Можей Н.П.
к.ф.-м. н., доцент,
кафедра "Высшая математика",
Брянский государственный технический университет

Нормальные связности на трехмерных однородных пространствах с разрешимой группой преобразований

Аннотация. В работе представлена локальная классификация трехмерных однородных пространств, допускающих нормальную связность, рассмотрен случай разрешимой группы Ли-преобразований. Описаны все инвариантные аффинные связности на таких однородных пространствах вместе с их тензорами кривизны и кручения. Исследованы алгебры голономии однородных пространств и найдено, когда инвариантная связность нормальна. В работе использован алгебраический подход для описания связностей, методы теории групп Ли, алгебр Ли и однородных пространств.

Ключевые слова: нормальная связность, однородное пространство, группа преобразований, алгебра голономии.

Mozhej N.P.
Cand. Sci. (Phis.-Math.),
Assoc. Prof., Chair "Higher Mathematics",
Bryansk State Technical University

Normal connections on three-dimensional homogeneous spaces with solvable group of transformations

Abstract. The paper presents a local classification of three-dimensional homogeneous spaces admitting a normal connection; a case of a solvable group of Lie transformations has been explored. There are described all invariant affine connections on such homogeneous spaces with their tensors of curvature and torsion. There have been explored golonomy algebras of homogeneous spaces. We have found when invariant connection is normal. In this paper, we have used an algebraic approach to describe connections, methods of the theory of Lie groups, Lie algebras and of homogeneous spaces.

Keywords: normal connection, homogeneous space, group of transformations, holonomy algebra.

Введение Понятие нормальной связности для риманова многообразия ввел Э. Картан [1]. Многообразия с нулевым кручением (т. е. плоской нормальной связностью) исследовали почти одновременно Д.И. Перепелкин [3] и Фабрициус–Бьерре [5], а также Э. Картан. Итоги исследований этих работ подведены в монографии Чена [4]. Ряд исследований посвящен общим вопросам нормальных связностей. Их характеристику среди всех метрических линейных связностей в нормальных расслоениях дал Номидзу [16]. Нгуеи Ван Хей изучал условия существования инвариантной аффинной связности на однородном пространстве. Его результат в [12] обобщает некоторые результаты Номидзу [14, 15] и связан с проблемой характеризации аффинной связности, которая допускает транзитивную группу аффинных преобразований. Эта проблема изучалась Амброузом, Зингером, Номидзу и другими. Связность на многообразии определяет через параллельный перенос понятие голономии. Важными примерами являются голономия связности Леви-Чивиты в римановой геометрии (называемая "риманова голономия"), голономия связностей в векторных расслоениях, голономия связностей Картана и др. В каждом из этих случаев голономия связности может быть описана через группу Ли – группу голономии. Теория связностей имеет много приложений, например, в калибровочных моделях фундаментальных взаимодействий связности на главных расслоениях интерпретируются как калибровочные поля — переносчики взаимодействий, характеризуемых той или иной группой симметрий.

Основные обозначения Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа G, (M, G) – однородное пространство, G0 – стабилизатор произвольной точки x. Проблема классификации однородных пространств (M, G) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли (G, G0), т.к. многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов G/G0 (см., например, [2]).

Изучая однородные пространства, важно рассматривать не саму группу G, а ее образ в Diff(M), другими словами, достаточно рассматривать только эффективные действия группы G на многообразии M.

Начнем с локального описания однородных пространств и связностей на них. Пусть g – алгебра Ли группы Ли G, а g0 – подалгебра, соответствующая подгруппе G0. Пара (g, g0) алгебр Ли называется эффективной, если подалгебра g0 не содержит отличных от нуля идеалов g. Изотропное действие группы G на TxM – это фактордействие присоединенного действия G0 на g: s.(x+ g0)=(Ads)(x)+g0. При этом g0 действует на касательном пространстве TxM= g/g0 как x.(y+g0)=[x,y]+g0. Пара (g, g0) называется изотропно–точной, если точно изотропное представление подалгебры g0. С геометрической точки зрения это означает, что естественное действие стабилизатора G0 на TxM имеет нулевое ядро. Поскольку однородное пространство допускает аффинную связность, g0–модуль g/g0 точен. Для нахождения всех изотропно-точных пар коразмерности три нужно классифицировать (с точностью до изоморфизма) все точные трехмерные g0–модули U (это эквивалентно классификации подалгебр в gl(3,R) с точностью до сопряженности), а далее найти (с точностью до эквивалентности) все пары (g, g0) такие, что g0–модули g/g0 и U эквивалентны.

Все такие пары коразмерности три найдены в [8], дальнейшая нумерация пар соответствует приведенной там. Ограничимся случаем с ненулевым стабилизатором, т.к. все остальные однородные пространства – просто трехмерные группы Ли. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к g0 в g, и факторпространство m=g/g0. Аффинной связностью на паре (g, g0) называется такое отображение Л:g→gl(m), что его ограничение на g0 есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является g0–инвариантным. Хорошо известно (см., например, [13]), что инвариантные аффинные связности на однородном пространстве (M, G) находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре (g, g0). Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензор кручения имеет вид:

T(x,y)=Л(x)y-Л(y)x-[x,y],

тензор кривизны имеет вид

R(x,y)=[Л(x),Л(y)]-Л([x,y]).

Переформулируем теорему Вана об алгебре группы голономии инвариантной связности: алгебра Ли h группы голономии инвариантной связности Л на паре (g, g0) – это подалгебра алгебры Ли gl(3,R) вида

V+[Л(g),V]+[Л(g),[Л(g),V]]+…,

где V – подпространство, порожденное {[Л(x),Л(y)]-Л([x,y])}.

Положим a равной подалгебре в gl(3,R), порожденной множеством {Л(x)}. Первоначально a была введена в римановом случае Костантом [9, 10] и использовалась Лихнеровичем [11] и Ваном [17] в более общей ситуации. Будем говорить, что инвариантная связность нормальна, если h=a.

