УДК 514.76

Н. П. Можей, кандидат физико-математических наук, доцент (БГТУ)

ЕСТЕСТВЕННО-РЕДУКТИВНЫЕ ПСЕВДОРИМАНОВЫ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА НИХ

Работа посвящена описанию трехмерных естественно-редуктивных псевдоримановых однородных пространств и аффинных связностей, геодезических на них. Приведена классификация римановых (псевдоримановых) естественно-редуктивных однородных пространств, что эквивалентно описанию эффективных пар алгебр Ли, допускающих инвариантную невырожденную билинейную форму на изотропном модуле. Использован алгебраический подход к описанию аффинных связностей, применен аппарат теории групп и алгебр Ли, а также однородных пространств.

The paper is devoted to the study of threedimensional naturally reductive Riemannian (pseudo-Riemannian) homogeneous spaces and affine connections, geodesies on it. We present classification of Riemannian (pseudo-Riemannian) naturally reductive homogeneous spaces, it is equivalent to the description of effective pairs of Lie algebras supplied with an invariant nondegenerate symmetric bilinear form on the isotropy module. In this article we use the algebraic approach for description of affine connections, methods of the theory of Lie groups, Lie algebras and homogeneous spaces.

Введение. П. К. Рашевский ввел в рассмотрение новый класс пространств, представляющих собой пространства аффинной связности с кручением, у которых при параллельном переносе сохраняются как тензор кривизны, так и тензор кручения; эти пространства он назвал симметрическими пространствами с кручением [1]. В его работах для весьма широкого класса однородных пространств единообразным методом вскрывается свойственная этим пространствам геометрия. К сожалению, работы П. К. Рашевского не были оценены в свое время должным образом; его результаты были переоткрыты К. Номидзу и с тех пор вошли в число классических. Соответствующий класс однородных пространств, получивших название редуктивных пространств, оказался чрезвычайно полезным для многих исследований по однородным пространствам. Целью этой работы является описание естественно-редуктивных псевдоримановых однородных пространств и аффинных связностей, геодезических на них.

Основная часть. Пусть M – дифференцируемое многообразие размерности 3, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $(M, \bar{G})$ – однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G}, G)$, где $G \subset \bar{G}$. Две пары групп Ли $(\bar{G}_1, G_1)$ и $(\bar{G}_2, G_2)$ *эквивалентны*, если существует изоморфизм групп Ли

$$\pi\colon \bar{G}_1 \to \bar{G}_2, \text{ такой что } \pi(G_1) = G_2.$$

Используя линеаризацию, эту проблему можно свести к классификации пар алгебр Ли $(\bar{g}, g)$ с точностью до эквивалентности пар. Пусть $\bar{g}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а g – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Тогда многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$, а действие $\bar{G}$ на M при таком отождествлении принимает вид

$$s_1(s_2G) = (s_1s_2)G$$

для всех $s_1, s_2 \in \bar{G}$. Точка x при этом отождествляется со смежным классом eG, а касательное пространство T_xM – с фактор-пространством $\bar{g}/g$ (см., например, [2]).

Пары $(\bar{g}_1, g_1)$ и $(\bar{g}_2, g_2)$ называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм алгебр Ли

$$\pi\colon \bar{g}_1 \to \bar{g}_2 \text{ такой, что } \pi(g_1) = g_2.$$

При изучении однородных пространств важно рассматривать не саму группу $\bar{G}$, а ее образ в Diff(M). Другими словами, достаточно рассматривать только эффективные действия группы $\bar{G}$ на многообразии M. В терминологии алгебр Ли условие эффективности эквивалентно следующему: назовем пару $(\bar{g}, g)$ *эффективной*, если подалгебра g не содержит ненулевых идеалов алгебры Ли $\bar{g}$.

