Исследование трехмерных многообразий с использованием пакета Maple

Можей Н.П. e-mail: mozheynatalya@mail.ru,
Институт непрерывного образования Белорусского государственного университета

Системы компьютерной математики широко применяются в задачах классификации. Так M. Hlavova в [1] классифицированы двупараметрические движения плоскости Лобачевского. T. Arias-Marco и O. Kowalski внесли вклад в проблему классификации 4-мерных однородных D'Atri пространств [2]. Известны результаты, полученные Е.Д. Родионовым и В.В. Славским при классификации локально конформно-однородных многообразий [3]. Задачи классификации левоинвариантных лоренцевых метрик на трехмерных группах Ли с применением системы аналитических расчетов решались также Л.Н. Чибриковой. Пакеты прикладных программ использовались для исследования однородных пространств, определения инвариантных свойств петель [4], для изучения свойств флаговых многообразий [5] и др.

В работе описывается использование математических пакетов для исследования трехмерных многообразий, а также алгебр Ли векторных полей, когомологий, действий групп Ли, аффинных связностей, тензоров кривизны, кручения и геодезических на этих пространствах. Исследуемая тематика имеет многочисленные приложения в механике, оптике, теории поля для моделирования динамических систем на римановых многообразиях (см., например, [6]). Исследование, например, геодезических сопряжено с необходимостью исследования и решения систем дифференциальных уравнений, что ограничивает возможности применения аналитических методов и вынуждает прибегать к компьютерным методам исследования. Maple незаменим как для проверки окончательных и промежуточных результатов, получаемых аналитически, так и для поиска методов решения.

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\overline{G}$, (M, $\overline{G}$) – однородное пространство, $G = \overline{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств (M, $\overline{G}$) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли ($\overline{G}$,

G), где $G \subset \overline{G}$, т.к. многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\overline{G}/G$ (см., например, [7]). Пусть $\overline{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\overline{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется эффективной, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\overline{\mathfrak{g}}$. В дальнейшем будем предполагать, что G – связная подгруппа, что всегда можно сделать, ограничиваясь локальной точкой зрения. Изотропное действие группы G на T_xM – это фактордействие присоединенного действия G на $\overline{\mathfrak{g}}$:

$$s.(x+\mathfrak{g}) = (Ad s)(x) + \mathfrak{g} \text{ для всех } s \in G, x \in \overline{\mathfrak{g}}.$$

При этом $\mathfrak{g}$ действует на касательном пространстве $T_xM = \overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ как $x.(y+\mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g}$ для всех $x \in \mathfrak{g}, y \in \overline{\mathfrak{g}}$. Пара $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется изотропно–точной, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. С геометрической точки зрения это означает, что естественное действие стабилизатора $\overline{G}_x$ произвольной точки $x \in M$ на T_xM имеет нулевое ядро.

Если однородное пространство допускает аффинную связность, то $\mathfrak{g}$–модуль $\overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ точен. Для нахождения всех изотропно–точных пар коразмерности три нужно классифицировать (с точностью до изоморфизма) все точные трехмерные $\mathfrak{g}$–модули U (это эквивалентно классификации подалгебр в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ с точностью до сопряженности), а далее найти (с точностью до эквивалентности) все пары $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ такие, что $\mathfrak{g}$–модули $\overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ и U эквивалентны. Получена локальная классификация трехмерных однородных пространств как пар алгебр Ли. Далее ограничимся случаем с ненулевым стабилизатором, т.к. все остальные однородные пространства – просто трехмерные группы Ли. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\overline{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Аффинной связностью на паре $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \overline{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$–инвариантным. Хорошо известно, что инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \overline{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$). Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензор кручения $T \in InvT_2^{\;1}(\mathfrak{m})$ имеет вид $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$; тензор кривизны $R \in InvT_3^{\;1}(\mathfrak{m})$ – $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$ для всех $x, y \in \overline{G}$.