Дадим геометрическую интерпретацию понятию нормальной связности: пусть P - инвариантная структура на однородном пространстве M. Фиксируем инвариантную связность в P, и пусть P(u) – расслоение голономии через репер u. Тогда связность нормальна тогда и только тогда, когда каждый элемент из G отображает P(u) в себя. В силу теоремы редукции [7] для определенного типа проблем, связанных со связностью в главном расслоении, можем считать, что P есть расслоение голономии. Такое упрощение, вообще говоря, недостижимо, если G не отображает расслоение голономии в себя. Это означает, что если инвариантная связность на однородном пространстве нормальна, то теорема редукции все еще может быть успешно использована. Отсюда следует, что если инвариантная связность нормальна, то каждое параллельное тензорное поле на M инвариантно под действием G. Это утверждение было доказано Лихнеровичем [11].

Результаты. Будем описывать пару (g, g0) при помощи таблицы умножения алгебры Ли g. Для нумерации пар будет использована запись d.n.m где d – размерность подалгебры, a n – номер подалгебры в gl(3,R), m – номер пары (g, g0), соответствующий приведенному в [8]. Будем описывать связность на трехмерном однородном пространстве через образы базисных векторов.

Теорема. Пусть g0 – подалгебра алгебры Ли gl(3,R) такая, что пара (g, g0) допускает нормальную связность и g разрешима, размерность g0 не менее двух. Тогда g0 сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр:

$$3.20\begin{bmatrix} z & y & x \\ & & \\ & & \end{bmatrix},\ 2.9\begin{bmatrix} y & & x \\ & & \\ & & \mu y \end{bmatrix}, \mu = 0, -1,\ 2.17\begin{bmatrix} & & x \\ & & y \\ & & \end{bmatrix},$$

$$2.20\begin{array}{|ccc|} \hline & y & x \\ & & \\ & & \\ \hline \end{array},\ 2.21\begin{bmatrix} x & y & \\ & & y \\ & & -x \end{bmatrix}.$$

Здесь предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат R.

Все вещественные пары (g, g0) коразмерности 3, g разрешима, размерность g0 не менее двух, допускающие нормальную связность, имеет следующий вид:

3.20.12, 3.20.14. Таблица умножения:

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	e_3	u_1	0	0
e_2	e_2	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	0	$\pm e_2$	e_3+u_1 ,
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	$-u_1$
u_2	0	$-u_1$	$\mp e_2$	0	0	$-u_2$
u_3	0	0	$-e_3-u_1$	u_1	u_2	0

3.20.15. Таблица умножения:

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	e_3	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	0	$-e_2$	e_3+u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	$\frac{3}{2}e_2-e_3-\frac{3}{2}u_1$	$-\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{2}u_1$,
u_2	0	$-u_1$	e_2	$-\frac{3}{2}e_2+e_3+\frac{3}{2}u_1$	0	$\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}u_2+\frac{3}{2}u_3$
u_3	0	0	$-e_3-u_1$	$\frac{1}{2}e_2-\frac{1}{2}u_1$	$-\frac{1}{2}e_1-\frac{1}{2}u_2-\frac{3}{2}u_3$	0

3.20.20. Таблица умножения:

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	e_3	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1	e_2
e_3	$-e_3$	0	0	0	0	u_1 ,
u_1	u_1	0	0	0	0	αu_1
u_2	0	$-u_1$	0	0	0	$(\alpha-1)u_2$
u_3	0	$-e_2$	$-u_1$	$-\alpha u_1$	$(1-\alpha)u_2$	0

3.20.24:

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	e_3	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1	e_3
e_3	$-e_3$	0	0	0	0	u_1 ,
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	u_1
u_2	0	u_1	0	0	0	u_2
u_3	0	$-e_3$	$-u_1$	$-u_1$	$-u_2$	0

2.9.1:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-2e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0 ,
u_2	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0

2.9.2. см 2.9.1, но $[u_1,u_3]=u_2$.

2.9.4** μ**=0,-1:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-\mu)e_2$	u_1	0	μu_3
e_2	$(\mu-1)e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	u_1	0 ,
u_2	0	0	$-u_1$	0	$-u_3$
u_3	$-\mu u_3$	$-u_1$	0	u_3	0

2.9.5, 2.9.6:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1
u_1	u_1	0	0	0	$\pm e_2$
u_2	0	0	0	0	αu_2
u_3	0	$-u_1$	$\mp e_2$	$-\alpha u_2$	0

$\alpha \geq 0$,

2.9.7:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1
u_1	u_1	0	0	0	0 ,
u_2	0	0	0	0	u_2
u_3	0	$-u_1$	0	$-u_2$	0

2.17.2, 2.17.3:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	0	u_1
e_2	0	0	0	0	u_2
u_1	0	0	0	0	$\pm e_1$,
u_2	0	0	0	0	αe_2
u_3	$-u_1$	$-u_2$	$\mp e_1$	$-\alpha e_2$	0

2.17.4 см 2.17.2, но $[u_1,u_3]=\alpha e_1-e_2, [u_2,u_3]=e_1+\alpha e_2, \alpha\geq 0$.

2.17.6, 2.17.7 см 2.17.2, но $[u_1,u_3]=\pm e_1, [u_2,u_3]=e_1+e_2,$

2.17.8 см 2.17.2, но $[u_1,u_3]-\delta e_1+u_1, [u_2,u_3]-\beta e_2+\alpha u_2, -1<\alpha<1,$

2.17.9 см 2.17.2, но $[u_1,u_3]=\delta e_1+e_2+u_1, [u_2,u_3]=\gamma e_1+\beta e_2+\alpha u_1, -1<\alpha<1,$

2.17.10 см 2.17.2, но $[u_1,u_3]=\delta e_1+u_1, [u_2,u_3]=e_1+\beta e_2+\alpha u_2, \ 1<\alpha<1,$

2.17.13, 2.17.14 см 2.17.2, но $[u_1,u_3]=\alpha e_1-e_2, [u_2,u_3]=\alpha e_2+u_1,$

2.17.15. см 2.17.2, но $[u_1,u_3]-\alpha e_1, [u_2,u_3]-e_1+\alpha e_2+u_1,$

2.17.17 см 2.17.2, но $[u_1,u_3]=e_2, [u_2,u_3]=\alpha e_1+\beta e_2+u_1,$

2.17.18 см 2.17.2, но $[u_1,u_3]=\gamma e_2+u_1, [u_2,u_3]=\alpha e_1+\beta e_2+u_1+u_2,$

