

АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛИНЕЙНОГО ЦИФРОВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА МЕТОДОМ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

В.Т. ПЕРШИН

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь
pershin_v@mail.ru

В докладе осуществлено построение бифуркационного портрета линейного цифрового осциллятора и проведено исследование влияния параметров умножителей, входящих в состав схемы осциллятора, на его основные динамические параметры.

Ключевые слова: линейный цифровой осциллятор, фазовая плоскость, свободные колебания.

Последнее время характеризуется широким внедрением современных компьютерных технологий в системы обработки сигналов и передачи информации по каналам связи. Устройства цифровой обработки сигналов строятся на базе цифровых цепей, широкий класс которых представляют линейные цифровые осцилляторы. Только в последнее десятилетие появились работы [1,2], в которых для анализа процессов в цифровых осцилляторах применяется метод фазовой плоскости, использовавшийся ранее только для анализа непрерывных систем.

Цель данной работы – построить бифуркационный портрет линейного цифрового осциллятора и исследовать влияние параметров умножителей, входящих в состав схемы осциллятора, на его основные динамические параметры. Ввиду сложности и малой изученности поставленной задачи мы считаем сумматоры линейными, умножители безынерционными и не учитываем эффекты квантования. Свободные колебания в линейном цифровом осцилляторе описываются разностным уравнением второго порядка

$$y(n+2) - b_1 y(n+1) - b_2 y(n) = 0, \quad (1)$$

где b_1, b_2 – постоянные параметры, характеризующие работу умножителей, входящих в состав осциллятора. Решения $y_n^{(1)}$ и $y_n^{(2)}$ уравнения (1) независимы, если равенство

$$C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

возможно только при $C_1 = C_2 = 0$. Это эквивалентно требованию, чтобы определитель системы

$$\begin{cases} C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)} = 0, \\ C_1 y_{n+m}^{(1)} + C_2 y_{n+m}^{(2)} = 0, \quad m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

был отличен от нуля

$$\Delta_{n,n+m} = \begin{vmatrix} y_n^{(1)} & y_n^{(2)} \\ y_{n+m}^{(1)} & y_{n+m}^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0$$

для всех n и m .

Решение уравнения (1) определяется величиной дискриминанта $d = \sqrt{b_1^2 + 4b_2}$ его характеристического уравнения. Для анализа выделим три случая: $d > 0$, $d < 0$ и $d = 0$. При $d > 0$ характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня q_1 и q_2 , которым соответствуют частные решения $y_n^{(1)} = q_1^n$ и $y_n^{(2)} = q_2^n$. Так как

$$\Delta_{n,n+1} = \begin{vmatrix} q_1^n & q_2^n \\ q_1^{n+1} & q_2^{n+1} \end{vmatrix} = (q_2 - q_1)q_1^n q_2^n \neq 0$$

при $q_2 - q_1 \neq 0$, то $y_n^{(1)}$ и $y_n^{(2)}$ линейно независимы. Общее решение уравнения (1) в этом случае имеет вид:

$$y_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n, \quad (2)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, величина которых определяется начальными условиями. При $d = 0$ корни характеристического уравнения совпадают, т.е. $q_1 = q_2 = q_0$, и в качестве независимых частных решений можно взять $y_n^{(1)} = q_0^n$ и $y_n^{(2)} = n q_0^n$. Путем непосредственной подстановки этих решений в уравнение (1) можно убедиться, что они удовлетворяют этому уравнению. Вычисляя определитель

$$\Delta_{n,n+1} = \begin{vmatrix} q_0^n & n q_0^n \\ q_0^{n+1} & (n+1) q_0^{n+1} \end{vmatrix} = q_0^{2n+1} \neq 0,$$

убеждаемся в линейной независимости q_0^n и $n q_0^n$. Поэтому общее решение уравнения (1) в этом случае имеет вид:

$$y_n = (C_1 + n C_2) q_0^n. \quad (3)$$

При $d < 0$ характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня $q_1 = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ и $q_2 = \rho(\cos \varphi - i \sin \varphi)$ при $\rho = \sqrt{b_2}$ и $\varphi = \arctg(\sqrt{d} / b_1)$. Частные решения уравнения (1) можно представить функциями $q_1^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, $q_2^n = \rho^n(\cos n\varphi - i \sin n\varphi)$ или записать в виде $y_n^{(1)} = \cos n\varphi$, $y_n^{(2)} = \sin n\varphi$. Так как функции $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$ линейно независимы (в этом легко убедиться, показав, что $\Delta_{n,n+m} \neq 0$), то общее решение уравнения (1) в этом случае имеет вид:

$$y_n = \rho^n (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi). \quad (4)$$

Опираясь на полученные соотношения (2)-(4) и учитывая состояния равновесия цифрового осциллятора, построим бифуркационный портрет исследуемой системы, показанный на рис. 1.

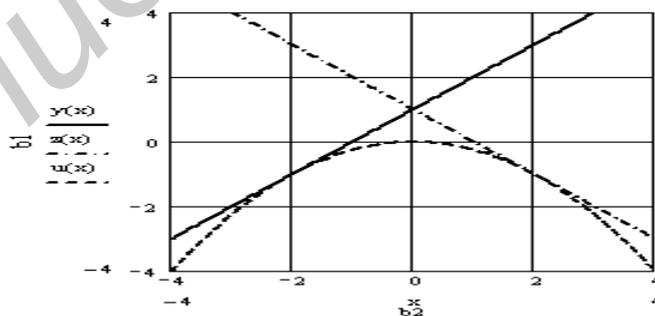


Рис. 1. Бифуркационный портрет линейного цифрового осциллятора с постоянными величинами множителей

Список литературы

1. Брюханов Ю.А. Свободные колебания в линейном цифровом осцилляторе. // Радиотехника, 1996. – №5. – С. 46–50.
2. Першин В.Т. Фазовые портреты линейного цифрового осциллятора. // Известия Белорусской Инженерной академии. – 2000. – №1(9)/1. – С. 27–29.