В дальнейшем будем предполагать, что G – связная подгруппа, что всегда можно сделать, ограничиваясь локальной точкой зрения, следовательно, можно заменить везде требование G-инвариантности на инвариантность относительно соответствующих действий алгебры Ли g. Изотропное действие группы G на T_xM – это фактор-действие присоединенного действия G на $\bar{g}$:

$$s.(x + g) = (\operatorname{Ad} s)(x) + g,$$

для всех $s \in G$, $x \in \bar{g}$. При этом алгебра Ли g действует на касательном пространстве $T_xM = \bar{g}/g$ следующим образом:

$$x.(y + g) = [x, y] + g$$

для всех $x \in g, y \in \bar{g}$. Отображение

$$\rho\colon g \to gl(\bar{g}/g),\ x \mapsto \operatorname{ad}|_{\bar{g}/g}\, x$$

называется *изотропным представлением* подалгебры g. Пара ($\bar{g}$, g) называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры g. Будем называть однородное пространство (M, $\bar{G}$) *изотропно-точным*, если это можно сказать про пару ($\bar{g}$, g).

Риманово (псевдориманово) однородное пространство задается тройкой ($\bar{G}$, M, ρ), где $\bar{G}$ − связная группа Ли, M является связным гладким многообразием с транзитивным действием $\bar{G}$, а ρ − инвариантная риманова (псевдориманова) метрика на M. Инвариантные римановы метрики ρ на M находятся во взаимно однозначном соответствии с инвариантными симметрическими невырожденными билинейными формами B на g-модуле $\bar{g}/g$ [3].

Поскольку каждая инвариантная псевдориманова метрика определяет инвариантную аффинную связность, g-модуль $\bar{g}/g$ точен. Для нахождения всех изотропно-точных пар нужно: классифицировать (с точностью до изоморфизма) все точные трехмерные g-модули U, что эквивалентно классификации всех подалгебр в $gl(3, R)$ с точностью до сопряженности; для каждого g-модуля U, найденного ранее, классифицировать (с точностью до эквивалентности) все пары ($\bar{g}$, g) такие, что g-модули $\bar{g}/g$ и U эквивалентны. Все такие пары найдены в источнике [4], дальнейшая нумерация пар соответствует приведенной там. Ограничимся случаем с ненулевым стабилизатором, т. к. все остальные псевдоримановы однородные пространства только трехмерные группы Ли с инвариантной метрикой. Билинейная форма B является инвариантной билинейной формой на g-модуле $\bar{g}/g$. Проверим выполнение этого условия для всех пар и выберем из них допускающие (псевдо)риманову метрику. Далее опишем все такие формы с точностью до индуцированного действия Aut($\bar{g}$, g). Получим следующий результат.

Теорема 1. Пусть ($\bar{g}$, g, B) трехмерное локально псевдориманово естественно-редуктивное однородное пространство. Оно эквивалентно одной и только одной из следующих троек:

римановы:

№	Таблица умножения				
1.3.1		e_1	u_1	u_2	u_3
	e_1	0	$-u_2$	u_1	0
	u_1	u_2	0	0	0
	u_2	$-u_1$	0	0	0
	u_3	0	0	0	0

№	Таблица умножения						
3.5.1		e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
	e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
	e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
	e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
	u_1	u_3	u_2	0	0	0	0
	u_2	0	$-u_1$	u_3	0	0	0
	u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0

псевдоримановы:

№	Таблица умножения						
3.4.1		e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
	e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
	e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
	e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
	u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0
	u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	0	0	0
	u_3	u_3	$-u_2$	0	0	0	0

№	Таблица умножения				
1.1.1		e_1	u_1	u_2	u_3
	e_1	0	u_1	$-u_2$	0
	u_1	$-u_1$	0	0	0
	u_2	u_2	0	0	0
	u_3	0	0	0	0
1.8.1		e_1	u_1	u_2	u_3
	e_1	0	0	u_1	u_2
	u_1	0	0	0	0
	u_2	$-u_1$	0	0	0
	u_3	$-u_2$	0	0	0

Здесь e_i – базис g, u_i – дополнительный к g в $\bar{g}$ (i = 1, 2, 3).

B	Номер	B	Номер
$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$	ε_1, ε_2 = =±1, 1.3.1	$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$	ε = ±1, 3.5.1
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	±,1.8.1, 3.4.1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$	a = ±1, 1.1.1

Аффинной связностью на паре ($\bar{g}$, g) называется такое отображение

$$\Lambda : \bar{g} \to gl(V), \text{ где } V = \bar{g}/g,$$

что его ограничение на g есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является g-инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве (M, $\bar{G}$) находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре ($\bar{g}$, g). Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия.