2.17.19 см 2.17.2, но $[u_1,u_3]-\alpha e_1+u_1, [u_2,u_3]-\beta e_2+u_1+u_2,$

2.17.20 см 2.17.2, но $[u_1,u_3]=\alpha e_1+u_1, [u_2,u_3]=\beta e_1+\alpha e_2+u_1+u_2,$

2.17.21 см 2.17.2, но $[u_1,u_3]-\alpha e_1+u_1, [u_2,u_3]-e_1+\alpha e_2+u_2,$

2.17.22 см 2.17.2, но $[u_1,u_3]=\alpha e_1-\beta e_2+u_1, [u_2,u_3]=\beta e_1+\alpha e_2+u_2, \beta>0,$

2.17.23 см 2.17.2, но $[u_1,u_3]=\alpha e_1+u_1, [u_2,u_3]=\beta e_2+u_2, |\alpha|\leqslant|\beta|,$

2.17.24 см 2.17.2, но $[u_1,u_3]=\delta e_1+\gamma e_2+\alpha u_1-u_2, [u_2,u_3]=\beta e_1+\delta e_2+u_1+\alpha u_2, |\beta|\leqslant|\gamma|,$

2.17.26 см 2.17.2, но $[u_1,u_3]=\alpha e_1+\beta e_2+u_1, [u_2,u_3]=e_1+\gamma e_2 \ u_2, \ 1\leqslant\beta\leqslant1,$

2.20.3. Таблица умножения:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	e_1+u_1	0
e_2	0	0	0	e_2	u_1
u_1	0	0	0	$2u_1$	0
u_2	$e_1 \quad u_1$	e_2	$2u_1$	0	$e_2 \quad u_3$
u_3	0	u_1	0	e_1+u_1	0

,

2.20.4 см 2.20.3, но $[u_2,u_3]=e_1-u_3$, *2.20.8 см 2.20.3, но* $[e_2,u_2]=e_1+e_2$,

2.20.9 Таблица умножения:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	αe_1
e_2	0	0	0	0	$u_1+(\alpha+1)e_2$
u_1	0	0	0	0	$2\alpha u_1$
u_2	$-u_1$	0	0	0	$e_1+\alpha u_2$
u_3	$-\alpha e_1$	$-u_1-(\alpha+1)e_2$	$-2\alpha u_1$	$-e_1-\alpha u_2$	0

,

2.20.10 см 2.20.9, но $[u_1,u_3]-(2\alpha+1)u_1, [u_2,u_3]-e_2+(\alpha+1)u_2$,

2.20.11:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	e_1
e_2	0	0	0	e_1	u_1
u_1	0	0	0	$-e_1$	$-u_1$
u_2	$-u_1$	$-e_1$	e_1	0	$-e_2$
u_3	e_1	$-u_1$	u_1	e_2	0

,

2.20.12, 2.20.14:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	$-2e_1$
e_2	0	0	0	$+e_1$	$-e_2+u_1$
u_1	0	0	0	0	$3u_1$
u_2	$-u_1$	$+e_1$	0	0	e_2-u_2
u_3	$2e_1$	e_2-u_1	$3u_1$	u_2-e_2	0

,

2.20.13:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	$-e_1$
e_2	0	0	0	e_1	u_1
u_1	0	0	0	e_1	$-u_1$
u_2	$-u_1$	e_1	$-e_1$	0	e_2
u_3	e_1	$-u_1$	u_1	$-e_2$	0

2.20.15:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1+e_1	e_2
e_2	0	0	0	e_2	u_1
u_1	0	0	0	u_1	0
u_2	$-u_1-e_1$	$-e_2$	$-u_1$	0	0
u_3	$-e_2$	$-u_1$	0	0	0

2.20.16:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1-e_1	e_2
e_2	0	0	0	$-e_2$	u_1
u_1	0	0	0	$-u_1$	0
u_2	$-u_1+e_1$	e_2	u_1	0	0
u_3	$-e_2$	$-u_1$	0	0	0

2.20.17:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	$u_1+\alpha e_1$	e_1+e_2
e_2	0	0	0	αe_2	u_1+e_2
u_1	0	0	0	αu_1	u_1
u_2	$-u_1-\alpha e_1$	$-\alpha e_2$	$-\alpha u_1$	0	0
u_3	$-e_1-e_2$	$-u_1-e_2$	$-u_1$	0	0

2.20.18. Таблица умножения:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	αe_1
e_2	0	0	0	0	$u_1+\alpha e_2$
u_1	0	0	0	0	$(\alpha+1)u_1$
u_2	$-u_1$	0	0	0	u_2
u_3	$-\alpha e_1$	$-u_1-\alpha e_2$	$-(\alpha+1)u_1$	$-u_2$	0

2.20.19. Таблица умножения:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	$(\beta+1)e_1$
e_2	0	0	0	0	$u_1+\beta e_2$
u_1	0	0	0	0	$(\alpha+\beta)u_1$
u_2	$-u_1$	0	0	0	$(\alpha-1)u_2$
u_3	$-(\beta+1)e_1$	$-u_1-\beta e_2$	$-(\alpha+\beta)u_1$	$(1-\alpha)u_2$	0

2.20.20. Таблица умножения:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1+e_1	$(\beta+1)e_1$
e_2	0	0	0	e_2	$u_1+\beta e_2$
u_1	0	0	0	u_1	$(\beta+1)u_1$
u_2	$-u_1-e_1$	$-e_2$	$-u_1$	0	0
u_3	$-(\beta+1)e_1$	$-u_1-\beta e_2$	$-(\beta+1)u_1$	0	0

2.20.21. Таблица умножения

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	$u_1+\beta e_1$	αe_1
e_2	0	0	0	$e_1+\beta e_2$	$u_1+(\alpha+1)e_2$
u_1	0	0	0	βu_1-e_1	αu_1
u_2	$-u_1-\beta e_1$	$-e_1-\beta e_2$	$-\beta u_1+e_1$	0	0
u_3	$-\alpha e_1$	$-u_1-(\alpha+1)e_2$	$-\alpha u_1$	0	0