Широкий класс среди однородных пространств образуют однородные пространства с разрешимой группой преобразований. Их исследование существенно затруднено тем, что, в отличие от полупростых алгебр Ли, не разработана структурированная теория классификации разрешимых алгебр, а сама классификация является громоздкой и трудоемкой. Все пары ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$), $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ найдены ранее. Используем пакет DifferentialGeometry, чтобы определить алгебру Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Для этого задаем структурные константы для этой алгебры и используем команду DGsetup, чтобы инициализировать алгебру. После инициализации можно делать все виды вычислений и проверок. Для подалгебры изотропии $\mathfrak{g}$ однородного пространства, которое мы построили, указываем базис подалгебры. Выбирав подалгебру $\mathfrak{g}$, находим (если это возможно) редуктивное дополнение к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$. Для этого используем команду ComplementaryBasis, чтобы построить максимально общее дополнение, применим команду Query, чтобы определить те значения параметров, для которых дополнение редуктивно. Далее займемся построением однородного пространства. Находим (глобальную) группу Ли $\overline{G}$, такую, что ее алгебра Ли совпадает с $\bar{\mathfrak{g}}$. Сначала определяем локальные координаты группы. Команда LieGroup пакета GroupActions использует 2-е и 3-ю теоремы Ли и непосредственно строит глобальную группу Ли, алгебра Ли которой задана. Результатом выполнения этой команды является модуль, предоставляющий информацию о группе Ли. Явную формулу для левого умножения элементов группы в координатах получаем с помощью команды LeftMultiplication. Находим лево- и правоинвариантные векторные поля на $\overline{G}$. Они вычисляются командой InvariantVectorsAndForms. Команда LieAlgebraData вычисляет структурные константы для правоинвариантных векторных полей. Эти структурные константы совпадают со структурными константами алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Фактор $\bar{G}$ по подгруппе G, порожденной векторными полями, является трехмерным многообразием. Строим однородное пространство $\bar{G}/G$. Для этого нужно вычислить в координатах формулу для проекции π группы $\bar{G}$ на $M=\bar{G}/G$. Эта проекция сопоставляет элементу g группы $\bar{G}$ смежный класс $\mathrm{g}G$, то есть $\pi(\mathrm{g})=\mathrm{g}G$. Следовательно, для любого h из G имеем $\pi(\mathrm{gh})=\mathrm{gh}G=\mathrm{g}G=\pi(\mathrm{g})$, поэтому проекция π инвариантна относительно правого действия G на $\bar{G}$. Локально это правое действие дает левоинвариантное векторное поле. Таким образом, если

$$\pi(x_1, x_2, x_3, x_4)=[\mathrm{F}_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \mathrm{F}_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \mathrm{F}_3(x_1, x_2, x_3, x_4)],$$

то составляющие функции F_1, F_2, F_3 – инварианты векторного поля. Это является теоретическим обоснованием для вычисления проекции π. Находим действие группы Ли $\bar{G}$ на многообразии $\mathrm{M}=\bar{G}/G$. Для этого нужно найти сечение проекции π, то есть, отображение $\sigma:\mathrm{M}\to\bar{G}$, такое, что $\pi\circ\sigma$ тождественно на M. Тогда действие $\bar{G}$ на M получается как композиция проекции π, левого умножения dotLeft группы $\bar{G}$ на $\bar{G}$ и сечения σ. Локальное действие $\bar{G}$ на M вычисляется с использованием команды InfinitesimalTransformation. Результат можно проверить, т. к. структурные константы алгебры Ли векторных полей совпадают с алгеброй Ли, с которой мы стартовали. Единица группы $\bar{G}$ проектируется в точку на многообразии M и позволяет найти стабилизатор (подгруппу G), используя команду IsotropySubalgebra.

Применение системы компьютерной математики Maple позволяет облегчить трудоемкие вычисления и справиться с проблемами, которые многие ученые ранее считали неразрешимыми. В частности, в данной работе пришлось исследовать более пятисот трехмерных изотропно-точных пар. Предложенные методы могут иметь применение в общей теории относительности, которая, с математической точки зрения, базируется на геометрии искривленных пространств, в ядерной физике, физике элементарных частиц, а также могут быть использованы при исследовании многообразий другой размерности, при изучении пространств с аффинной связностью и др.

Литература

1. Hlavova, M. Two-parametric motions in the Lobatchevski plane/ M. Hlavova // J. Geom. Graph. – 2002. – V. 6. – №1. – P. 27-35.

2. Arias-Marco, T. Classification of 4-dimensional homogeneous

D'Atry spaces/ T. Arias-Marco, O. Kovalski // ICM 2006 – Posters. Abstracts. Section 5. – Madrid, 2006. – P. 1-2.

3. Rodionov, E. D. Conformal deformations of the Riemarmian metrics and homogeneous Riemannian spaces/ E. D. Rodionov, V.V. Slavskii // Comm. Math. Univ. Carol. – 2002. – V. 43. – №2. – P . 271-282.

4. Kovacs, L. An algorithm for automated generation of invariants for loops with conditions/ L. Kovacs. T. Jebelean// Proceedings of the Computer-Aided Verification on Information Systems Workshop (CAVIS05), 7th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC05). – Timisoara, 2005. – P . 16-19.

5. Arias-Marco, T. A property of Wallach's flag manifolds/ T. Arias-Marco// Archivum mathematicum(BRNO). – 2007. – V. 43. – P. 307-319.

6. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики/ В. И. Арнольд. – М., 1989. – 472 с.

7. Онищик, А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований/ А. Л. Онищик. – М.: Физ. – мат. лит., 1995, 344 с.