0}{d_c \cdot \beta(P_{\text{ош.в}}) \cdot \sin^2 \left( \frac{\pi}{M} \right)}, \text{ дБ}; \quad (11)$$

$$A_2 = -\lg P_{\text{ош.в}} + \lg \frac{d_c \cdot R_{\text{СК}} \cdot \beta(P_{\text{ош.в}})}{m \cdot \sqrt{\pi}}.$$

Подставив в (1) полученные выражения для  $\rho_0$  и  $\rho_{\text{ОК}}$ , формула для ЭВК следующая

$$\Delta G_K = 10 \cdot \lg [d_c \cdot R_{\text{СК}} \cdot \beta(P_{\text{ош.в}}) \cdot \xi], \text{ дБ} \quad (12)$$

$$\xi^{\text{HAM-M}} = \frac{A_1 - 0,5 \cdot \lg(2,3 \cdot A_1)}{A_1 - 0,5 \cdot \lg(2,3 \cdot A_1)}, \quad \xi^{\Phi M-M} = \frac{A_2 - 0,5 \cdot \lg(2,3 \cdot A_2)}{A_2 - 0,5 \cdot \lg(2,3 \cdot A_2)}$$

Для используемых в системах наземного и спутникового вещания свёрточных кодеров с порождающими полиномами (171 и 133) и конструктивной длиной  $K=7$  значение  $d_c$  при  $R_{\text{СК}}=1/2, 2/3, 3/4, 5/6$  и  $7/8$  составляют 10, 6, 5, 4 и 3 соответственно. Полученное выражение для ЭВК является достаточно полным и при бесконечно малой вероятности ошибок переходит к известному предельному выражению вида  $\Delta G_K = 10 \cdot \lg d_c \cdot R_{\text{СК}}$  [1].

#### Список литературы

1. Прокис Дж. Цифровая связь. М.: 2000.