2.20.22. Таблица умножения

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	αe_1
e_2	0	0	0	e_1	$u_1+(\alpha+1)e_2$
u_1	0	0	0	0	$(\alpha\ \ 1)u_1$
u_2	u_1	e_1	0	0	u_2
u_3	$-\alpha e_1$	$-u_1-(\alpha+1)e_2$	$(1-\alpha)u_1$	u_2	0

2.20.23. Таблица умножения

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	αe_1+u_1	βe_1
e_2	0	0	0	αe_2-e_1	$u_1+(\beta+1)e_2$
u_1	0	0	0	$e_1+\alpha u_1$	βu_1
u_2	$-\alpha e_1-u_1$	$-\alpha e_2+e_1$	$-e_1-\alpha u_1$	0	0
u_3	$-\beta e_1$	$-u_1-(\beta+1)e_2$	$-\beta u_1$	0	0

2.20.24. Таблица умножения

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	αe_1
e_2	0	0	0	$-e_1$	$u_1+(\alpha+1)e_2$
u_1	0	0	0	0	$(\alpha\ \ 1)u_1$
u_2	u_1	e_1	0	0	u_2
u_3	$-\alpha e_1$	$-u_1-(\alpha+1)e_2$	$(1-\alpha)u_1$	u_2	0

2.20.25. Таблица умножения:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	$u_1-\alpha e_1$	$\frac{\alpha-}{3}$ [illegible]
e_2	0	0	0	$-e_1-\alpha e_2$	u_1+ [illegible]
u_1	0	0	0	$\frac{3}{2}e_1-e_2\frac{3+2\alpha}{2}u_1$	$\frac{2\alpha+1}{6}$ [illegible]
u_2	$-u_1+\alpha e_1$	$e_1+\alpha e_2$	$-\frac{3}{2}e_1+e_2+\frac{3+2\alpha}{2}u_1$	0	$\frac{1}{2}(u_2$ [illegible]
u_3	$\frac{1-\alpha}{3}e_1$	$-u_1-\frac{\alpha+2}{3}e_2$	$\frac{1}{2}e_1-\frac{2\alpha+1}{6}u_1$	$-\frac{1}{2}(u_2+3u_3)$	[illegible]

2.20.26. Таблица умножения:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	$e_2+\alpha e_1$
e_2	0	0	0	0	$u_1+\alpha e_2$
u_1	0	0	0	0	$(\alpha+1)u_1$
u_2	u_1	0	0	0	u_2
u_3	$-e_2-\alpha e_1$	$-u_1-\alpha e_2$	$-(\alpha+1)u_1$	$-u_2$	0

2.21.1. Таблица умножения:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	$-u_1$	0	0	0
u_3	u_3	u_2	0	0	0

Пара 2.21.1 допускает псевдориманову метрику, а 3.20.12, 3.20.14, 3.20.15, 3.20.20, 3.20.24, 2.9.1, 2.9.2, 2.9.4-2.9.7, 2.17.2-2.17.4, 2.17.6-2.17.10, 2.17.13-2.17.15, 2.17.17-2.17.24, 2.17.26, 2.20.3, 2.20.4, 2.20.8-2.20.26 не допускают инвариантную метрику.

Симметрическое пространство – пространство аффинной связности без кручения, тензор кривизны которого сохраняется при параллельном перенесении. Название "симметрическое" связано со свойством таких пространств, которое может быть принято за определение: геодезическая симметрия относительно любой точки есть автоморфизм пространства. П.К. Рашевский ввел в рассмотрение класс пространств, представляющих собой пространства аффинной связности с кручением, у которых при параллельном переносе сохраняются как тензор кривизны, так и тензор кручения; эти пространства он назвал симметрическими пространствами с кручением, его результаты были переоткрыты К. Номидзу и вошли в число классических. Соответствующий класс однородных пространств, получивших название "редуктивных пространств", оказался чрезвычайно полезным для многих исследований по однородным пространствам. Однородные пространства являются редуктивными, если [g0,m] лежит в m, и симметрическими, если, кроме того, [m,m] лежит в g0. Из пар, указанных в теореме, редуктивное пространство задают 2.9.1, 2.9.2, 2.9.4-2.9.7, 2.17.2-2.17.4, 2.17.6-2.17.10, 2.17.13-2.17.15, 2.17.17-2.17.24, 2.17.26, 2.21.1, а симметрическое пространство задают 2.9.1, 2.17.2-2.17.4, 2.17.6, 2.17.7, 2.21.1.

Доказательство. Для получения этого результата из пар, найденных в [8], выбираем допускающие нормальную связность и выписываем соответствующее изотропное представление, находим аффинные связности, алгебры голономии. Определяем, при каких условиях связность является нормальной.

Рассмотрим пары 3.20.12, 3.20.14. Связность

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & \pm 1 & q_{1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3}+1 \end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2+p_{1,3} & p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}p_{1,3}+p_{1,2} & p_{1,3}^2+2p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3}+q_{1,1}+p_{1,2} & p_{1,3}^2+2p_{1,3} \\ 0 & -p_{1,2}^2 \mp p_{1,3} & -p_{1,2}p_{1,3}+q_{1,1} \end{pmatrix},$$

кручение $(p_{1,2} \;\; q_{1,1},0,0),(p_{1,3} \;\; r_{1,1}+1,0,0),(0,p_{1,3} \;\; r_{1,1}+1,q_{1,1} \;\; p_{1,2})$. **В случае 3.20.12 связность является нормальной при** $q_{1,1}=-\frac{p_{1,2}}{2}\neq 0$, $r_{1,1}=-\frac{p_{1,3}+1}{2}$, $p_{1,3}\neq 0$, **тогда алгебра голономии**

$$\begin{pmatrix} p_6 & p_1 & p_2 \\ 0 & p_3 & p_5 \\ 0 & p_4 & p_3 \end{pmatrix}.$$

В случае 3.20.14 связность нормальна при $p_{1,3}\neq 0$, $q_{1,1}=-\frac{p_{1,2}}{2}\neq 0$, $r_{1,1}=-\frac{p_{1,3}+1}{2}$, $p_{1,2}^2\neq(p_{1,3}+1)^2$, **тогда алгебра голономии совпадает со случаем 3.20.12.**