Тензор кручения $T \in \operatorname{Inv} T_2^1(V)$ имеет вид

$$T(x_V, y_V) = \Lambda(x)y_V - \Lambda(y)x_V - [x, y]_V$$

для всех $x, y \in \bar{g}$; тензор кривизны $R \in \operatorname{Inv} T_3^1(V)$ имеет вид

$$R(x_V, y_V) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех $x, y \in \bar{g}$.

Дифференцируемый путь на M называется геодезической, если его касательное поле параллельно. Еще со времен возникновения римановой геометрии известно, что геодезические римановa многообразия локально минимизируют длину дифференцируемых путей.

Теорема 2. Инвариантные аффинные связности, тензоры кривизны и кручения, геодезические трехмерных естественно-редуктивных локально-псевдоримановых однородных пространств имеют следующий вид.

1.1.1. Связность:

$$r_{11}dxDxdz + q_{31}dxDzdy + r_{22}dyDydz + \\ + p_{32}dyDzdx + p_{13}dzDxdx + q_{23}dzDydy + \\ r_{33}dzDzdz.$$

Тензор кривизны

$$R = p_{13}q_{31}Dxdxdxdy - p_{13}q_{31}Dxdxdydx - \\ - (-p_{13}r_{33} + r_{11}p_{13})Dxdzdxdz + \\ + (-p_{13}r_{33} + r_{11}p_{13})Dxdzdzdx - \\ - p_{32}q_{23}Dydydxdy + p_{32}q_{23}Dydydydx - \\ - (-q_{23}r_{33} + r_{22}q_{23})Dydzdydz + \\ + (-q_{23}r_{33} + r_{22}q_{23})Dydzdzdy + \\ + (q_{31}r_{11} - r_{33}q_{31})Dzdxdydz - \\ - (q_{31}r_{11} - r_{33}q_{31})Dzdxdzdy + \\ + (p_{32}r_{22} - r_{33}p_{32})Dzdydxdz - \\ - (p_{32}r_{22} - r_{33}p_{32})Dzdydzdx - \\ - (-p_{32}q_{23} + p_{13}q_{31})Dzdzdxdy + \\ + (-p_{32}q_{23} + p_{13}q_{31})Dzdzdydx.$$

Тензор кручения

$$T = (-r_{11} + p_{13})dxDxdz + (-q_{31} + p_{32})dxDzdy + \\ + (-r_{22} + q_{23})dyDydz - (-q_{31} + p_{32})dyDzdx - \\ - (-r_{11} + p_{13})dzDxdx - (-r_{22} + q_{23})dzDydy.$$

Если $\{x(t);\ y(t);\ z(t)\}$ кривая на M, тогда уравнения геодезических относительно связности – это система второго порядка ОДУ. Решив ее, получаем геодезические:

$$\{x(t) = C_3, y(t) = C_1 - r_{33}(C_4t + C_5) \times \\ \times \exp(- \ln(C_4tr_{33} + C_5r_{33})(q_{23} + r_{22}) / r_{33})C_2 / C_4 / \\ / (q_{23} + r_{22} - r_{33}), z(t) = \ln(C_4tr_{33} + C_5r_{33}) / r_{33}\}; \\ \{x(t) = C_2 + \int\exp(- (\int \mathrm{v}\mathrm{d}t + C_6)(p_{13} + r_{11}))\mathrm{d}tC_3; \\ y(t) = \int - (\mathrm{v}^2r_{33} + \mathrm{w})/(\exp(- (\int \mathrm{v}\mathrm{d}t + C_6)(p_{13} + r_{11}))C_3 \times \\ \times (1 + q_{31}))\mathrm{d}t + C_1, z(t) = \int \mathrm{v}\mathrm{d}t + C_6\},$$

где u – корень уравнения

$$(-(u + h^2r_{33})^{(2r33)}(h^2p_{13} + h^2r_{11} + h^2q_{23} + h^2r_{22} + \\ + 2u)^{(- p13 - r11 - q23 - r22)} + C_4) = 0;$$

v – корень уравнения

$$(- \int^{v} 1 / udh + t + C_5) = 0;$$

w – корень уравнения

$$- (w + v^2r_{33})^{(2r33)}(v^2p_{13} + v^2r_{11} + v^2q_{23} + v^2r_{22} + \\ + 2w)^{(- p13 - r11 - q23 - r22)} + C_4 = 0.$$

