Н. П. Можей,
канд. физ.-мат. наук, доцент, Институт непрерывного образования Белорусского государственного университета, г. Минск, Республика Беларусь

ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ И СТРУКТУР НА НИХ

Современная дифференциальная геометрия, как и другие области математики, привлекает новейшие компьютерные технологии для решения своих задач. Данная работа посвящена применению математических пакетов для изучения трехмерных однородных пространств, а также алгебр Ли векторных полей, когомологий, действий групп Ли, аффинных связностей, тензоров кривизны, кручения и геодезических на этих многообразиях. Наиболее эффективное решение этих задач возможно с использованием систем компьютерной математики. В частности, Maple незаменим как для проверки окончательных и промежуточных результатов, получаемых аналитически, так и для поиска методов решения.

Пусть M — дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ — стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ — подалгебра, соответствующая подгруппе G. Обозначим через C_1 — множество $(p-1)$-форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, C_2 — множество p-форм, C_3 — множество $(p+1)$-форм и т. д, пусть C — множество $\{C_1, C_2, C_3, ...\}$. Пусть $H^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ — алгебра Ли когомологий степени p, H_1 — множество p-форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, образующих базис когомологий C_2, H_2 — множество $(p+1)$-форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, образующих базис когомологий C_3, и т. д., т. е. $H = \{H_1, H_2, H_3, ...\}$ — множество всех замкнутых форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, задающих базис когомологий.

Чтобы определить алгебру Ли $\bar{\mathfrak{g}}$, задаем структурные константы и используем команду DGsetup и находим (глобальную) группу Ли $\bar{G}$. Команда LieGroup пакета GroupActions использует 2-е и 3-ю теоремы Ли и непосредственно строит глобальную группу Ли, алгебра Ли которой задана. Явную формулу для левого умножения элементов группы в координатах получаем с помощью команды LeftMultiplication. Находим лево- и правоинвариантные векторные поля на $\bar{G}$ командой InvariantVectorsAndForms. Для построения многообразия нужно вычислить в координатах формулу проекции π группы $\bar{G}$ на $M=\bar{G}/G$. Для нахождения действия группы Ли $\bar{G}$ на многообразии M нужно найти сечение проекции π, т. е. отображение $\sigma: M \to \bar{G}$, такое, что $\pi \circ \sigma$ тождественно на M. Тогда действие $\bar{G}$ на M получается как композиция проекции π, левого умножения dotLeft группы $\bar{G}$ на $\bar{G}$ и сечения σ. Локальное действие $\bar{G}$ на M

Библиотека БГУИР

вычисляется с использованием команды InfinitesimalTransformation. Единица группы $\overline{G}$ проектируется в точку на многообразии *M*, что позволяет найти стабилизатор, используя команду IsotropySubalgebra.

Рассмотрим, например, пару 1.1.1 (см. [1]). Алгебра $\overline{\mathfrak{g}}$ четырехмерна. Ее таблица умножения при λ=0 имеет вид $[e_1, e_2] = -e_1$ (остальные структурные константы нулевые), при этом базис подалгебры — $[e_1]$. Вычислим когомологии трехмерного однородного многообразия, используя пакеты LieAlgebras, Tensor, LieAlgebraCohomology

$$C=\{\{\},\{\theta_3,\ \theta_4\},\{-\theta_3 \wedge \theta_4\},\{\},\{\}\},\ H=\{\{\theta_4,\ \theta_3\},\{-\theta_3 \wedge \theta_4\},\{\}\}.$$

Умножение элемента группы $\overline{G}$ с координатами (a_1, a_2, a_3, a_4) на элемент (x_1, x_2, x_3, x_4) выглядит следующим образом (LeftMultiplication):

$$(x_1 = a_1 + x_1 e^{(-a_3)}, x_2 = a_2 + x_2 e^{a_3}, x_3 = x_3 + a_3, x_4 = x_4 + a_4).$$

Правоинвариантные векторные поля для группы Ли (LieAlgebraData):

$$(D_{x_1}, D_{x_2}, -x_1 D_{x_1} + x_2 D_{x_2} + D_{x_3}, D_{x_4}).$$

Обозначим координаты (x, y, z) на M, тогда действие $\overline{G}$ на M:

$$(x = a_1 + x e^{(-a_3)}, y = a_2 + y e^{a_3}, z = z + a_4).$$

Локальное действие (InfinitesimalTransformation) группы на *M*:

[D_x; D_y; -xD_x+y D_y; D_z].

Подалгебра, являющаяся алгеброй Ли стабилизатора (IsotropySubalgebra), имеет вид [-xD_x+yD_y]. Тензор кривизны (CurvatureTensor), тензор кручения (TorsionTensor) нулевые. Если $\{x(t); y(t); z(t)\}$ — кривая на M, то уравнения геодезических — это система ОДУ второго порядка. Найдя вектор (GeodesicEquations), компоненты которого — уравнения на геодезические, и решив эту систему ОДУ (dsolve), получим геодезические.

Аналогично, при λ=0 умножение элемента группы с координатами (a_1, a_2, a_3, a_4) на элемент группы (x_1, x_2, x_3, x_4):

$$(x_1=a_1+x_1e^{-a_2},\ x_2=x_2+a_2,\ x_3=x_3+a_3,\ x_4=x_4+a_4).$$

Алгебры Ли право и левоинвариантных векторных полей:

$$[D_{x1},\ -x_1D_{x1}+D_{x2},\ D_{x3},\ D_{x4}],\ [e^{-x2}D_{x1},\ D_{x2},\ D_{x3},\ D_{x4}].$$

Применяя LieDerivative, pdsolve, Transformation, ComposeTransformations, находим действие $\overline{G}$ на *M* как композицию проекции π, левого умножения dotLeft группы $\overline{G}$ на $\overline{G}$ и сечения σ:

$$(x=a_1+xe^{-a_2},\ y=y+a_3,\ z=z+a_4).$$

Библиотека БГУИР

Также пакеты прикладных программ используются для исследования однородных пространств, определения инвариантных свойств петель, для изучения свойств флаговых многообразий и др.

Список литературы:

1. Komrakov, B., Tchourioumov, A., Mozhey, N. Three–dimensional isotropically–faithful homogeneous spaces. v. I–III, Preprints Univ. Oslo, no. 35–37 (1993).

Библиотека БГУИР