МАТЕМАТИКА

УДК 514.765.1

РАЗЛОЖЕНИЕ ДЕ РАМА И КОГОМОЛОГИИ ТРЕХМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

канд. физ.-мат. наук, доц. Н.П. МОЖЕЙ
(Казанский (Приволжский) федеральный университет, Россия)

Рассматриваются трехмерные однородные римановы (псевдоримановы) многообразия. Описывается разложение де Рама этих многообразий, а также их алгебры Ли когомологий. Когомологии позволяют ответить на вопрос, когда замкнутые формы на многообразии являются точными. Локальная классификация однородных пространств эквивалентна описанию эффективных пар алгебр Ли. Описаны все инвариантные симметрические невырожденные билинейные формы на таких однородных пространствах. Локально однородное риманово (псевдориманово) многообразие локально изометрично глобально однородному риманову (псевдориманову) пространству. Также изучена секционная кривизна римановых (псевдоримановых) однородных пространств. Ограничиваемся случаем нетривиальной стационарной подгруппы, поскольку все остальные псевдоримановы однородные пространства в этой размерности – только группы Ли с левоинвариантной метрикой. В работе использован алгебраический подход для описания многообразий, методы теории групп и алгебр Ли и однородных пространств.

Введение. Для понимания сложного математического объекта желательно разложить его на более простые «неразложимые» компоненты и проанализировать это разложение. В дифференциальной геометрии фундаментальным результатом в этом направлении является теорема де Рама о разложении риманова многообразия в декартово произведение многообразий, неразложимых при действии локальных групп голономии. Впоследствии было получено несколько существенных обобщений теоремы де Рама. Разложение и классификация римановых голономий применимы в физике, в особенности в теории струн. Аффинные группы голономии – группы, возникающие как голономии аффинных связностей без кручения; те, которые не являются римановыми (псевдоримановыми), известны и как неметрические группы голономии. Теорема де Рама не относится к аффинным группам голономии, таким образом, полная классификация не получена.

Трехмерные однородные римановы многообразия. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $(M, \bar{G})$ – однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G}, G)$, где $G \subset \bar{G}$, так как многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G} / G$ (см., например, [1]). Изучая однородные пространства, важно рассматривать не саму группу $\bar{G}$, а ее образ в $Diff(M)$, другими словами, достаточно рассматривать только эффективные действия группы $\bar{G}$ на многообразии M.

Начнем с локального описания однородных пространств и связностей на них. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. В дальнейшем будем предполагать, что G – связная подгруппа, это всегда можно сделать, ограничиваясь локальной точкой зрения. *Изотропное действие* группы G на T_xM – есть фактор-действие присоединенного действия G на $\bar{\mathfrak{g}}$: $s.(x+\mathfrak{g}) = (Ads)(x) + \mathfrak{g}$ для всех $s \in G, x \in \bar{\mathfrak{g}}$. При этом алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действует на касательном пространстве $T_xM = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ следующим образом: $x.(y+\mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g}$ для всех $x \in \mathfrak{g}, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. С геометрической точки зрения это означает, что естественное действие стабилизатора $\bar{G}_x$ произвольной точки $x \in M$ на T_xM имеет нулевое ядро. *Псевдориманово однородное пространство* задается тройкой $(\bar{G}, M, \mathbf{g})$, где $\bar{G}$ – связная группа Ли, M является связным гладким многообразием с транзитивным действием $\bar{G}$, а $\mathbf{g}$ – инвариантная псевдориманова метрика на M. Инвариантные псевдоримановы метрики $\mathbf{g}$ на M находятся во взаимно однозначном соответствии с инвариантными симметрическими невырожденными билинейными формами B на G-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ ([2]). Билинейная форма B также является инвариантной билинейной формой на $\mathfrak{g}$-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$:

$$B(x.v_1, v_2) + B(v_1, x.v_2) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathfrak{g},\, v_1, v_2 \in \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}. \tag{1}$$

