Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет информационных технологий и управления

Кафедра вычислительных методов и программирования

В. В. Матвеенко, Т. М. Кривоносова

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Рекомендовано УМО по образованию в области информатики и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия для специальностей 1-39 01 01 «Радиотехника (по направлениям)», 1-39 01 03 «Радиоинформатика», 1-39 03 03 «Электронные и информационно-управляющие системы физических установок»

Минск БГУИР 2016

УДК 519.854(076)
ББК 22.18я73
М33

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра прикладной информатики учреждения образования
«Белорусский государственный аграрный технический университет»
(протокол №2 от 28.09.2015);

заведующий кафедрой инфокоммуникационных технологий
учреждения образования «Белорусская государственная академия связи»,
кандидат технических наук, доцент В. И. Новиков

Матвеенко, В. В.

М33 Дискретная математика : учеб.-метод. пособие / В. В. Матвеенко, Т. М. Кривоносова. – Минск : БГУИР, 2016. – 66 с. : ил.
ISBN 978-985-543-234-1.

Изложен материал основ дискретной математики, необходимый для студентов указанных специальностей.

Даны краткие теоретические сведения с подробно рассмотренными примерами и задачами для самостоятельной работы.

УДК 519.854(076)
ББК 22.18я73

ISBN 978-985-543-234-1

СОДЕРЖАНИЕ

Тема 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛОГИКИ

1.1. Теоретическая часть

Логика представляет собой набор правил для получения обоснованных выводов.

Высказыванием называется утверждение, имеющее истинностное значение, т. е. оно может быть **истинным** или **ложным**.

Составное высказывание может быть построено из других с помощью логических операций. Наиболее употребительными операциями являются *И*, *ИЛИ*, *ЕСЛИ-ТО* ($=>$) и *НЕ*.

Результаты выполнения операций могут быть представлены в виде **таблиц истинности**, например, таблицы истинности логических операций *И*, *ИЛИ* и $=>$ имеют следующий вид:

P	Q	P *И* Q	P *ИЛИ* Q	$(P \;=>\; Q)$
И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	Л
Л	И	Л	И	И
Л	Л	Л	Л	И

Два составных высказывания называются **логически эквивалентными**, если они принимают одинаковые значения истинности на любом наборе истинностных значений своих составных частей. Высказывание о свойствах переменной x называют **предикатом** и обозначают, например, так: $P(x)$.

Для обозначения **кванторов** используются следующие символы: $\forall$ – «**для всех**» (для любого) и $\exists$ – «**существует**».

При доказательстве **прямым рассуждением** утверждения вида ($P \;=>\; Q$) из предположения об истинности P выводят истинность Q.

Обратное рассуждение в доказательстве основано на логической эквивалентности высказываний (*НЕ* $Q \;=>\;$ *НЕ* P) и ($P \;=>\; Q$).

Метод доказательства импликации ($P \;=>\; Q$), при котором из предположения о ложности Q и истинности P приходят к противоречию, называют методом **«от противного».**

Математическая индукция полезна при доказательстве высказывания, истинного для всех натуральных чисел.

Принцип математической индукции

Пусть $P(n)$ – предикат, определенный для всех натуральных n.

Предположим:

1) $P(1)$ истинно;

2) $\forall k \geq 1$ импликация ($P(k) \;=>\; P(k+1)$) верна.

Тогда $P(n)$ истинно при любом натуральном значении n.

Корректность алгоритмов

Чтобы доказать корректность алгоритма, т. е. убедиться, что он делает именно то, что и предусмотрено, нам нужно проверить все изменения переменных, используемых **до**, **в течение** и **после** работы алгоритма. Эти изменения и условия можно рассматривать как небольшие утверждения или предикаты.

Пусть P – предикат, истинный для входных данных алгоритма A, и Q – предикат, описывающий условия, которым должны удовлетворять выходные данные. Высказывание $\{P\}A\{Q\}$ означает, что «если работа алгоритма A начинается с истинного значения предиката P, то она закончится при истинном значении Q». Предикат P называется **входным условием**, или **предусловием**, а Q – **выходным условием**, или **постусловием**. Высказывание $\{P\}A\{Q\}$ само является предикатом. Поэтому доказательство корректности алгоритма A равносильно доказательству истинности $\{P\}A\{Q\}$. Для простых алгоритмов это делается достаточно прямолинейно.

