УДК 621.73

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО КОНТУРА МЕТОДОМ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ В СИСТЕМЕ MATHCAD

В.Т. ПЕРШИН

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
ул. П. Бровки, 6, г. Минск, 220013, Республика Беларусь, pershin_v@mail.ru

В докладе на примере анализа свободных колебаний в последовательном контуре методом фазовой плоскости показаны возможности использования математического пакета Mathcad для исследования протекания процессов в контуре при различных параметрах изучаемой цепи.

Ключевые слова: колебательный контур, фазовая плоскость, система MathCAD.

Цель работы – показать возможности использования пакета Mathcad для анализа методом фазовой плоскости свободных колебаний в колебательном контуре, состоящем из последовательно соединенных сопротивления *R*, индуктивности *L* и емкости *C*. В этой работе используется встроенная функция *rkfixed.*

Дифференциальное уравнение, описывающее процессы в контуре имеет вид:

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{1}$$

где $\alpha = R/L$ и $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Уравнение (1) можно записать в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -(2\alpha y + \omega_0^2 x). \end{cases} \tag{2}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим уравнение, не содержащее в явной форме время *t*:

$$dy/dx = -[(2\alpha\ x + \omega_0^2)/y]x. \tag{3}$$

На фазовой плоскости решение уравнения (3) $y = f(x, A)$ образует семейство фазовых траекторий изображающей точки $A(x_0, y_0)$ с различными начальными условиями x_0, y_0, которое представляет собой фазовый портрет контура. Так как при заданных начальных условиях уравнения (1) и (3) имеют единственное решение, то каждой паре координат x и y соответствует одна и только одна интегральная кривая, т.е. вся фазовая плоскость покрыта семейством непересекающихся фазовых траекторий. Затухающий апериодический процесс в случае аналоговой системы имеет место при $\alpha^2 > \omega_0^2$, когда корни характеристического уравнения $k_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ и $k_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$. Фазовый портрет рассчитан для величин $\alpha = 600$ рад/с и $\omega_0 = 300$ рад/с. Угловой коэффициент изоклины, являющейся интегральной кривой, равен $k = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \beta$. Последнее уравнение имеет два решения, которым соответствуют прямые: $i = -(\alpha - \beta)t$ и $i = -(\alpha + \beta)t$. Легко убедиться непосредственно, что решение $i = -(\alpha - \beta)t$ не является интегральной кривой и потому является побочным. На фазовом портрете изображается только прямая, соответствующая уравнению $i = -(\alpha + \beta)t$ и отражающая факт наличия двух фазовых траекторий, имеющих форму прямых линий и расположенных во втором и четвертом квадрантах прямоугольной системы координат. Обе эти фазовые траектории стремятся к нулевой устойчивой точке, которая представляет собой отдельную фазовую траекторию портрета. Кроме того, известна прямая, являющаяся при $k = 0$ изоклиной горизонтальных касательных. Ее угловой коэффициент $k \approx -200/2.8$, что хорошо согласуется с теоретической величиной. Напомним, что ось абсцисс является прямой вертикальных касательных, т.е. фазовые траектории пересекают ось абсцисс под прямым углом. Главная особенность этого портрета – при любых начальных условиях изображающая точка движется к началу координат. Таким образом, в рассматриваемом случае ($\alpha > \omega_0$) начало координат является точкой устойчивого равновесия и называется устойчивым узлом.

Фазовый портрет контура с параметрами $\alpha = 1800$ рад/с и $\omega_0 = 300$ рад/с имеет угловой коэффициент изоклины горизонтальных касательных $k \approx 70/2.8$, что хорошо соответствует теоретическому значению, Структура фазового портрета качественно определяется расположением изоклин и фазовых траекторий, представляющих собой искаженные параболы на системе координат. Угловой коэффициент изоклины, являющейся интегральной кривой равен $k = -\alpha$.

На рис. 1 изображен фазовый портрет контура с параметрами $\alpha = 300$ рад/с и $\omega_0 = 300$ рад/с. Таким образом, имеется одна прямая $i = -\alpha t$, представляющая собой фазовую траекторию. Изоклина горизонтальных касательных $i = -\omega_0^2 x/2\alpha = -\alpha x/2$, как видно из рис. 1, очень хорошо соответствует требованиям теоретического рассмотрения и имеет угловой коэффициент $k = 150$ рад/с.

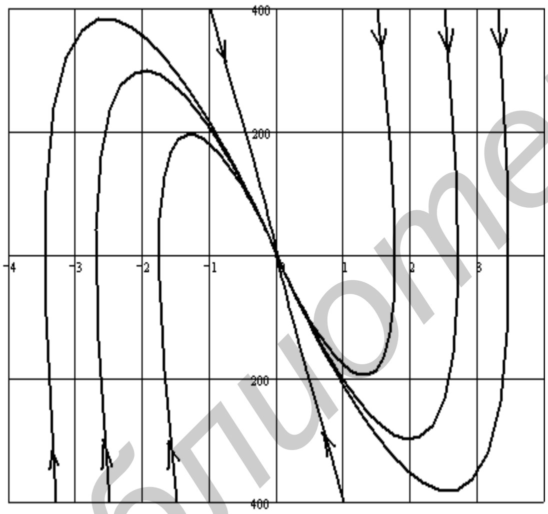

Рис. 1.Фазовый портрет контура
с параметрами α=300 рад/с и ω_0=300 рад/с

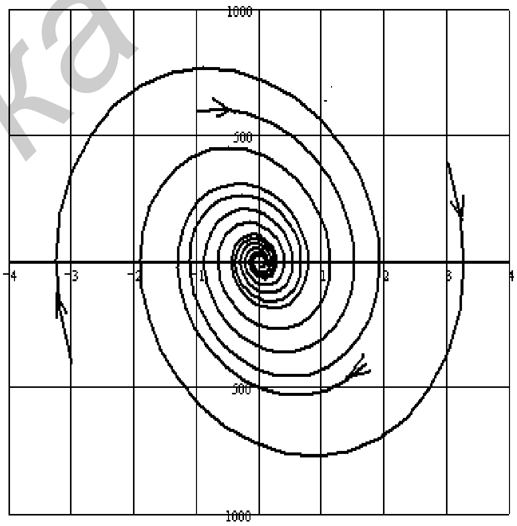

Рис. 2.Фазовый портрет контура
с параметрами α=50 рад/с и ω_0=300 рад/с

На рис. 2 показан фазовый портрет контура с параметрами $\alpha = 50$ рад/с и $\omega_0 = 300$ рад/с. Соответствующий этому случаю фазовый портрет представляет собой совокупность скручивающихся к началу координат спиралей. Из любого начального положения изображающая точка с течением времени приближается к началу координат, являющемуся точкой устойчивого равновесия. Это устойчивый фокус. Когда изоклины отсутствуют, структура фазового портрета определяется условием пересечения фазовых траекторий с осью *Ox* под прямым углом.