1.3.1. Связность:

$$r_{11}dxDxdz - r_{12}dxDydz + p_{31}dxDzdx - p_{32}dxDzdy + \\ + r_{12}dyDxdz + r_{11}dyDydz + p_{32}dyDzdx + p_{31}dyDzdy + \\ + p_{13}dzDxdx - p_{23}dzDxdy + p_{23}dzDydx + p_{13}dzDydy + \\ + r_{33}dzDzdz.$$

Тензор кривизны

$$R = -(-p_{23}p_{31} + p_{13}p_{32})Dxdxdxdy + \\ + (-p_{23}p_{31} + p_{13}p_{32})Dxdxdydx + \\ + (p_{13}p_{31} + p_{23}p_{32})Dxdydxdy - \\ - (p_{13}p_{31} + p_{23}p_{32})Dxdydydx - \\ - (-p_{13}r_{33} + r_{11}p_{13} + r_{12}p_{23})Dxdzdxdz - \\ - (p_{23}r_{33} + r_{12}p_{13} - r_{11}p_{23})Dxdzdydz + \\ + (-p_{13}r_{33} + r_{11}p_{13} + r_{12}p_{23})Dxdzdzdx + \\ + (p_{23}r_{33} + r_{12}p_{13} - r_{11}p_{23})Dxdzdzdy - \\ - (p_{13}p_{31} + p_{23}p_{32})Dydxdxdy + \\ + (p_{13}p_{31} + p_{23}p_{32})Dydxdydx - \\ - (-p_{23}p_{31} + p_{13}p_{32})Dydydxdy + \\ + (-p_{23}p_{31} + p_{13}p_{32})Dydydydx + \\ + (p_{23}r_{33} + r_{12}p_{13} - r_{11}p_{23})Dydzdxdz - \\ - (-p_{13}r_{33} + + r_{11}p_{13} + r_{12}p_{23})Dydzdydz - \\ - (p_{23}r_{33} + r_{12}p_{13} - r_{11}p_{23})Dydzdzdx + \\ + (-p_{13}r_{33} + r_{11}p_{13} + r_{12}p_{23})Dydzdzdy + \\ + (p_{31}r_{11} - p_{32}r_{12} - r_{33}p_{31})Dzdxdxdz - \\ - (p_{31}r_{12} + p_{32}r_{11} - r_{33}p_{32})Dzdxdydz - \\ - (p_{31}r_{11} - p_{32}r_{12} - r_{33}p_{31})Dzdxdzdx + \\ + (p_{31}r_{12} + p_{32}r_{11} - r_{33}p_{32})Dzdxdzdy + \\ + (p_{31}r_{12} + p_{32}r_{11} - r_{33}p_{32})Dzdydxdz + \\ + (p_{31}r_{11} - p_{32}r_{12} - r_{33}p_{31})Dzdydydz - \\ - (p_{31}r_{12} + p_{32}r_{11} - r_{33}p_{32})Dzdydzdx - \\ - (p_{31}r_{11} - p_{32}r_{12} - r_{33}p_{31})Dzdydzdy + \\ + (-2p_{23}p_{31} + 2p_{13}p_{32})Dzdzdxdy - \\ - (-2p_{23}p_{31} + 2p_{13}p_{32})Dzdzdydx.$$

Тензор кручения

$$T = (-r_{11} + p_{13})dxDxdz + (r_{12} + p_{23})dxDydz + \\ + 2p_{32}dxDzdy - (r_{12} + p_{23})dyDxdz + (-r_{11} + \\ + p_{13})dyDydz - 2p_{32}dyDzdx - (-r_{11} + p_{13})dzDxdx + \\ + (r_{12} + p_{23})dzDxdy - (r_{12} + p_{23})dzDydx - (-r_{11} + \\ + p_{13})dzDydy.$$

Уравнения геодезических относительно связности:

$$\{x(t) = C_4, y(t) = C_3, z(t) = \ln(C_1tr_{33} + C_2r_{33}) / r_{33}\}; \\ \{x(t) = C_3, y(t) = C_2, z(t) = C_1\}.$$