 ISSN 2224-2028

Рассмотрим пару 3.20.15. Связность совпадает со случаем 3.20.14. Тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{12}{}^2 - p_{1,3} - \frac{3}{2} + \frac{3p_{12}}{2} & p_{1,2}p_{1,3} + 1 + \frac{3p_{1,3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{12}p_{1,3} + \frac{1}{2} \; \frac{p_{12}}{2} & p_{1,3}{}^2 + \frac{p_{1,3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{q_{1,1}}{2} - \frac{3r_{1,1}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} - \frac{q_{1,1}}{2} - \frac{p_{1,2}}{2} - \frac{3r_{1,1}}{2} & p_{1,3}{}^2 + \frac{p_{1,3}}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} - p_{1,2}{}^2 + p_{1,3} - \frac{3p_{1,2}}{2} & -p_{1,2}p_{1,3} - \frac{q_{1,1}}{2} - \frac{3r_{1,1}}{2} - \frac{3p_{1,3}}{2} - \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

кручение $\left(p_{1,2} - q_{1,1} + \frac{3}{2}, 0, 0\right), \left(p_{1,3} - r_{1,1} - \frac{1}{2}, 0, 0\right), \left(0, p_{1,3} - r_{1,1} - \frac{1}{2}, q_{1,1} - p_{1,2} - \frac{3}{2}\right)$.

Связность нормальна при $p_{1,3} \neq 0$, $q_{1,1} = -\frac{p_{1,2}}{2}$, $q_{1,1} + 1 + 3r_{1,1} \neq 0$, $r_{1,1} = -\frac{p_{1,3} + 1}{2}$, $p_{1,2}^2 \neq (p_{1,3} + 1)^2$, тогда алгебра голономии совпадает со случаем 3.20.12.

Рассмотрим пару 3.20.20 ($\lambda=0$). Связность

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1} + p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} + 1 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1} + p_{1,3} \end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}{}^2 & p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} + p_{1,2}p_{1,3} - ap_{1,2} & p_{1,3}{}^2 - ap_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -(a-1)q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} - aq_{1,1} - ap_{1,2} + q_{1,1} + p_{1,2} & p_{1,3}{}^2 - ap_{1,3} \\ 0 & p_{1,2}{}^2 & p_{1,2}p_{1,3} - aq_{1,1} + q_{1,1} \end{pmatrix},$$

кручение $(p_{1,2} - q_{1,1}, 0, 0), (p_{1,3} - r_{1,1} - a, 0, 0), (0, p_{1,3} - r_{1,1} - a, q_{1,1} - p_{1,2})$.

Связность является нормальной при $a \neq 1$, $p_{1,3} \neq 0$, $q_{1,1} = -\frac{p_{1,2}}{2} \neq 0$, $r_{1,1} = -\frac{p_{1,3} + 1}{2}$ тогда алгебра голономии совпадает со случаем 3.20.12.

Рассмотрим пару 3.20.24. Связность

$$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}q_{1,1} & 0 & 0\\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & 0 & q_{1,1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}r_{1,1} & 0 & 0\\ 0 & r_{1,1} & 1\\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны

$$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2}^{\ 2} & p_{1,2}p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & p_{1,2}p_{1,3}-p_{1,2} & p_{1,2}+p_{1,3}^{\ 2}-p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-q_{1,1} & 0 & 0\\ 0 & p_{1,2}p_{1,3}-q_{1,1}-p_{1,2} & p_{1,2}+p_{1,3}^{\ 2}-p_{1,3}\\ 0 & -p_{1,2}^{\ 2} & -p_{1,2}p_{1,3}-q_{1,1}\end{pmatrix},$$

кручение $(p_{1,2}-q_{1,1},0,0),(p_{1,3}-r_{1,1}-1,0,0),(0,p_{1,3}-r_{1,1}-1,q_{1,1}-p_{1,2})$. Связность нормальна при $q_{1,1}=-\dfrac{p_{1,2}}{2}\neq 0$, $r_{1,1}=-\dfrac{p_{1,3}}{2}$, алгебра голономии совпадает с 3.20.12.

Рассмотрим пару 2.9.1 при $\lambda=0$, $\mu=-1$ связность

$$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2} & 0\\ 0 & 0 & p_{2,3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}q_{1,1} & 0 & 0\\ 0 & q_{2,2} & 0\\ 0 & 0 & q_{1,1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -p_{2,3} & 0 & 0\\ 0 & p_{1,2} & 0\end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны

$$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2}q_{2,2}-q_{1,1}p_{1,2} & 0\\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1}-q_{2,2}p_{2,3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-p_{1,2}p_{2,3} & 0 & 0\\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3} & 0\\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ p_{2,3}q_{1,1}-q_{2,2}p_{2,3} & 0 & 0\\ 0 & q_{1,1}p_{1,2}-p_{1,2}q_{2,2} & 0\end{pmatrix},$$

кручение $(p_{1,2}-q_{1,1},0,0),(0,2p_{2,3},0),(0,0,q_{1,1}-p_{1,2})$. Связность является нормальной при $p_{1,2}\neq 0$, $p_{2,3}\neq 0$, $q_{2,2}=-2q_{1,1}$, тогда алгебра голономии — $sl(3,\mathbb{R})$.

Рассмотрим пару 2.9.2 при $\mu=-1$ связность совпадает со случаем 2.9.1.

Тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}q_{2,2}-q_{1,1}p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1}\ q_{2,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3}-q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3}\ q_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3}-q_{1,1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}q_{1,1}-q_{2,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2}-p_{1,2}q_{2,2} & 0 \end{pmatrix},$$

кручение $(p_{1,2}-q_{1,1},0,0),(0,2p_{2,3}-1,0),(0,0,q_{1,1}-p_{1,2})$ **Связность является нормальной при** $p_{1,2}\neq 0$, $p_{2,3}\neq 0$, $2q_{1,1}+q_{2,2}\neq 0$, **тогда алгебра голономии —** $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, **либо при** $p_{1,2}\neq 0$, $p_{2,3}\neq 0$, $2q_{1,1}+q_{2,2}=0$, **тогда алгебра голономии —** $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$,

Рассмотрим пару 2.9.4 при $\mu=-1$ связность совпадает со случаем 2.9.1.

Тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}q_{2,2}-q_{1,1}p_{1,2}-p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1}-q_{2,2}p_{2,3}-p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}q_{1,1}-q_{2,2}p_{2,3}-p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2}-p_{1,2}q_{2,2}+p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

кручение $(p_{1,2}-q_{1,1}-1,0,0),(0,2p_{2,3},0),(0,0,q_{1,1}-p_{1,2}+1)$. **Связность является нормальной при** $p_{1,2}\neq 0$, $p_{2,3}\neq 0$, $2q_{1,1}+q_{2,2}=0$, **тогда алгебра голономии —** $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$.

Рассмотрим пару 2.17.2. Связность

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & r_{1,3} \\ -p_{2,3} & r_{1,1}+p_{1,3}-q_{2,3} & r_{2,3} \\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix},$$

связность нормальна при $a \neq 0$, $p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$, алгебра голономии

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим пару 2.17.3. Связность такая же, как в случае 2.17.2, нормальна при $a \neq 0$, $p_{1,3} - r_{1,1} - p_{2,3} - q_{2,3} - q_{1,3} - 0$, тогда алгебра голономии, как у 2.17.2.

Рассмотрим пару 2.17.4. Связность, как в случае 2.17.2, связность нормальна при $p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$, алгебра голономии, как в случае 2.17.2

Рассмотрим пару 2.17.6. Связность, как в случае 2.17.2, связность нормальна при $p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$, алгебра голономии, как в случае 2.17.2.

Рассмотрим пару 2.17.7. Связность, как в случае 2.17.2, связность нормальна при $p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$, алгебра голономии, как в случае 2.17.2

Рассмотрим пару 2.17.8. Связность, как в случае 2.17.2, нормальна при $b \neq 0$, $\delta \neq 0$, $p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$, алгебра голономии, как у 2.17.2.

Рассмотрим пару 2.17.9. Связность, как в случае 2.17.2, нормальна при $b\delta \neq \gamma$, $p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$, алгебра голономии, как в случае 2.17.2.

Рассмотрим пару 2.17.10. Связность, как в случае 2.17.2, нормальна при $b\delta \neq 0$, $p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$, алгебра голономии, как в случае 2.17.2

Рассмотрим пару 2.17.13. Связность, как в случае 2.17.2, нормальна при $a \neq 0$, $p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$, алгебра голономии, как в случае 2.17.2

Рассмотрим пару 2.17.14. Связность, как в случае 2.17.2, связность нормальна при $a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$, алгебра голономии, как в случае 2.17.2.

Рассмотрим пару 2.17.15. Связность, как в случае 2.17.2, связность нормальна при $a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$, алгебра голономии, как в случае 2.17.2.

Рассмотрим пару 2.17.17. Связность, как в случае 2.17.2, связность нормальна при $a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$, алгебра голономии, как в случае 2.17.2.

Рассмотрим пару 2.17.18. Связность, как в случае 2.17.2, связность нормальна при $ab\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$, алгебра голономии, как в случае 2.17.2.

Рассмотрим пару 2.17.19. Связность, как в случае 2.17.2, связность нормальна при $ab\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$, алгебра голономии, как в случае 2.17.2.

Рассмотрим пару 2.17.20. Связность, как в случае 2.17.2, связность нормальна при $a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$, алгебра голономии, как в случае 2.17.2.

Рассмотрим пару 2.17.21. Связность, как в случае 2.17.2, связность нормальна при $a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$, алгебра голономии, как в случае 2.17.2.

Рассмотрим пару 2.17.22. Связность, как в случае 2.17.2, связность нормальна при $a^2+b^2\neq 0$ (всегда, т.к. $b>0$), $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$, алгебра голономии, как в случае 2.17.2.

Рассмотрим пару 2.17.23. Связность, как в случае 2.17.2, связность нормальна при $ab \neq 0$, $p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$, алгебра голономии, как в случае 2.17.2.

Рассмотрим пару 2.17.24. Связность, как в случае 2.17.2, нормальна при $\delta^2 \neq bc$, $p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$, алгебра голономии, как в случае 2.17.2.

Рассмотрим пару 2.17.25. Связность, как в случае 2.17.2, нормальна при $ab \neq 0$, $p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$, алгебра голономии, как в 2.17.2.

Рассмотрим пару 2.17.26, связность нормальна при $b \neq ac$, $p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$, тогда алгебра голономии, как в случае 2.17.2.

Рассмотрим пары 2.20.11 и 2.20.13. Связность

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & q_{1,1} + p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & \pm 1 & q_{1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & r_{1,1} - 1 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1} + p_{1,3} \end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & {p_{1,2}}^2 + p_{1,3} \pm 1 & p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}p_{1,3} & {p_{1,3}}^2 + p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -q_{1,2} + q_{1,3}p_{1,2} - r_{1,2}p_{1,2} \mp r_{1,3} & q_{1,3}p_{1,3} - r_{1,2}p_{1,3} \pm 1 \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} & {p_{1,3}}^2 + p_{1,3} \\ 0 & \mp 1 - {p_{1,2}}^2 \mp p_{1,3} & -p_{1,2}p_{1,3} \end{pmatrix},$$

кручение $(p_{1,2} - q_{1,1}, 0, 0)$, $(p_{1,3} - r_{1,1} + 1, 0, 0)$, $(q_{1,3} - r_{1,2}, p_{1,3} - r_{1,1} + 1, q_{1,1} - p_{1,2})$.