Каждое псевдориманово однородное пространство $(\bar{G}, M, \mathrm{g})$, $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} \le 4$ описывается тройкой $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$, где $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – эффективная пара алгебр Ли, а B – инвариантная симметричная невырожденная билинейная форма на $\mathfrak{g}$ модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Действительно, из [3] следует, что существует единственное (с точностью до эквивалентности) эффективное однородное пространство $(\bar{G}, M)$, такое, что M односвязно и стационарная подгруппа G также связна. Покажем, что это однородное пространство допускает единственную инвариантную псевдориманову метрику $\mathbf{g}$, соответствующую билинейной форме B. Пусть $m = eG \in M$, где e – единичный элемент в $\bar{G}$, для существования $\mathbf{g}$ достаточно, чтобы B было инвариантно относительно изотропного действия G на $T_mM \cong \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Но это условие выполняется, так как G связна и B – инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{g}$-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Обозначим $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Таким образом, существует единственное (с точностью до эквивалентности) псевдориманово однородное пространство $(\bar{G}, M, \mathbf{g})$, соответствующее $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$, такое, что M односвязно и G связна. Будем называть тройку $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ *локально псевдоримановым однородным пространством*. Поскольку каждая инвариантная псевдориманова метрика определяет инвариантную аффинную связность, $\mathfrak{g}$-модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ точен. Для нахождения всех изотропно-точных пар нужно классифицировать (с точностью до изоморфизма) все точные трехмерные $\mathfrak{g}$-модули U (это эквивалентно классификации всех подалгебр в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ с точностью до сопряженности), а далее классифицировать (с точностью до эквивалентности) все пары ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$), такие, что $\mathfrak{g}$-модули $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ и U эквивалентны. Все подобные пары $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ найдены в [4], дальнейшая нумерация пар соответствует приведенной в этом источнике. Ограничимся случаем с ненулевым стабилизатором, так как все остальные псевдоримановы однородные пространства – только трехмерные группы Ли с инвариантной метрикой. Билинейная форма B является инвариантной билинейной формой на $\mathfrak{g}$-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Проверим выполнение условия (1) для всех пар $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ и выберем из них допускающие риманову метрику. Далее опишем все такие формы с точностью до индуцированного действия $Aut(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Получим следующий результат:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ – локально однородное пространство, допускающее риманову метрику, т.ч. $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ и $\mathfrak{g} \ne \{0\}$. Оно эквивалентно одной и только одной из следующих троек:

Номер тройки	Таблица умножения	B	
1.3.1	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ \hline \end{array}$	$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$
1.3.2	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 & -u_2 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline \varepsilon & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ \hline \end{array}$	$\varepsilon = \pm 1$, $a \ne 0$
1.3.3	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & e_1+u_3 & 0 \\ u_2 & -u_1 & -e_1-u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & b \\ \hline \end{array}$	$ab \ne 0$
1.3.4	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & -e_1+u_3 & 0 \\ u_2 & -u_1 & e_1-u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & b \\ \hline \end{array}$	$ab \ne 0$

1.3.5	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & e_1 & 0 \\ u_2 & -u_1 & -e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0$
1.3.6	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & -e_1 & 0 \\ u_2 & -u_1 & e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0$
1.3.7	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & u_3 & 0 \\ u_2 & -u_1 & -u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline \varepsilon & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ \hline \end{array}$	$\varepsilon = \pm 1$, $a \neq 0$
3.5.1	$\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$	$\pm$
3.5.2	$\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & e_2 & e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & -e_2 & 0 & e_3 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & -e_1 & -e_3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0$
3.5.3	$\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & -e_2 & -e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & e_2 & 0 & -e_3 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & e_1 & e_3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0$

Здесь e_1, e_2, e_3 – базис $\mathfrak{g}$, u_1, u_2, u_3 – базис, дополнительный к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$.

Замечание. Кроме римановой метрики, псевдориманову метрику сигнатуры (2, 1) допускают следующие однородные пространства из приведенных в теореме 2: 1.3.1 при $\varepsilon_1\varepsilon_2 < 0$, 1.3.2, 1.3.5, 1.3.6, 1.3.7 при $\varepsilon a < 0$; 1.3.3, 1.3.4 при $ab < 0$.