1.2. Решение практических задач

Каждое из высказываний можно обозначить своей буквой. Пусть, например, P обозначает высказывание «земля плоская», Q – «Елена – доктор» и R – «29 – простое число».

Используя логические операции *НЕ*, *ИЛИ*, *И*, можно построить **составные высказывания**, компонуя более простые, например:

а) (*НЕ* P) – это высказывание «земля не плоская»;

б) (P *ИЛИ* Q) – «земля плоская или Елена – доктор»;

в) (P *И* Q) – «земля плоская и Елена – доктор».

Пример 1.1. Обозначим через P высказывание «логика – забава», а через Q – «сегодня пятница». Требуется выразить каждое из следующих составных высказываний в символьной форме:

а) логика – не забава и сегодня пятница;

б) сегодня не пятница, да и логика – не забава;

в) либо логика – забава, либо сегодня пятница.

Решение:

а) (*НЕ* P) *И* Q; *б*) (*НЕ* P) *И* (*НЕ* Q); *в*) P *ИЛИ* Q.

Чтобы уметь определять значение истинности составных высказываний, нам необходимо разобраться со смыслом логических операций, т. е. с тем эффектом, который они оказывают на истинностное значение простых высказываний. Это можно аккуратно сделать с помощью таблиц истинности.

Отрицанием произвольного высказывания P называется высказывание вида (*НЕ* P), чье истинностное значение строго противоположно значению P. Таблица истинности отрицания высказывания имеет вид

P	(*НЕ* P)
И	Л
Л	И

Конъюнкцией, или ***логическим умножением*** двух высказываний P и Q, называют составное высказывание вида (P *И* Q). Оно принимает истинное значение только в том случае, когда истинны обе его составные части. Такое определение хорошо согласуется с обычным пониманием союза «и» в разговорном языке. Соответствующая таблица истинности:

P	Q	(P *И* Q)
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Дизъюнкцией, или ***логическим сложением*** двух высказываний P и Q, называется составное высказывание (P *ИЛИ* Q). Оно истинно, если хотя бы одна из ее составных частей имеет истинное значение, что в некотором смысле также согласуется с обыденным пониманием союза «или». Другими словами, (P *ИЛИ* Q) означает «или P, или Q, или и то, и другое». Таблица истинности дизъюнкции:

P	Q	(P *ИЛИ* Q)
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Пример 1.2. Что можно сказать об истинности составного высказывания: «или луна делается из зеленого сыра и Генрих VIII имел шесть жен, или неверно, что динозавры вымерли»?

Решение. Обозначим через P высказывание «луна делается из зеленого сыра», через Q – «Генрих VIII имел шесть жен» и через R – «динозавры вымерли». Символьная запись данного высказывания имеет вид (P *И* Q) *ИЛИ* (*НЕ* R). Известно, что высказывание P ложно, а Q и R истинны. Поэтому высказывание (P *И* Q) или (*НЕ* R) имеет такое истинностное значение: (JI *И* И) *ИЛИ* JI, что эквивалентно JI.

Два составных высказывания, построенные из одних и тех же простых утверждений, но разными путями, могут принимать одинаковые значения истинности при любом возможном наборе значений истинности своих составных частей. Такие высказывания называются логически эквивалентными.

Пример 1.3. Покажите, что высказывание (*НЕ* (P *И* (*НЕ* Q))) логически эквивалентно утверждению ((*НЕ* P) *ИЛИ* Q).

Решение. Для составных высказываний

$$R = (НЕ\ (P\ И\ (НЕ\ Q)))\ \ И\ \ S = ((НЕ\ P)\ ИЛИ\ Q)$$

заполним совместную таблицу истинности, в которой вспомогательные колонки используются для построения обоих выражений из P и Q:

P	Q	*НЕ* P	*НЕ* Q	P *И* (*НЕ* Q)	R	S
И	И	Л	Л	Л	И	И
И	Л	Л	И	И	Л	Л
Л	И	И	Л	Л	И	И
Л	Л	И	И	Л	И	И

Две последние колонки таблицы идентичны. Это означает, что высказывание *R* логически эквивалентно высказыванию *S*.

