

НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ТРЕХМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Н.П. Можей¹

¹Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
ул. П. Бровки 6, 220013, Минск, Беларусь, mozheynatalya@mail.ru

Понятие нормальной связности для риманова многообразия ввел Э. Картан. Многообразия с нулевым кручением (то есть плоской нормальной связностью) исследовали почти одновременно Д. И. Перепелкин и Ф. Фабрициус-Бьерре. Итоги этих исследований подведены в монографии Чена [1]. Ряд исследований посвящен общим вопросам нормальных связностей, их интересную характеристику дал К. Номидзу [2].

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G}, G)$, где $G \subset \bar{G}$, так как многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G . Поскольку однородное пространство допускает аффинную связность, $\mathfrak{g}$ -модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ точен. Все такие пары $\text{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}} \mathfrak{g} = 3$ найдены в [3], дальнейшая нумерация пар соответствует приведенной там. Ограничимся случаем с ненулевым стабилизатором, так как все остальные однородные пространства – трехмерные группы Ли. Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$ -инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ (см., например, [4]). Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G , то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензор кручения $T \in \text{Inv } T_2^1(\mathfrak{m})$ имеет вид $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$; тензор кривизны $R \in \text{Inv } T_3^1(\mathfrak{m})$ имеет вид: $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Переформулируем теорему Вана об алгебре группы голономии инвариантной связности: алгебра Ли группы голономии инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \dots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) | x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Положим $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, порожденной множеством $\{\Lambda(x); x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Первоначально $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ была введена в римановом случае Б. Костантом и использовалась А. Лихнеровичем [5] и Г. Ваном в более общей ситуации. Говорят, что инвариантная связность *нормальна*, если $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$.

Найдены все пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ коразмерности 3, допускающие нормальную связность, все аффинные связности, их тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии и определено, при каких условиях связность является нормальной.

Литература

1. Chen Bang-Yen *Geometry of submanifolds*. (Pure and Appl. Math., № 22). New York, Marcel Dekker, 1973, X, 308 p.
2. Nomizu K. *Uniqueness of the normal connections and congruence of isometric immersions* // Tohoku Math. J., 1976, 28, № 1, 613-617.
3. Komrakov B., Tchourioumov A., Mozhey N. et al. *Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces*. V. I–III, Preprints Univ. Oslo, No 35–37 (1993).
4. Nomizu K. *Invariant affine connections on homogeneous spaces* // Amer. Journ. Math, 1954, V. 76., No 1, P. 33-65.
5. Lichnerowicz A. *Geometrie des Groupes de Transformations*. Paris: Dunod, 1958.