Связность нормальна при $q_{1,1} = p_{1,2} = r_{1,1} = 0$, $p_{1,3} = 1$, тогда алгебра голономии

$$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & p_3 & p_4 \\ 0 & p_5 & -p_3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим пары 2.20.15, 2.20.16. Связность

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2}\pm 1 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{1,1}\pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & r_{1,1} & 1 \\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2 & p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}p_{1,3} & p_{1,2}+p_{1,3}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,2}p_{1,2}\mp r_{1,2} & q_{1,2}+q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}\mp r_{1,3} \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} & p_{1,2}+p_{1,3}^2 \\ 0 & -p_{1,2}^2 & -p_{1,2}p_{1,3} \end{pmatrix}.$$

кручение $(p_{1,2}-q_{1,1}\mp 1,0,0),(p_{1,3}-r_{1,1},0,0),(q_{1,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1},q_{1,1}\pm 1-p_{1,2})$. Связность нормальна при $q_{1,1}=p_{1,3}=r_{1,1}=0$, $p_{1,2}=\mp 2$, алгебра голономии совпадает с 2.20.11.

Рассмотрим пару 2.20.17. Связность

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2}+a & p_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{1,1}+a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & r_{1,1}+1 & 1 \\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3}+1 \end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2 & p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}p_{1,3} & p_{1,2}+p_{1,3}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & q_{1,2}+q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,2}p_{1,2}-r_{1,2}a & q_{1,2}+q_{1,3}p_{1,3}+q_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}-r_{1,3}a \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} & p_{1,2}+p_{1,3}^2 \\ 0 & -p_{1,2}^2 & -p_{1,2}p_{1,3}, \end{pmatrix}$$

кручение $(p_{1,2}-q_{1,1}-a,0,0),(p_{1,3}-r_{1,1}-1,0,0),(q_{1,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1}-1,q_{1,1}+a-p_{1,2})$

Связность нормальна при $a\neq 0$, $q_{1,1}=r_{1,1}=0$, $p_{1,3}=-2$, $p_{1,2}=-2a$, тогда алгебра голономии совпадает со случаем 2.20.11.

Рассмотрим пару 2.20.20. Связность

$$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3}\\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2}+1 & p_{1,3}\\ 0 & 0 & q_{1,1}+1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3}\\ 0 & r_{1,1}+b+1 & 0\\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3}+b\end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны

$$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2}^2 & p_{1,2}p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & p_{1,2}p_{1,3} & p_{1,3}^2-p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & q_{1,2}b+q_{1,2}+q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,2}p_{1,2}-r_{1,2} & q_{1,3}p_{1,3}+q_{1,3}b-r_{1,2}p_{1,3}-r_{1,3}\\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} & p_{1,3}^2-p_{1,3}\\ 0 & -p_{1,2}^2 & -p_{1,2}p_{1,3}\end{pmatrix},$$

кручение

$$(p_{1,2}-q_{1,1}-1,0,0),(p_{1,3}-r_{1,1}-b-1,0,0),(q_{1,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1}-b-1,q_{1,1}+1-p_{1,2})$$

Связность нормальна при $b\neq-\frac{1}{2}$, $q_{1,1}=r_{1,1}=0$, $p_{1,3}=-2b-1$, $p_{1,2}=-2$, **тогда алгебра голономии совпадает со случаем 2.20.11.**

Рассмотрим пару 2.20.21. Связность

$$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3}\\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2}+b & p_{1,3}\\ 0 & 1 & q_{1,1}+b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3}\\ 0 & r_{1,1}+a & 0\\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3}+a+1\end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны

$$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2}^2+p_{1,3}+1 & p_{1,2}p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & p_{1,2}p_{1,3} & p_{1,3}^2+p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & q_{1,2}a+q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,2}p_{1,2}-r_{1,2}b-r_{1,3} & q_{1,3}p_{1,3}+q_{1,3}a+q_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}-r_{1,3}b\\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} & p_{1,3}^2+p_{1,3}\\ 0 & -1-p_{1,2}^2-p_{1,3} & -p_{1,2}p_{1,3}\end{pmatrix},$$

кручение

$$(p_{1,2}-q_{1,1}-b,0,0),(p_{1,3}-r_{1,1}-a,0,0),(q_{1,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1}-a,q_{1,1}+b-p_{1,2}).$$

Связность нормальна при $a\neq-\frac{1}{2}$, $q_{1,1}=r_{1,1}=0$, $p_{1,3}=-2a-1$, $p_{1,2}=-2b$, **тогда алгебра голономии совпадает со случаем 2.20.11**

Рассмотрим пару 2.20.23. Связность

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2}+a & p_{1,3} \\ 0 & -1 & q_{1,1}+a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & r_{1,1}+b & 0 \\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3}+b+1 \end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^{\;2}-p_{1,3}-1 & p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}p_{1,3} & p_{1,3}^{\;2}+p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & q_{1,2}b+q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,2}p_{1,2}-r_{1,2}a+r_{1,3} & q_{1,3}p_{1,3}+q_{1,3}b+q_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}-r_{1,3}a \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} & p_{1,3}^{\;2}+p_{1,3} \\ 0 & 1-p_{1,2}^{\;2}+p_{1,3} & -p_{1,2}p_{1,3} \end{pmatrix},$$

кручение

$$(p_{1,2}-q_{1,1}-a,0,0),\ (p_{1,3}-r_{1,1}-b,0,0),\ (q_{1,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1}-b,q_{1,1}+a-p_{1,2}).$$

Связность нормальна при $b \neq -\frac{1}{2}$, $a \neq \pm b$, $q_{1,1}=r_{1,1}=0$, $p_{1,3}=-2b-1$, $p_{1,2}=-2a$, **тогда алгебра голономии совпадает со случаем 2.20.11.**

2.21.1. При $\lambda=0$ связность

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^{\;2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^{\;2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}^{\;2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^{\;2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2}^{\;2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2}^{\;2} & 0 \end{pmatrix},$$

кручение $(2p_{1,2},0,0),(0,2p_{1,2},0),(0,0,2p_{1,2})$.

Связность нормальна при $p_{1,2} \neq 0$, **тогда алгебра голономии**

$$\begin{pmatrix} p_3 & p_1 & 0 \\ p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & p_2 & -p_3 \end{pmatrix}.$$

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, при изучении пространств с аффинной связностью, а также могут иметь приложения в общей теории относительности, которая, с математической точки зрения, базируется на геометрии искривленных пространств, в ядерной физике, физике элементарных частиц и др.