Важно изучить еще один тип логического оператора, результатом которого является **условное высказывание**. Примером такого высказывания является следующее: «если завтра будет суббота, то сегодня – пятница». При определении истинностного значения условного высказывания необходимо различать фактическую истину и логическую.

Рассмотрим высказывание «если *P*, то *Q*». В том случае, когда предпосылка *P* истинна, мы не можем получить логически корректного заключения, если *Q* ложно. Однако если посылка *P* ложна, мы имеем логически корректное высказывание и когда *Q* ложно, и когда оно истинно.

Пример 1.4. Пусть *P* – ложное высказывание (1 = 5), *Q* – тоже ложное высказывание (3 = 7) и *R* – истинное утверждение (4 = 4). Покажите, что условные высказывания «если *P*, то *Q*» и «если *P*, то *R*» истинны.

Решение. Если (1 = 5), то, прибавляя 2 к обеим частям равенства, мы получим, что (3 = 7). Следовательно, высказывание «если *P*, то *Q*» справедливо. Вычтем теперь из обеих частей равенства (1 = 5) число 3 и придем к –2 = 2. Поэтому $(-2)^2 = 2^2$, т. е. 4 = 4.

В логике условное высказывание «если *P*, то *Q*» принято считать ложным только в том случае, когда *предпосылка P* истинна, а *заключение Q* ложно. В любом другом случае оно считается истинным.

Используя символ импликации «=>», мы пишем *P* => *Q* для обозначения условного высказывания «если *P*, то *Q*». Такая запись читается следующим образом: «из *P* следует *Q*», или «*P* влечет *Q*», или «*P* достаточно для *Q*», или «*Q* необходимо для *P*».

Таблица истинности импликации:

P	*Q*	(*P* => *Q*)
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Пример 1.5. Высказывание ((*НЕ Q*) => (*НЕ P*)) называется *противоположным*, или *контрапозитивным*, к высказыванию (*P* => *Q*). Покажите, что ((*НЕ Q*) => (*НЕ P*)) логически эквивалентно высказыванию (*P* => *Q*).

Решение. Рассмотрим совместную таблицу истинности:

P	*Q*	*НЕ P*	*НЕ Q*	(*P* => 0)	((*НЕ Q*) => (*НЕ P*))
И	И	Л	Л	И	И
И	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	И	И

Поскольку два последних столбца этой таблицы совпадают, то и высказывания, о которых идет речь, логически эквивалентны.

Предикаты и кванторы

Логика высказываний применяется к простым декларативным высказываниям, где базисные высказывания либо истинны, либо ложны. Утверждения, содержащие одну и более переменных, могут быть верными при одних значениях переменных и ложными при других.

Предикатом называется утверждение, содержащее переменные и принимающее значение истины или лжи в зависимости от значений переменных. Например, выражение «x – целое число, удовлетворяющее соотношению $x = x^2$», является предикатом, поскольку оно истинно при $x = 0$ или $x = 1$ и ложно в любом другом случае.

Логические операции можно применять и к предикатам. В общем случае истинность составного предиката в конечном счете зависит от значений входящих в него переменных. Существуют логические операторы, называемые **кванторами**, применение которых к предикатам превращает последние в ложные или истинные высказывания.

Пример 1.6. Определите, какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны:

а) Сумма внутренних углов любого треугольника равна 180°.

б) У всех кошек есть хвост.

в) Найдется целое число x, удовлетворяющее соотношению $x^2 = 2$.

г) Существует простое четное число.

Решение:

а) Истинно. *б*) Ложно. У бесхвостой кошки хвоста нет.

в) Ложно. *г*) Истинно. Число 2 является и простым, и четным.

В примере 1.6 мы имеем дело с набором объектов и утверждениями о том, что некоторое свойство имеет место *для всех* рассматриваемых объектов, или что *найдется* (*существует*) по крайней мере один объект, обладающий данным свойством.

Выражения «для всех» и «найдется» («существует») называются кванторами и обозначаются соответственно $\forall$ и $\exists$. Включая в предикат кванторы, мы превращаем его в высказывание. Поэтому предикат с кванторами может быть истинным или ложным.