1.8.1. Связность:

$$-p_{12}dxDxdy + r_{11}dxDxdz - p_{12}dxDydz + p_{12}dyDxdx + \\ + q_{12}dyDxdy + r_{12}dyDxdz + (r_{11} + q_{12})dyDydz - \\ - p_{12}dyDzdz + p_{13}dzDxdx + q_{13}dzDxdy + r_{13}dzDxdz + \\ + p_{12}dzDydx + (q_{12} + p_{13})dzDydy + (r_{12} + \\ + q_{13})dzDydz + p_{12}dzDzdy + (r_{11} + 2q_{12} + \\ + p_{13})dzDzdz.$$

Тензор кривизны

$$R = -p_{12}{}^2Dxdxdxdz + p_{12}{}^2Dxdxdzdx + \\ + p_{12}{}^2Dxdydxdy - (p_{13}p_{12} - q_{12}p_{12})Dxdydxdz - \\ - p_{12}{}^2Dxdydydx - (p_{12}q_{13} - q_{12}{}^2 + r_{12}p_{12})Dxdydydz +$$

$$\begin{gathered}
+ (p_{13}p_{12} - q_{12}p_{12})Dxdydzdx + \\
+ (p_{12}q_{13} - q_{12}^2 + r_{12}p_{12})Dxdydzdy + \\
+ (p_{12}q_{13} + 2p_{13}q_{12} + p_{13}^2)Dxdzdxdz - \\
- (2p_{12}r_{13} - 3q_{12}q_{13} - q_{13}p_{13} + r_{12}p_{13})Dxdzdydz - \\
- (p_{12}q_{13} + 2p_{13}q_{12} + p_{13}^2)Dxdzdzdx + \\
+ (2p_{12}r_{13} - 3q_{12}q_{13} - q_{13}p_{13} + r_{12}p_{13})Dxdzdzdy - \\
- p_{12}^2Dydxdydz + p_{12}^2Dydxdzdy + p_{12}^2Dydzdxdy + \\
+ (q_{12}p_{12} + 2p_{13}p_{12})Dydzdxdz - p_{12}^2Dydzdydx - \\
- (r_{12}p_{12} - q_{12}^2 - 2p_{13}q_{12} - p_{13}^2)Dydzdydz - \\
- (q_{12}p_{12} + 2p_{13}p_{12})Dydzdzdx + \\
+ (r_{12}p_{12} - q_{12}^2 - 2p_{13}q_{12} - p_{13}^2)Dydzdzdy - \\
- p_{12}^2Dzdydydz + p_{12}^2Dzdydzdy + p_{12}^2Dzdzdxdz - \\
- p_{12}2Dzdzdzdx + 3p_{13}p_{12}Dxdzdxdy - \\
- 3p_{13}p_{12}Dxdzdydx - p_{13}p_{12}Dydydydz + \\
+ p_{13}p_{12}Dydydzdy + p_{12}(q_{12} + p_{13})Dzdzdydz - \\
- p_{12}(q_{12} + p_{13})Dzdzdzdy - q_{12}p_{12}Dxdxdydz + \\
+ q_{12}p_{12}Dxdxdzdy.
\end{gathered}$$

Тензор кручения

$$\begin{gathered}
T = 2p_{12}dxDxdy + (-r_{11} + p_{13})dxDxdz + \\
+ 2p_{12}dxDydz - 2p_{12}dyDxdx + (-r_{12} + q_{13})dyDxdz + \\
+ (-r_{11} + p_{13})dyDydz + 2p_{12}dyDzdz - (- r_{11} + \\
+ p_{13})dzDxdx - (- r_{12} + q_{13})dzDxdy - 2p_{12}dzDydx - \\
- (-r_{11} + p_{13})dzDydy - 2p_{12}dzDzdy.
\end{gathered}$$

Уравнения геодезических относительно связности:

$$\begin{gathered}
x(t) = \int - (\int \exp(\ln(C_5tr_{11} + 2C_5tq_{12} + \\
+ C_5tp_{13} + C_6r_{11} + + 2C_6q_{12} + C_6p_{13}) \times \\
\times (p_{13} + r_{11})/(r_{11} + 2q_{12} + p_{13})) \times \\
\times (\ln(C_5t + C_6)^2C_5^2q_{12}q_{13}^2 + \ln(C_5t + C_6)^2C_5^2q_{12}r_{12}^2 - \\
- \ln(C_5t + C_6)C_5^2p_{13}q_{13}^2 - \ln(C_5t + C_6)C_5^2p_{13}r_{12}^2 - \\
- 2\ln(C_5t + C_6)C_5^2q_{12}q_{13}^2 - \\
- 2\ln(C_5t + C_6)C_5^2q_{12}r_{12}^2 - \ln(C_5t + C_6)C_5^2q_{13}^2r_{11} - \\
- \ln(C_5t + C_6)C_5^2r_{11}r_{12}^2 - \\
- 2\ln(C_5t + C_6)C_3C_5p_{13}q_{12}r_{12} - 2\ln(C_5t + \\
+ C_6)C_3C_5q_{12}q_{13}r_{11} - 2\ln(C_5t + C_6)C_3C_5q_{12}r_{11}r_{12} - \\
- 2\ln(C_5t + C_6)C_3 \times C_5p_{13}q_{12}q_{13} + 2\ln(C_5t + \\
+ C_6)^2C_5^2q_{12}q_{13}r_{12} - 4\ln(C_5t + C_6)C_3C_5q_{12}^2q_{13} - \\
- 4\ln(C_5t + C_6)C_3C_5q_{12}^2r_{12} - 2\ln(C_5t + \\
+ C_6)C_5^2p_{13}q_{13}r_{12} - 4\ln(C_5t + C_6)C_5^2q_{12}q_{13}r_{12} - \\
- 2\ln(C_5t + C_6)C_5^2q_{13}r_{11}r_{12} + 2C_3^2p_{13}q_{12}r_{11} + \\
+ C_3C_5p_{13}^2q_{13} + C_3C_5p_{13}^2r_{12} + 4C_3C_5q_{12}^2q_{13} + \\
+ 4C_3C_5q_{12}^2r_{12} + C_3C_5q_{13}r_{11}^2 + C_3C_5r_{11}^2r_{12} + \\
+ 4C_5^2p_{13}q_{12}r_{13} + 2C_5^2p_{13}r_{11}r_{13} + 4C_5^2q_{12}r_{11}r_{13} + \\
+ 4C_3^2q_{12}3 + 4C_3C_5p_{13}q_{12}q_{13} + 4C_3C_5p_{13}q_{12}r_{12} + \\
+ 2C_3C_5p_{13}q_{13}r_{11} + 2C_3C_5p_{13}r_{11}r_{12} + 4C_3C_5q_{12}q_{13}r_{11} + \\
+ 4C_3C_5q_{12}r_{11}r_{12} + C_3^2p_{13}^2q_{12}4C_3^2p_{13}q_{12}^2 + \\
+ 4C_3^2q_{12}^2r_{11} + C_3^2q_{12}r_{11}^2 + C_5^2p_{13}^2r_{13} + 4C_5^2q_{12}^2r_{13} + \\
+ C_5^2r_{11}^2r_{13})/((r_{11} + 2q_{12} + p_{13})4(C_5t + C_6)^2)\mathrm{d}t - \\
- C_1)\exp(- \ln(C_5tr_{11} + 2C_5tq_{12} + C_5tp_{13} + C_6r_{11} + \\
+ 2C_6q_{12} + C_6p_{13})(p_{13} + r_{11}) / (r_{11} + 2q_{12} + p_{13}))\mathrm{d}t + C_2; \\
y(t) = -r_{12}\ln(C_5t + C_6)^2 / (2(r_{11} + 2q_{12} + p_{13})^2) - \\
- q_{13}\ln(C_5t + C_6)^2 / (2(r_{11} + 2q_{12} + p_{13})^2) + \\
+ C_3r_{11}\ln(C_5t + C_6) / ((r_{11} + 2q_{12} + p_{13})^2C_5) + \\
+ 2q_{12}C_3\ln(C_5t + C_6) / ((r_{11} + 2q_{12} + p_{13})^2C_5) + \\
+ C_3p_{13}\ln(C_5t + C_6) / ((r_{11} + 2q_{12} + p_{13})^2C_5) + C_4; \\
z(t) = \ln(C_5tr_{11} + 2C_5tq_{12} + C_5tp_{13} + \\
+ C_6r_{11} + 2C_6q_{12} + C_6p_{13}) / (r_{11} + 2q_{12} + p_{13}).
\end{gathered}$$