Библиографический список

1. *Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. - М.: Моск. ун-т, 1960.*
2. *Онищик А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований. - М.: Физ.-мат. лит., 1995.*
3. *Перепелкин Д. И. Кривизна и нормальные пространства многообразия Vm в Rn.// Матем. сб. - 1935. - 42. - №1. С. 81-120.*
4. *Chen Bang-Yen. Geometry of submanifoids. Pure and Appl. Math., 1973, X, No. 22.*
5. *Fabricius–Bierre F. Sur varietes a torsion nulle. Acta math. 1936, 66, pp. 49-77.*
6. *Gordon Carolyn S. et al. Isometry groups of Riemannian solvmanifolds. Trans. Ampr. Math. Soc. 1988, 307, No. 1, pp. 245-269.*
7. *Kobayashi S. et al. Foundations of differential geometry. John Wiley and Sons. Vol. 1, 1963; Vol. 2, 1969.*
8. *Komrakov B. et al. Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces. Vol. I-III, Preprints Univ. Oslo. 1993, No. 35-37.*
9. *Kostant B. Holonomy and the Lie algebra of infinitesimal motions of a Riemannian manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 1955, 80, pp. 528-542.*
10. *Kostant B. On differential geometry and homogeneous spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1956, 42, pp. 258-261, 354-357.*
11. *Lichnerowicz A. Geometrie des Groupes de Transformations. Paris, Dunod, 1958.*
12. *Nguyen van Hai. Construction de l'algebre de Lie des transformations infinitesimales affines sur un espace homogene a connexion lineaire invariante. C. r. Acad. Sci. Paris. 1966, 263, pp. 876-879.*
13. *Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. Amer. Journ. Math. 1954, Vol. 76, No. 1, pp. 33-65.*
14. *Nomizu K. On local and global existence of Killing vector fields. Ann. Math. 1960, 72, pp. 105-120.*
15. *Nomizu K. Sur les algebras de Lie de generateurs de Killing et l'homogeneite d'une variete riemannienne. Osaka Math. J. 1962, 14, pp. 45-51.*
16. *Nomizu Katsumi Uniqueness of the normal connections and congruence of isometric immersions. Tohoku Math. J. 1976, 28, No. 1, pp. 613-617.*
17. *Wang H. C. On invariant connections over a principal fibre bundle. Nagoya Math. J. 1958, 13, pp. 1-19.*

The list of references

1. *Cartan E. Riemannian Geometry in the orthogonal frame. M., Mosk. University, 1960.*
2. *Onishchik A.L. Topology of transitive groups of Lie transformations. M., Phys.-Math. Lit., 1995.*
3. *Perepelkin D.I. Curvature and normal space of manifold Vm in Rn [Krivizna i normal'nye prostranstva mnogoobrazija Vm v Rn.]. Mat. Coll. [Matem. sb.]. 1935, 42, No. 1, pp. 81-120.*
4. *Chen Bang-Yen. Geometry of submanifoids. Pure and Appl. Math., 1973, X, No. 22.*
5. *Fabricius–Bierre F. Sur varietes a torsion nulle. Acta math. 1936, 66, pp. 49-77.*
6. *Gordon Carolyn S. et al. Isometry groups of Riemannian solvmanifolds. Trans. Ampr. Math. Soc. 1988, 307, No. 1, pp. 245-269.*
7. *Kobayashi S. et al. Foundations of differential geometry. John Wiley and Sons. Vol. 1, 1963; Vol. 2, 1969.*
8. *Komrakov B. et al. Three-dimensional isotropically faithful homogeneous spaces. Vol. I-III, Preprints Univ. Oslo. 1993, No. 35-37.*
9. *Kostant B. Holonomy and the Lie algebra of infinitesimal motions of a Riemannian manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 1955, 80, pp. 528-542.*
10. *Kostant B. On differential geometry and homogeneous spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1956, 42, pp. 258-261, 354-357.*

11. Lichnerowicz A. Geometrie des Groupes de Transformations. Paris, Dunod, 1958.
12. Nguyen van Hai. Construction de l'algebre de Lie des transformations infinitesimales affines sur un espace homogene a connexion lineaire invariante. C. r. Acad. Sci. Paris. 1966, 263, pp. 876-879.
13. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. Amer. Journ. Math. 1954, Vol. 76, No. 1, pp. 33-65.
14. Nomizu K. On local and global existence of Killing vector fields. Ann. Math. 1960, 72, pp. 105-120.
15. Nomizu K. Sur les algebras de Lie de generateurs de Killing et l'homogeneite d'une variete riemannienne. Osaka Math. J. 1962, 14, pp. 45-51.
16. Nomizu Katsumi Uniqueness of the normal connections and congruence of isometric immersions. Tohoku Math. J. 1976, 28, No. 1, pp. 613-617.
17. Wang H. C. On invariant connections over a principal fibre bundle. Nagoya Math. J. 1958, 13, pp. 1-19.

Библиографическая ссылка на статью:

Можей Н.П. Нормальные связности на трехмерных однородных пространствах с разрешимой группой преобразований// Электронный научный журнал "ФИЗ-МАТ". - 2014. - Выпуск 1(15) Январь-Март. С. 20-41. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://www.phiz-math.ingnpublishing.com/archive/2014/release_1_15_january-march/mozhej_n_p_normal_nye_svyaznosti_na_trehmernyh_odnorodnyh_prostranstvah_s_razreshimoj_gruppoj_preobrazovanij/

Получено: 2014-02-11 Одобрено: 2014-03-22 Размещено: 2014-03-27

The reference for citation the article:

Mozhej N.P. Normal connections on three-dimensional homogeneous spaces with solvable group of transformations [Normalnye svyaznosti na trehmernyh odnorodnyh prostranstvah s razreshimoj gruppoj preobrazovanij]. Electronic csientific journal "PHYZ-MATH" [Elektronnyj nauchnyj zhurnal "FIZ-MAT"]. 2014, Release 1(15) January-March, pp. 20-41. [Online]. Available at: http://www.phiz-math.ingnpublishing.com/archive/2014/release_1_15_january-march/mozhej_n_p_normal_nye_svyaznosti_na_trehmernyh_odnorodnyh_prostranstvah_s_razreshimoj_gruppoj_preobrazovanij/

Received: 2014-02-11 Accepted: 2014-03-22 Published on-line: 2014-03-27