Пример 1.7. Обозначим через $P(x)$ предикат «x – целое число и $x^2 = 16$». Выразите словами высказывание $\exists x : P(x)$ и определите его истинностное значение.

Решение. Высказывание $\exists x : P(x)$ означает, что найдется целое число x, удовлетворяющее уравнению $x^2 = 16$. Высказывание истинно, т. к. x, равное 4 и –4, это и есть решение данного уравнения, но нам не требуется рассуждать о знаке переменной x, чтобы проверить истинность высказывания $\exists x : P(x)$.

Пример 1.8. Пусть $P(x)$ – предикат: «x – вещественное число и $x^2 + 1 = 0$». Выразите словами высказывание $\exists x : P(x)$ и определите его истинностное значение.

Решение. Данное высказывание можно прочитать так: существует вещественное число x, удовлетворяющее уравнению $x^2 + 1 = 0$. Поскольку квадрат любого вещественного числа неотрицателен, т. е. $x^2 \geq 0$, мы получаем, что $x^2 + 1 \geq 1$. Следовательно, утверждение $\exists x : P(x)$ ложно.

Отрицание высказывания из примера 1.8 записывается в следующем виде: $НЕ\ \exists x : P(x)$. Это, естественно, истинное высказывание, которое означает, что не существует вещественного числа x, удовлетворяющего условию $x^2 + 1 = 0$. Иными словами, каково бы ни было вещественное x, $x^2 + {}$ $+1 \neq 0$. В символьной форме это можно записать как $\forall x \ \ НЕ\ P(x)$.

Для общего предиката $P(x)$ есть следующие логические эквивалентности:

а) $НЕ\ \exists x : P(x) \ <=> \ \forall x \ \ НЕ\ P(x)$;

б) $НЕ\ \forall x \ \ P(x) \ <=> \ \exists x : P(x)$.

Как показывает следующий пример, некоторые трудности возникают, когда в высказывании участвует более одного квантора.

Пример 1.9. Предположим, что x и y – вещественные числа, а $P(x, y)$ обозначает предикат $x + y = 0$. Выразите высказывания словами и определите их истинность:

а) $\forall x \ \exists y : P(x, y)$; *б*) $\exists y : \forall x \ \ P(x, y)$.

Решение:

а) Высказывание $\forall x \ \exists y : P(x, y)$ говорит о том, что для любого вещественного числа x найдется такое вещественное число y, что $x + y = 0$. Оно, очевидно, верно, поскольку какое бы число x мы ни взяли, число $y + x$ обращает равенство $x + y = 0$ в верное тождество.

б) Высказывание $\exists y : \forall x \ \ P(x, y)$ читается следующим образом: существует такое вещественное число y, что для любого вещественного числа x выполнено равенство $x + y = 0$. Это, конечно, не так: не существует вещественного числа y, обладающего указанным свойством. Следовательно, высказывание ложно.

Методы доказательств

При доказательстве теорем применяется логическая аргументация. Необходимость доказательства возникает, когда нам нужно установить истинность высказывания вида (P => Q). Существует несколько стандартных типов доказательств:

1. Прямое рассуждение. Предполагаем, что высказывание P истинно и показываем справедливость Q. Такой способ доказательства исключает ситуацию, когда P истинно, а Q ложно, поскольку именно в этом и только в этом случае импликация (P => Q) принимает ложное значение.

2. Обратное рассуждение. Предполагаем, что высказывание Q ложно и показываем ошибочность P. То есть фактически прямым способом проверяем истинность импликации (($НЕ\ Q$) => ($НЕ\ P$)), что согласно примеру 1.5, логически эквивалентно истинности исходного утверждения (P => Q).

3. Метод «от противного». Предположив, что высказывание P истинно, а Q ложно, используя аргументированное рассуждение, получаем противоречие. Этот способ также основан на том, что импликация (P => Q) принимает ложное значение только тогда, когда P истинно, а Q ложно.

Пример 1.10. Покажите прямым способом рассуждений, что произведение $x \cdot y$ двух нечетных целых чисел x и y всегда нечетно.