Из пар, приведенных в теореме 2, симметрическое однородное пространство задают 1.3.1, 1.3.5, 1.3.6, 3.5.1–3.5.3.

Из трехмерных римановых однородных пространств следующие 7 соответствуют классификации Терстона:

- если стабилизаторы точек пространства трехмерны: $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$, тройка 3.5.1 задает евклидово пространство E^3, 3.5.2 – сферу S^3, 3.5.3 – гиперболическое пространство H^3;

- если стабилизаторы одномерны: $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$, то M есть $\bar{G}$-инвариантное расслоение над одной из двумерных геометрий. На M имеется $\bar{G}$-инвариантная метрика, определяющая связность. При нулевой кривизне связности тройка 1.3.5 задает $S^2 \times E^1$, 1.3.6 задает $H^2 \times E^1$, а при ненулевой кривизне тройка 1.3.3 задает $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$, 1.3.7 задает нильгеометрию.

- 1.3.1 подалгебра в 3.5.1 в базисе (e_2, u_1, u_2, u_3), 1.3.2 подалгебра в 3.5.2 в базисе $(-e_1, e_2 + u_1, e_3 - u_3, u_2)$, 1.3.4 подалгебра в 3.5.3 в базисе $\left(-e_1, \frac{e_2 - u_3}{2}, \frac{e_3 - u_1}{2}, \frac{-e_1 + u_2}{2}\right)$.

Трехмерные однородные псевдоримановы многообразия. Проверим выполнение условия (1) для всех пар $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ и выберем из них допускающие псевдориманову метрику. Далее опишем все такие формы с точностью до индуцированного действия $Aut(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Получим следующий результат:

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ – локально однородное пространство, допускающее только псевдориманову метрику, т.ч. $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ и $\mathfrak{g} \neq \{0\}$, e_1, e_2, e_3 – базис $\mathfrak{g}$, u_1, u_2, u_3 – базис, дополнительный к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$. Оно эквивалентно одной и только одной из следующих троек:

3.4.1	$\begin{array}{ccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$	$\pm$
3.4.2	$\begin{array}{ccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & e_2 & -e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & -e_2 & 0 & -e_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & e_1 & e_3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{array}$	$a \neq 0$
3.4.3	$\begin{array}{ccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & -e_2 & e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & e_2 & 0 & e_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & -e_1 & -e_3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{array}$	$a \neq 0$
2.21.1	$\begin{array}{cccccc} & e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$	$\pm$
2.21.4	$\begin{array}{cccccc} & e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_1 & 0 & u_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & -u_2 & -u_3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{array}$	$a \neq 0$
1.8.1	$\begin{array}{ccccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$	$\pm$
1.8.2	$\begin{array}{ccccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_2 & -u_1 & -u_1 & 0 & u_3 \\ u_3 & -u_2 & -u_2 & -u_3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \\ a & 0 & \varepsilon \end{array}$	$a \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1, 0$
1.8.3	$\begin{array}{ccccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & u_2+\lambda e_1 \\ u_3 & -u_2 & -u_1 & -u_2-\lambda e_1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$	$\pm$

1.8.4	$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & e_1 \\ u_3 & -u_2 & 0 & -e_1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$\pm$
1.8.5	$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & -e_1 \\ u_3 & -u_2 & 0 & e_1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$\pm$
1.1.1	$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 \\ \hline \end{array}$	
1.1.2	$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & u_2 & 0 & 0 & u_2 \\ u_3 & 0 & 0 & -u_2 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0$
1.1.5	$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & e_1 & 0 \\ u_2 & u_2 & -e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & a & 0 \\ \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0$
1.1.6	$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & u_3 & 0 \\ u_2 & u_2 & -u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0$
1.1.7	$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & e_1+u_3 & 0 \\ u_2 & u_2 & -e_1-u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$	$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & a & 0 \\ \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b \\ \hline \end{array}$	$ab \neq 0$

Из пар, приведенных в теореме 3, симметрическое однородное пространство задают 1.1.1, 1.1.5, 1.8.1, 1.8.4, 1.8.5, 2.21.1, 3.4.1–3.4.3.

