**К.ф.-м.н. Можей Н.П.**

*Белорусский государственный технологический университет, Беларусь*

# Геодезические на трехмерных однородных пространствах

Теория геодезических представляет собой один из важных разделов дифференциальной геометрии, имеет многочисленные приложения в механике, оптике, теории поля для моделирования динамических систем на римановых многообразиях. Исследование геодезических сопряжено с необходимостью исследования и решения систем дифференциальных уравнений, что ограничивает возможности применения аналитических методов.

Пусть $M$ – дифференцируемое многообразие размерности 3, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, ($M$, $\bar{G}$) – однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств ($M$, $\bar{G}$) равносильна классификации пар групп Ли ($\bar{G}$, $G$), где $G \subset \bar{G}$. Используя линеаризацию, эту проблему можно свести к классификации пар алгебр Ли ($\bar{g}$, $g$) с точностью до эквивалентности пар. В дальнейшем будем предполагать, что $G$ – связная подгруппа, что всегда можно сделать, ограничиваясь локальной точкой зрения, следовательно можно заменить везде требование $G$−инвариантности на инвариантность относительно соответствующих действий алгебры Ли $g$. Отображение $\rho$: $g \to gl(\bar{g}/g)$, $x \mapsto \mathrm{ad}|_{\bar{g}/g} x$ называется *изотропным представлением* подалгебры $g$. Пара ($\bar{g}$, $g$) называется *изотропно−точной*, если точно изотропное представление, пространство ($M$, $\bar{G}$) называется *изотропно точным*, если это можно сказать про пару ($\bar{g}$, $g$).

Риманово (псевдориманово) однородное пространство задается тройкой ($\bar{G}$, $M$, $\rho$), где $\bar{G}$ − связная группа Ли, $M$ является связным гладким многообразием с транзитивным действием $\bar{G}$, а $\rho$ − инвариантная риманова (псевдориманова) метрика на $M$. Инвариантные римановы метрики $\rho$ на $M$ находятся во взаимно−однозначном соответствии с инвариантными симметрическими невырожденными билинейными формами $B$ на $g$−модуле $\bar{g}/g$. Поскольку каждая инвариантная псевдориманова метрика определяет инвариантную аффинную связность, g–модуль $\bar{g}/g$ точен. Аффинной связностью на паре ($\bar{g}$, $g$) называется такое отображение $\Lambda : \bar{g} \to gl(V)$, где $V = \bar{g} / g$, что его ограничение на $g$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $g$–инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве ($M$, $\bar{G}$) находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре ($\bar{g}$, $g$). Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли $G$, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем они инвариантны относительно изотропного действия.

Дифференцируемый путь на $M$ называется геодезической, если его касательное поле параллельно. Еще со времен возникновения римановой геометрии известно, что геодезические риманова многообразия локально минимизируют длину дифференцируемых путей.

Приведем вычисления для конкретной пары. Пусть алгебра Ли четырехмерна, а ее таблица умножения $[[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = -e_3]$. Определим по алгебре локальные координаты группы Ли, транзитивно действующей на однородном пространстве. Умножение элемента группы с координатами $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ на элемент с координатами $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ выглядит следующим:

$$[x_1 = a_1 + x_1 e^{-a3};\ x_2 = a_2 + x_2 e^{a3};\ x_3 = x_3 + a_3;\ x_4 = x_4 + a_4].$$

Правоинвариантные векторные поля для группы Ли:

$$[\mathrm{D}x_1 ;\ \mathrm{D}x_2 ;\ -x_1 \mathrm{D}x_1 + x_2 \mathrm{D}x_2 + \mathrm{D}x_3 ;\ \mathrm{D}x_4].$$

Обозначим многообразие $M$ и используем координаты $[x, y, z]$ на $M$. Наша следующая задача вычислить действие группы G на многообразии $M$:

$$[x = a_1 + x\, e^{-a3};\ y = a_2 + y\, e^{a3} ;\ z = z + a_4 ].$$

Локальное действие группы G на многообразии M:

$$[\mathrm{D}x ;\ \mathrm{D}y;\ -x\mathrm{D}x + y\, \mathrm{D}y;\ \mathrm{D}z ].$$

Убеждаемся, что структурные константы алгебры Ли векторных полей совпадают с исходными (для алгебры Ли, с которой мы стартовали). Подалгебра, являющаяся алгеброй Ли стабилизатора, имеет вид $[-x\mathrm{D}x+y\ \mathrm{D}y]$.

Тензор на группе Ли выпишем в виде левоинвариантной формы Мауэра-Картана (с точностью до константы) $dx_1\, dx_2 + dx_2\, dx_1 + b\, dx_4\, dx_4$. Этот тензор является инвариантным относительно подалгебры изотропии. Мы можем свести этот инвариантный тензор на группе Ли к инвариантной невырожденной метрике $dx\, dy + dy\, dx + b\, dz\, dz$ на $M$. Вычислим алгебру Ли векторов Киллинга - полную алгебру инфинитеземальных изометрий метрики:

$$[-z\, Dx + y\, Dz/b\ ;\ Dz/b\ ;\ -z\, Dy + x Dz/b;\ x Dx - y\, Dy;\ Dx\ ;\ Dy].$$

Символы Кристоффеля $C$=0, кривизна нулевая, метрика постоянной кривизны, метрика является конформно плоской, тензор кручения нулевой.

Пусть $\nabla$ - линейная связность на $M$. Если $[x(t); y(t); z(t)]$ кривая на $M$ с касательным вектором $T$, тогда уравнения геодезических относительно связности – это система второго порядка ОДУ. Найдем вектор, компоненты которого - уравнения на геодезические:

$$\{d^2/dt^2\, x(t);\ d^2/dt^2\, y(t);\ d^2/dt^2\, z(t)\}.$$

Решив эту систему 2 ОДУ второго порядка, получаем геодезические:

$$\{x(t) = C_5\, t + C_6;\ y(t) = C_3\, t + C_4;\ z(t) = C_1\, t + C_2\}$$

Существуют разные способы отождествления геодезических многообразий с траекториями консервативных и неконсервативных динамических систем, которые открывают широкие возможности для приложения результатов исследования псевдоримановых многообразий с геодезическими в физике и механике. Например, в работе В. И. Арнольда [1] было показано, что движения идеальной несжимаемой жидкости являются геодезическими на группе диффеоморфизмов, сохраняющих элемент объема.

## Литература:

1. Arnold V. Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimenzion infinite et ses applications a l’hidrodynamique des fluides parfaits// Ann. Inst. Fourier.—1966.—16, № 1.—С. 319–361.