Решение. Любое нечетное число, и в частности x, можно записать в виде $x = 2m + 1$, где m – целое число. Аналогично $y = 2n + 1$ с некоторым целым n.

Значит, произведение

$$x \cdot y = (2m + 1)(2n + 1) = 4mn + 2m + 2n + 1 = 2(2mn + m + n) + 1$$

тоже является нечетным числом.

Пример 1.11. Пусть n – натуральное число. Покажите, используя обратный способ доказательства, что если n^2 нечетно, то и n нечетно.

Решение. Отрицанием высказывания о нечетности числа n^2 служит утверждение «n^2 четно», а высказывание о четности n является отрицанием утверждения «число n нечетно». Таким образом, нам нужно показать прямым способом рассуждений, что четность числа n влечет четность его квадрата n^2.

Так как n четно, то $n = 2m$ для какого-то целого числа m. Следовательно, $n^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$ – четное число.

Пример 1.12. Методом «от противного» покажите, что решение уравнения $x^2 = 2$ является иррациональным числом, т. е. не может быть записано в виде дроби с целыми числителем и знаменателем.

Решение. Допустим, что решение x уравнения $x^2 = 2$ рационально, т. е. записывается в виде дроби $x = m / n$ с целыми m и n, причем $n \neq 0$. Предположив это, нам необходимо получить противоречие либо с предположением, либо с каким-то ранее доказанным фактом.

Известно, что рациональное число записывается в виде дроби. Например, $x = m / n = 2m / 2n = 3m / 3n$ и т. д. Однако можно считать, что m и n не имеют общих делителей. В этом случае неоднозначность записи пропадает.

Предположим дополнительно, что дробь $x = m / n$ несократима (m и n не имеют общих делителей). По условию число x удовлетворяет уравнению $x^2 = 2$. Значит, $(m / n)^2 = 2$, откуда $m^2 = 2n^2$.

Из последнего равенства следует, что число m^2 четно. Следовательно, m тоже четно и может быть представлено в виде $m = 2p$ для какого-то целого числа p. Подставив эту информацию в равенство $m^2 = 2n^2$, мы получим, что $4p^2 = 2n^2$, т. е. $n^2 = 2p^2$. Но тогда n тоже является четным числом. Таким образом, мы показали, что как m, так и n – четные числа. Поэтому они обладают общим делителем 2. Если вспомнить, что мы предполагали отсутствие общего делителя у числителя и знаменателя дроби, то увидим явное противоречие.

Найденное противоречие приводит нас к однозначному выводу: решение уравнения $x^2 = 2$ не может быть рациональным числом, т. е. оно иррационально.

Математическая индукция

Компьютерную программу называют *правильной* или *корректной*, если она выполняет то, что указано в задании. Несмотря на то что тестирование программы может давать ожидаемый результат в случае каких-то отдельных начальных данных, необходимо доказать приемами формальной логики, что правильные результаты будут получаться при любых начальных значениях.

Проверка корректности алгоритма, содержащего циклы, нуждается в довольно мощном методе доказательства, который называется «*математическая индукция*».

Продемонстрируем преимущества этого важного метода, доказав корректность рекуррентного алгоритма, определяющего максимальный элемент из набора $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ натуральных чисел, представленного в следующем виде:

```
begin
        j  :=  0;
        M :=  0;
        while  j < n  do begin
                j  : =  j    +  1;
                M  : =  max ( M, a ) ;
        end
end
```

Действие алгоритма на наборе данных: $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_3 = 3$ и $a_4 = 8$ прослежено в следующей таблице:

j	M	$j < 4$?
0	0	Да
1	4	Да
2	7	Да
3	7	Да
4	8	Нет

После каждого прохода цикла переменная M равна наибольшему из просмотренных к этому моменту чисел. В качестве результата мы получили $M = 8$.

Но будет ли алгоритм работать правильно при любом вводимом наборе чисел длиной n?

Рассмотрим вводимый набор $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ длиной n и обозначим через M_k значение переменной M после k-го прохода цикла.

1. Если мы вводим набор a_1 длиной 1, то цикл сделает только один проход и M присвоится наибольшее значение из 0 и a_1, которым, очевидно, будет a_1 (натуральные числа больше 0). В этом случае вывод будет правильным.