Разложение де Рама трехмерных однородных римановых многообразий. Если M – односвязное полное риманово многообразие, то M изометрично прямому произведению $M_0 \times M_1 \times \ldots \times M_r$, где M_0 – евклидово пространство (возможно, нулевой размерности), а $M_1, \ldots, M_r$ – односвязные полные неприводимые римановы многообразия, такое разложение однозначно с точностью до порядка следования сомножителей. Наибольшая связная группа $I^0(M)$ изометрий для M естественным образом изоморфна прямому произведению наибольших связных групп $I^0(M_i)$ изометрий сомножителей M_i [5]. Отсюда следует, что M есть однородное риманово многообразие тогда и только тогда, когда однородными римановыми многообразиями являются и сомножители $M_0, \ldots, M_r$.

Пусть далее M – односвязное однородное пространство с инвариантной римановой метрикой. Тогда существуют (К. Номидзу [6]) связные замкнутые подгруппы $\overline{G}_0, \ldots, \overline{G}_r$ в $\overline{G}$, каждая из которых содержит G, такие, что каждый множитель наделен инвариантной римановой метрикой ($\overline{G}_i$ может и не быть эффективной на $\overline{G}_i / G$). Хотя это утверждение верно для односвязных однородных римановых многообразий, желательно иметь, пусть при более сильных предположениях, разложение следующего типа: $\overline{G} = \overline{G}_0 \times \overline{G}_1 \times \ldots \times \overline{G}_r$, $G = G_0 \times G_1 \times \ldots \times G_r$.

Действительно, пусть M – односвязное естественно редуктивное однородное пространство с $ad(G)$-инвариантным разложением $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ и инвариантной римановой метрикой g.

Пусть $T_0(M) = T_0^0 \times \ldots \times T_0^r$ – разложение де Рама касательного пространства $T_0(M)$ и $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}_1 + \ldots + \mathfrak{m}_r$, соответствующее разложению для $\mathfrak{m}$ при естественном отождествлении $T_0(M) = \mathfrak{m}$. Положим

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}], \quad \mathfrak{f}_i = \mathfrak{m}_i + [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i], \quad \mathfrak{g}_i = \mathfrak{f}_i \cap \mathfrak{g} \text{ для } i = 0,1,\ldots,r,$$

тогда (Б. Костант [7]) $\mathfrak{f}_i$ – идеалы в $\overline{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{f}_0 + \mathfrak{f}_1 + \ldots + \mathfrak{f}_r$ – прямая сумма алгебр Ли, и имеют место следующие соотношения:

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}_i] \in \mathfrak{m}_i, \quad [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i] \in \mathfrak{m}_i + \mathfrak{g}, \quad [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] = 0 \text{ для } i \neq j,\ i, j = 0,1,\ldots,r.$$

Если $\overline{G}$ – связная группа, а $\overline{G}/G$ односвязно, то простые гомотопические рассуждения показывают, что G связна. Беря универсальную накрывающую группу для $\overline{G}$ вместо $\overline{G}$, можем считать, что $\overline{G}$ односвязна; $\overline{G}$ остается почти эффективной на $\overline{G}/G$, хотя, быть может, уже не эффективной. Так как $\overline{G}$ односвязна, то нормальные подгруппы $\overline{G}_0, \overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_r$ для $\overline{G}$, порожденные идеалами $\mathfrak{f}_0, \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_r$ соответственно, замкнуты и односвязны. Если мы положим $G_i = \overline{G}_i \cap G$, то $\overline{G}_i / G_i$ будут естественно редуктивны, и $\overline{G}/G = \overline{G}_0 / G_0 \times \overline{G}_1 / G_1 \times \ldots \times \overline{G}_r / G_r$ совпадает с разложением де Рама для M.