2.21.1. Связность:

$$\begin{gathered}
p_{12}dxDxdy - p_{12}dxDydz + p_{12}dyDxdx - \\
- p_{12}dyDzdz + p_{12}dzDydx + p_{12}dzDzdy.
\end{gathered}$$

Тензор кривизны

$$\begin{gathered}
R = -p_{12}^2Dxdxdxdz + p_{12}^2Dxdxdzdx + \\
+ p_{12}^2Dxdydxdy - p_{12}^2Dxdydydx - p_{12}^2Dydxdydz + \\
+ p_{12}^2Dydxdzdy + p_{12}^2Dydzdxdy - p_{12}^2Dydzdydx - \\
- p_{12}^2Dzdydydz + p_{12}^2Dzdydzdy + p_{12}^2Dzdzdxdz - \\
- p_{12}^2Dzdzdzdx.
\end{gathered}$$

Тензор кручения

$$\begin{gathered}
T = 2p_{12}dxDxdy + 2p_{12}dxDydz - \\
- 2p_{12}dyDxdx + 2p_{12}dyDzdz - \\
- 2p_{12}dzDydx - 2p_{12}dzDzdy.
\end{gathered}$$

Уравнения геодезических относительно связности

$$\{x(t) = C_5t + C_6, y(t) = C_3t + C_4, z(t) = C_1t + C_2\}.$$

3.4.1. Связность:

$$\begin{gathered}
- p_{12}dxDxdy - p_{12}dxDydz + p_{12}dyDxdx - \\
- p_{12}dyDzdz + p_{12}dzDydx + p_{12}dzDzdy.
\end{gathered}$$

Тензор кривизны

$$\begin{gathered}
R = -p_{12}^2Dxdxdxdz + p_{12}^2Dxdxdzdx + \\
+ p_{12}^2Dxdydxdy - p_{12}^2Dxdydydx - p_{12}^2Dydxdydz + \\
+ p_{12}^2Dydxdzdy + p_{12}^2Dydzdxdy - p_{12}^2Dydzdydx - \\
- p_{12}^2Dzdydydz + p_{12}^2Dzdydzdy + p_{12}^2Dzdzdxdz - \\
- p_{12}^2Dzdzdzdx.
\end{gathered}$$

Тензор кручения

$$\begin{gathered}
T = 2p_{12}dxDxdy + 2p_{12}dxDydz - 2p_{12}dyDxdx + \\
+ 2p_{12}dyDzdz - 2p_{12}dzDydx - 2p_{12}dzDzdy.
\end{gathered}$$

Уравнения геодезических относительно связности:

$$\{x(t) = C_5t + C_6, y(t) = C_3t + C_4, z(t) = C_1t + C_2\}.$$

3.5.1. Связность:

$$\begin{gathered}
- p_{23}dxDydz + p_{23}dxDzdy + p_{23}dyDxdz - \\
- p_{23}dyDzdx - p_{23}dzDxdy + p_{23}dzDydx.
\end{gathered}$$

Тензор кривизны

$$\begin{gathered}
R = - p_{23}^2Dxdydxdy + p_{23}^2Dxdydydx - \\
- p_{23}^2Dxdzdxdz + p_{23}^2Dxdzdzdx + p_{23}^2Dydxdxdy - \\
- p_{23}^2Dydxdydx - p_{23}^2Dydzdydz + p_{23}^2Dydzdzdy + \\
+ p_{23}^2Dzdxdxdz - p_{23}^2Dzdxdzdx + p_{23}^2Dzdydydz - \\
- p_{23}^2Dzdydzdy.
\end{gathered}$$

Тензор кручения

$$\begin{gathered}
T = 2p_{23}dxDydz - 2p_{23}dxDzdy - 2p_{23}dyDxdz + \\
+ 2p_{23}dyDzdx + 2p_{23}dzDxdy - 2p_{23}dzDydx.
\end{gathered}$$

Уравнения геодезических относительно связности:

$$\{x(t) = C_5t + C_6, y(t) = C_3t + C_4, z(t) = C_1t + C_2\}.$$

Заключение. Найденные связности могут быть использованы для решения различных геометрических задач, также существуют разные способы отождествления геодезических псевдоримановых многообразий с траекториями консервативных и неконсервативных динамических систем, которые открывают широкие возможности для приложения результатов исследования псевдоримановых многообразий в физике и механике.