2. Если после k-го прохода цикла M_k – наибольший элемент из набора $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$, то после следующего прохода M_{k+1} будет равно $\max (M_k, a_{k+1})$, т. е. максимальному элементу набора $a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1}$.

В п. 1 мы показали, что алгоритм работает правильно при любом вводимом наборе длиной 1. Поэтому согласно п. 2, он будет правильно работать и на любом наборе длиной 2. Вновь применяя рассуждения п. 2, мы убеждаемся, что алгоритм работает правильно и на любых наборах длиной 3 и т. д. Таким образом, алгоритм правильно работает на любых наборах произвольной длиной n, т. е. он ***корректен***.

На формальном языке использованный метод доказательства выглядит следующим образом.

Напомним принцип математической индукции. Пусть $P(n)$ – предикат, определенный для всех натуральных чисел n. Предположим:

1) $P(1)$ истинно;

2) $\forall k \geq 1$ импликация $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ верна.

Тогда $P(n)$ истинно при любом натуральном значении n.

Пример 1.12. Докажите по индукции, что равенство

$$1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1) / 2$$

выполнено при всех натуральных n.

Решение. Пусть $P(n)$ – предикат $1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1) / 2$.

В случае $n = 1$ левая часть равенства равна 1, а вычисляя правую часть, получаем $1(1 + 1) / 2 = 1$, следовательно, $P(1)$ истинно.

Предположим теперь, что равенство $1 + 2 + \ldots + k = k(k + 1) / 2$ имеет место для какого-то натурального числа k. Тогда

$$1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) = (1 + 2 + \ldots + k) + (k + 1) =$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{1}{2}\big(k(k+1) + 2(k+1)\big) = \frac{1}{2}\big((k+2)(k+1)\big) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Таким образом, при любом натуральном k импликация $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ справедлива. Значит, по принципу математической индукции, предикат $P(n)$ имеет истинное значение при всех натуральных n.

Пример 1.13. Методом математической индукции докажите, что $7^n - 1$ делится на 6 при любом натуральном n.

Решение. Целое число a делится на целое число b тогда и только тогда, когда выполняется равенство $a = mb$ при каком-то целом числе m. Например, 51 делится на 17, т. к. $51 = 3 \cdot 17$. Кроме того, потребуется свойство делимости чисел, которое утверждает, что сумма делящихся на b чисел делится на b.

Пусть $P(n)$ обозначает предикат «$7^n - 1$ делится на 6». При $n = 1$ имеем

$$7^n - 1 = 7 - 1 = 6,$$

т. е. предикат $P(1)$ имеет истинное значение.

Предположим, что $7^k - 1$ делится на 6 при каком-то натуральном k. Тогда

$$7^{k+1} - 1 = 7(7^k) - 1 = 7(7^k - 1) + 7 - 1 = 7(7^k - 1) + 6.$$

Итак, $7^{k+1} - 1$ делится на 6, так что при любом натуральном k импликация $(P(k) \Rightarrow P(k + 1))$ истинна.

Индуктивным рассуждением мы доказали истинность предиката $P(n)$ для всех натуральных n.

Пример 1.14. Последовательность целых чисел $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ определена рекуррентной формулой:

$$x_1 = 1 \text{ и } x_{k+1} = x_k + 8k, \text{ при } k \geq 1.$$

Докажите, что имеет место формула $x_n = (2n - 1)^2$ для всех $n \geq 1$.

Решение. Предикат $x_n = (2n - 1)^2$ обозначим через $P(n)$. Если $n = 1$, то $(2n - 1)^2 = (2 - 1)^2 = 1$, что показывает истинность высказывания $P(1)$.

Допустим теперь, что $x_k = (2k - 1)^2$ для некоторого $k \geq 1$. Тогда

$$x_{k+1} = x_k + 8\,k = (2k - 1)^2 + 8\,k = 4\,k^2 + 4\,k + 1 = (2\,k + 1)^2.$$

Видно, что $x_{k+1} = (2(k + 1) - 1)^2$ и поэтому истинность импликации $(P(k) \Rightarrow P(k + 1))$ доказана при всех $k \geq 1$. Следовательно, согласно индуктивному принципу, предикат $P(n)$ превращается в истинное высказывание при любом натуральном значении переменной n.