ТЕОРЕМА 3. Разложение де Рама касательного пространства $T_0(M)$ при естественном отождествлении $T_0(M) = \mathfrak{m}$ имеет вид:

Номер тройки	Разложение де Рама	Номер тройки	Разложение де Рама
3.5.1	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.3.3	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$
3.5.2	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.3.4	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$
3.5.3	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.3.5	$\mathfrak{m}_0 = \langle u_3 \rangle,\ \mathfrak{m}_1 = \langle u_1, u_2 \rangle$
1.3.1	$\mathfrak{m}_0 = \langle u_3 \rangle,\ \mathfrak{m}_1 = \langle u_1, u_2 \rangle$	1.3.6	$\mathfrak{m}_0 = \langle u_3 \rangle,\ \mathfrak{m}_1 = \langle u_1, u_2 \rangle$
1.3.2	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.3.7	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$

Естественно теперь рассмотреть случай, когда $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{f}(\mathfrak{m})$. Если $ad(G)$ – инвариантное скалярное произведение B на $\mathfrak{m}$, соответствующее метрике g, может быть продолжено до $ad(\overline{G})$-инвариантной невырожденной билинейной симметричной формы B на $\overline{\mathfrak{g}}$, такой, что $B(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}) = 0$, то

$$\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{f}_0 + \mathfrak{f}_1 + \ldots + \mathfrak{f}_r.$$

В более общей форме в тех же предположениях имеем

$$\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}].$$

Определим теперь случай, когда $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{f}(\mathfrak{m})$, и выпишем, при необходимости, идеалы $\mathfrak{f}_0, \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_r$:

3.5.1	$\overline{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
3.5.2	$\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
3.5.3	$\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.3.1	$\overline{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}],\ \mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m},\ \mathfrak{f}_0 = \langle u_3 \rangle,\ \mathfrak{f}_1 = \langle u_1, u_2 \rangle,\ \mathfrak{g}_i = 0$
1.3.2	$\overline{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.3.3	$\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.3.4	$\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.3.5	$\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}],\ \mathfrak{f}_0 = \langle u_3 \rangle,\ \mathfrak{f}_1 = \langle e_1, u_1, u_2 \rangle,\ \mathfrak{g}_0 = 0,\ \mathfrak{g}_1 = e_1$
1.3.6	$\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}],\ \mathfrak{f}_0 = \langle u_3 \rangle,\ \mathfrak{f}_1 = \langle e_1, u_1, u_2 \rangle,\ \mathfrak{g}_0 = 0,\ \mathfrak{g}_1 = e_1$
1.3.7	$\overline{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$

Если M – односвязное естественно редуктивное однородное пространство с инвариантной римановой метрикой g и $\overline{G}$ проста, то M не приводимо (как риманово многообразие). Если связная группа Ли $\overline{G}$

действует транзитивно на евклидовом пространстве как группа евклидовых движений, то $\overline{G}$ не полупростая (Лихнерович [8]). Номидзу была высказана гипотеза о том, что однородное пространство компактной группы Ли $\overline{G}$ неприводимо (в смысле де Рама) относительно произвольной римановой метрики, инвариантной относительно действия группы, тогда и только тогда, когда группа $\overline{G}$ проста. Это утверждение появилось в работе А. Лихнеровича [8] в качестве теоремы. В работе [7] Б. Костант доказал эту гипотезу для естественной метрики и построил контрпример к утверждению Номидзу – Лихнеровича в общем виде.

Группа $\overline{G}$ проста в случаях 3.5.2 и 3.5.3, разрешима в случаях 1.3.1, 1.3.2, 1.3.7.