Литература

1. Рашевский, П. К. Симметрические пространства аффинной связности с кручением / П. К. Рашевский // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. – 1969. – Вып. 8. – С. 82–92.

2. Онищик, А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А. Л. Онищик. − М.: Физ.-мат. лит., 1995. – 344 с.

3. Kobayashi, S. Foundations of Differential Geometry / S. Kobayashi, K. Nomizu.− New-York; London, 1963. − Vol. I; 1969. − Vol. II.

4. Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces / B. Komrakov [et al.]. – Oslo: Preprints Univ., 1993. − Vol. I–III. − P. 35–37.

Поступила 28.02.2013

МЕХАНИКА

УДК 531.19

Г. С. Бокун, кандидат физико-математических наук, доцент (БГТУ);
В. С. Вихренко, доктор физико-математических наук, профессор (БГТУ)

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ЭНЕРГИИ МЕЖМОЛЕКЛЯРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ МАССОПЕРЕНОСА НА ОСНОВЕ РЕШЕТОЧНОЙ ТЕОРИИ

Рассматривается решеточная система с термоактивированными прыжками частиц между узлами решетки в ситуациях, когда не накладываются ограничения на величину градиентов плотности. Показано, что возможности описания в рамках решеточной теории можно расширить, переходя от традиционного двухспинового (занят – не занят) состояния узла решетки к многоспиновому. Это дает возможность рассмотреть более сложные задачи, в том числе и варианты с непрерывным потенциалом, и учесть особенности изменения взаимодействия с изменением расстояния и взаимной ориентации молекул. В работе для случая многоспиновых состояний с использованием основного кинетического уравнения сформулированы кинетические дифференциально-разностные уравнения эволюции поля концентрации. Для учета межчастичных корреляций использовано квазихимическое приближение.

The system with thermally activated hopping dynamics is considered in the framework of the lattice fluid model in situations when no constrains on concentration gradients are assumed. It is shown that the possibilities of description in the framework of lattice theories can be extended coming to multispin instead of twospin (occupied-unoccupied) characterization of the lattice sites. This permit to consider more complicated problems, including systems with continuous potentials, and to take into account the peculiarities of interactions that depend on intermolecular distances and mutual orientations of molecules. Attractive nearest neighbor interparticle interactions and discrete particle energy levels are taken into account. On the basis of the master equation for the case of multispin states the closed system of differential-difference evolution equations for the particle concentration distribution is evaluated. The quasichemical approximation is used to take into account interparticle correlations.

Введение. Решеточные теории находят широкое применение при описании разнообразных массотранспортных процессов в твердотельных системах [1, 2], в частности интеркаляционных соединениях, в том числе при исследовании процессов нуклеации, которые могут привести к наноструктурным состояниям. Эти соединения часто рассматриваются как состоящие из довольно жесткой несущей подсистемы и подсистемы лабильных частиц, движущихся в потенциальном рельефе, созданном несущей подсистемой. Подвижные частицы проводят основное время в минимумах потенциального рельефа, что и обусловливает применимость решеточных теорий. Относительная простота решеточных систем предоставляет возможность выполнить до конца необходимые статистические процедуры усреднения и получить конкретные результаты для равновесных и кинетических характеристик систем. Возможности описания дополнительно расширяются при переходе от традиционного двухспинового (занят – не занят) состояния узла решетки к многоспиновому. Это позволяет рассмотреть более сложные случаи, в частности варианты с непрерывным потенциалом, и учесть особенности изменения взаимодействия с изменением межчастичных расстояний и взаимной ориентации молекул.

Целью данной работы является формулировка, исходя из основного кинетического уравнения, дифференциально-разностных уравнений эволюции поля концентрации с учетом многоспиновых состояний. Для учета межчастичных корреляций используется квазихимическое приближение.

Уравнение эволюции поля концентрации. Рассмотрим систему N частиц на периодической двух- или трехмерной решетке с притяжением ближайших соседей. Переход частицы в ближайший соседний вакантный узел будем считать термически активированным. Согласно работам [3, 4], будем считать, что частица в узле j может занимать дискретные энергетические состояния. Это предположение позволяет объяснить особенности распределения потенциала поля подложки вокруг узлов решетки вместо использования только узельных потенциалов. Конечно, классическая энергия частицы не может квантоваться. Тем