Разложение де Рама трехмерных однородных псевдоримановых многообразий

ТЕОРЕМА 4. Разложение де Рама касательного пространства $T_0(M)$ при естественном отождествлении $T_0(M) = \mathfrak{m}$ имеет вид:

Номер тройки	Разложение де Рама	Номер тройки	Разложение де Рама
3.4.1	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.8.4	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$
3.4.2	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.8.5	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$
3.4.3	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.1.1	$\mathfrak{m}_0 =< u_1 >,\ \mathfrak{m}_1 =< u_2 >,\ \mathfrak{m}_2 =< u_3 >$
2.21.1	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.1.2	$\mathfrak{m}_0 =< u_1 >,\ \mathfrak{m}_1 =< u_2, u_3 >$
2.21.4	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.1.5	$\mathfrak{m}_0 =< u_3 >,\ \mathfrak{m}_1 =< u_1, u_2 >$
1.8.1	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.1.6	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$
1.8.2	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.1.7	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$
1.8.3	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$		

Определим теперь случай, когда $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{f}(\mathfrak{m})$, и выпишем, при необходимости, идеалы $\mathfrak{f}_0, \mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_r$:

3.4.1	$\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
3.4.2	$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
3.4.3	$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
2.21.1	$\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
2.21.4	$\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.8.1	$\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.8.2	$\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.8.3	при $\alpha = 0$ $\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$, при $\alpha \neq 0$ $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.8.4	$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.8.5	$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.1.1	$\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$, $\mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}, \mathfrak{f}_0 =< u_1 >, \mathfrak{f}_1 =< u_2 >, \mathfrak{f}_2 =< u_3 >, \mathfrak{g}_i = 0$
1.1.2	$\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}],\ \mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}, \mathfrak{f}_0 =< u_1 >, \mathfrak{f}_1 =< u_2, u_3 >, \mathfrak{g}_i = 0$
1.1.5	$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}],\ \mathfrak{f}_0 =< u_3 >, \mathfrak{f}_1 =< e_1, u_1, u_2 >, \mathfrak{g}_0 = 0, \mathfrak{g}_1 = e_1$
1.1.6	$\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.1.7	$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$

Группа $\overline{G}$ проста в случаях 3.4.2 и 3.4.3, разрешима в случаях 2.21.1, 1.8.1, 1.8.3, 1.8.4, 1.8.5, 1.1.1, 1.1.2, 1.1.6.

Когомологии римановых (псевдоримановых) многообразий. За определение алгебры когомологий многообразия принимается ее конструкция согласно теореме де Рама. Алгебра когомологий любого гладкого многообразия M совпадает с алгеброй когомологий внешних форм на M. В работе [9] рассматриваются приложения аппарата когомологий алгебр Ли к изучению когомологии главных расслоений и однородных пространств.

Обозначим через $d(\alpha)$ внешнюю производную дифференциальной формы α, через C_1 – множество $(p-1)$-форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, через C_2 – множество p-форм, а через C_3 – множество $(p+1)$-форм и т.д.

Пусть C – множество $\{C_1, C_2, C_3, ...\}$, пустое множество будем записывать как $\{\}$. Пусть $A^p(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – пространство внешних p-форм, p-форма α из $A^p(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ замкнута, если $d(\alpha) = 0$ и точная, если $\alpha = d(\beta)$ для некоторой $(p-1)$-формы β из $A^{(p-1)}(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Алгебра Ли когомологий $H^p(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ степени p – векторное пространство замкнутых p-форм из $A^p(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ по модулю точных p-форм из $A^p(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Обозначим H_1 – множество p-форм на $\overline{\mathfrak{g}}$, образующих базис когомологий C_2, H_2 – множество $(p+1)$-форм на $\overline{\mathfrak{g}}$, образующих базис когомологий C_3, и т.д., то есть $H = \{H_1, H_2, H_3, ...\}$ – множество всех замкнутых форм на $\overline{\mathfrak{g}}$, задающих базис когомологий на $\overline{\mathfrak{g}}$.

ТЕОРЕМА 5. Когомологии трехмерных однородных римановых (псевдоримановых) многообразий имеют следующий вид:

римановы:

3.5.1, 3.5.2, 3.5.3

$$C = \{\{\},\{\},\{\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\},\{\}\},\ H = \{\{\},\{\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

1.3.1, 1.3.5, 1.3.6

$$C = \{\{\},\{\theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\},\{\}\},\ H = \{\{\theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

1.3.2

$$C = \{\{\},\{\theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\},\{\}\},\ H = \{\{\theta_3\},\{\},\{\}\}.$$

1.3.3, 1.3.4, 1.3.7

$$C = \{\{\},\{\theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\},\{\}\},\ H = \{\{\},\{\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

псевдоримановы:

3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, 2.21.1, 2.21.4

$$C = \{\{\},\{\},\{\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\},\{\}\},\ H = \{\{\},\{\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

1.1.1, 1.1.5

$$C = \{\{\},\{\theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\},\{\}\},\ H = \{\{\theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

1.1.2

$$C = \{\{\},\{\theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\},\{\}\},\ H = \{\{\theta_3\},\{\},\{\}\}.$$

1.1.6, 1.1.7

$$C = \{\{\},\{\theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\},\{\}\},\ H = \{\{\},\{\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

1.8.1, 1.8.3, 1.8.4, 1.8.5

$$C = \{\{\},\{\theta_3\},\{-\theta_2 \wedge \theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\},\{\}\},\ H = \{\{\theta_3\},\{-\theta_2 \wedge \theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

1.8.2

$$C = \{\{\},\{\theta_3\},\{-\theta_2 \wedge \theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\},\{\}\},\ H = \{\{\},\{\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

Секционная кривизна римановых (псевдоримановых) однородных пространств. Наиболее важной и интересной задачей римановой геометрии в целом является задача о нахождении связей между геометрическими и топологическими характеристиками римановых многообразий и их локальной характеристикой – кривизной. Секционная кривизна римановых однородных пространств вычисляется по формуле

$$K(x, E) = \frac{B(R(Y, Z)Y, Z)}{B(Y, Y)B(Z, Z) - B(Y, Z)^2},$$

где $x \in M$, E – невырожденное плоское сечение в M_x, $\{Y, Z\}$ – базис в E.

Для псевдоримановых однородных пространств понятие секционной кривизны может быть введено уже не для всех двумерных направлений, так как определитель Грамма, стоящий в знаменателе определения секционной кривизны, обращается в нуль для изотропных двумерных направлений (то есть таких, на которых индуцируется вырожденная метрика, если в этом случае обращается в нуль и числитель, то понятие секционной кривизны можно сохранить с помощью продолжения по непрерывности). Выпишем секционные кривизны римановых (псевдоримановых) однородных пространств.

ТЕОРЕМА 6. Секционные кривизны римановых однородных пространств:

Номер	$\frac{B(R(u_1,u_2)u_1,u_2)}{B(u_1,u_1)B(u_2,u_2)-B(u_1,u_2)^2}$	$\frac{B(R(u_1,u_3)u_1,u_3)}{B(u_1,u_1)B(u_3,u_3)-B(u_1,u_3)^2}$	$\frac{B(R(u_2,u_3)u_2,u_3)}{B(u_2,u_2)B(u_3,u_3)-B(u_2,u_3)^2}$
3.5.1	0	0	0
3.5.2	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$
3.5.3	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$
1.3.1	0	0	0
1.3.2	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$
1.3.3	$\frac{3/4b+a}{a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$
1.3.4	$\frac{3/4b-a}{a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$
1.3.5	$\frac{1}{a}$	0	0
1.3.6	$-\frac{1}{a}$	0	0
1.3.7	$\frac{3}{4}a$	$-\frac{a}{4}$	$-\frac{a}{4}$

Секционные кривизны псевдоримановых однородных пространств:

Номер	$\frac{B(R(u_1,u_2)u_1,u_2)}{B(u_1,u_1)B(u_2,u_2)-B(u_1,u_2)^2}$	$\frac{B(R(u_1,u_3)u_1,u_3)}{B(u_1,u_1)B(u_3,u_3)-B(u_1,u_3)^2}$	$\frac{B(R(u_2,u_3)u_2,u_3)}{B(u_2,u_2)B(u_3,u_3)-B(u_2,u_3)^2}$
3.4.1	0	0	0
3.4.2	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$
3.4.3	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$
2.21.1	0	0	0
2.21.4	$-\frac{1}{4a}$	$-\frac{1}{4a}$	$-\frac{1}{4a}$
1.8.1	0	0	0
1.8.2	$-\frac{1}{4a}$	$-\frac{1}{4a}$	$-\frac{5}{4a}$
1.8.3	0	0	$a/0=\infty$
1.8.4	0	0	$1/0=\infty$
1.8.5	0	0	$-1/0=\infty$
1.1.1	0	0	0
1.1.2	$\frac{1}{4a}$	$\frac{1}{4a}$	$\frac{1}{4a}$
1.1.5	$\frac{1}{a}$	0	0
1.1.6	$-\frac{3}{4}a$	$\frac{1}{4}a$	$\frac{1}{4}a$
1.1.7	$\frac{3/4b-a}{-a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$

Заключение. В работе описано разложение де Рама трехмерных однородных римановых (псевдоримановых) многообразий, а также их алгебры Ли когомологий. Найдена секционная кривизна римановых (псевдоримановых) однородных пространств.

Полученные результаты могут быть использованы для решения различных геометрических задач и открывают широкие возможности для их приложения при исследовании псевдоримановых многообразий в физике и механике. Предложенная методика также может быть использована для изучения однородных римановых многообразий других размерностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Онищик, А.Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А.Л. Онищик. – М.: Физ.-мат. лит., 1995. – 344 с.
2. Kobayashi, S. Foundations of Differential Geometry / S. Kobayashi, K. Nomizu. – New-York–London, 1963. – V. I; 1969. – Vol. II.
3. Mostow, G.D. The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces / G.D. Mostow // Ann. Math., Vol. 52, no. 3, pp. 606–636 (1950).
4. Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces / B. Komrakov [et al.], Vol. I–III, Preprints Univ. Oslo, no. 35–37, (1993).
5. Kobayashi, S. Foundations of differential geometry John Wiley and Sons / S. Kobayashi, K. Nomizu. – New York, 1963. – Vol. 1; 1969. – Vol. 2.
6. Nomizu, K. Studies on riemannian homogeneous spaces Nagoya Math / K. Nomizu // J., 1955, 9, pp. 43–56.
7. Kostant, B. On differential geometry and homogeneous spaces / B. Kostant // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 42 (1956), pp. 258–261, 354–357.
8. Lichnerowicz, A. Espaces homogenes riemannien et reductibilite / A. Lichnerowicz // C.R. 242(1954), pp. 1410–1413.
9. Greub, W. Connections, curvature and cohomology / W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone // Cohomology of principal bundles and homogeneous spaces. – N. Y.– L., 1975. – Vol. 3.

Поступила 30.05.2014

DE RHAM DECOMPOSITION AND COHOMOLOGY THREE-DIMENSIONAL HOMOGENEOUS SPACE PSEUDO-RIEMANNIAN MANIFOLDS

N. MOZHEY

In this paper we study three-dimensional homogeneous Riemannian (pseudo-Riemannian) manifolds. We describe de Rham decomposition and cohomology this manifolds. The cohomology allows us to answer the question of when closed forms on a manifold are exact. The local classification of homogeneous spaces is equivalent to the description of effective pairs of Lie algebras. We describe all invariant symmetric nondegenerate bilinear forms on those homogeneous spaces. A complete locally homogeneous Riemannian (pseudo-Riemannian) manifold is locally isometric to a globally homogeneous Riemannian (pseudo-Riemannian) space. Also we describe curvature Riemannian (pseudo-Riemannian) homogeneous spaces. We restrict ourselves to the case of a nontrivial stationary subgroup, all other pseudo-Riemannian homogeneous spaces in this dimension are just Lie groups with a left-invariant metric. We use the algebraic approach for description of manifolds, methods of the theory of Lie groups and Lie algebras and homogeneous spaces.