Пример 1.15. Докажите корректность алгоритма «*Разность*».

Разность
begin
    $z := x - y$;
end

Решение. В данном случае предусловием P являются равенства $x = x_1$ и $y= y_1$. Постусловие Q – это $z = x_1 - y_1$. Предикат $\{P\}$ *Разность* $\{Q\}$ читается как «если $x = x_1$ и $y = y_1$, то $z = x_1 - y_1$». Истинность последнего предиката легко проверяется подстановкой $x = x_1$ и $y = y_1$ в алгоритм, содержащий переменные z, x и y. С формальной точки зрения соотношения $z = x - y$, $x = x_1$ и $y = y_1$ влекут тождество $z = x_1 - y_1$.

Когда в алгоритме A происходит много различных действий с переменными, мы разбиваем его на подходящие отрезки A_1, ..., A_n и доказываем цепочку утверждений вида

$$\{P\}\ A_1\ \{Q_1\},\ \{Q_1\}\ A_2\ \{Q_2\},\ \ldots\ \{Q_{n-1}\}\ A_n\ \{Q_n\},$$

где постусловие любого отрезка служит предусловием следующего.

Пример 1.16. Докажите правильность алгоритма «*Квадратный многочлен*».

Квадратный многочлен {*x – вещественное число*}
begin
    $y := ax;\ y := (y + b)\,x;\ y := y + c;$
end
$\{ y = ax^2 + bx + c \}$

Решение. Разобьем алгоритм на кусочки, зафиксировав при этом обозначения пред- и постусловий $P \Rightarrow \{x = x_1\}$:

begin
    $y := ax;$
    $Q_1 \Rightarrow \{y = ax_1 \text{ и } x = x_1\}\ y := (y + b)\,x;$
    $Q_2 \Rightarrow \{y = ax_1^2 + bx_1\}\ y := y + c;$
end
$Q \Rightarrow \{y = ax_1^2 + bx_1 + c\}$

Сделанные подстановки показывают, что высказывания

$$\{P\}\ y := ax\ \{Q_1\}, \quad \{Q_1\}\ y := (y + b)x\ \{Q_2\}, \quad \{Q_2\}\ y := y + c\ \{Q\}$$

верны. Следовательно, предикат $\{P\}$ *Квадратный многочлен* $\{Q\}$ истинен, т. е. алгоритм «*Квадратный многочлен*» корректен.

Алгоритм с условными высказываниями тоже поддается технике доказательства. Когда в алгоритме появляется условный оператор *if... then,* во входных и выходных условиях должны быть отражены альтернативные пути через весь алгоритм.

Предположим, что условное составное высказывание

```
if условие then Высказывание 1;
else Высказывание 2;
```

вводит предусловие P, а на выходе дает условие Q. Тогда следует доказать истинность обоих предикатов:

$\{P$ *И* условие$\}$ *Высказывание* 1 $\{Q\}$ и $\{P$ *И НЕ* (условие)$\}$ *Высказывание* 2 $\{Q\}$.

Пример 1.17. Докажите, что алгоритм «*Модуль*» корректен.

```
Модуль {x – вещественное число}
begin
        if x ≥ 0 then abs := x
        else   abs := –x;
end
{abs – модуль числа x}
```

Решение. Предусловием P в нашем алгоритме служит $\{x = x_1\}$, а соответствующим постусловием Q является $\{abs$ – модуль числа $x\}$.

Предикат $\{P$ *И* $x \geq 0\}$ $abs := x$ $\{Q\}$ имеет истинное значение, поскольку модуль неотрицательного числа x_1 совпадает с ним самим.

Предикат $\{P$ *И НЕ* $(x \geq 0)\}$ $abs := -x$ $\{Q\}$ тоже истинен, т. к. модуль отрицательного числа x_1 отличается от него знаком.

Использование пред- и постусловий при проверке алгоритмов, в которых участвуют циклы типа *while ... do,* довольно громоздко. Предпочтительнее доказывать корректность таких алгоритмов методом математической индукции.

Пример 1.18. Докажите по индукции корректность алгоритма «*Квадрат*».

```
Квадрат {n – натуральное число}
begin
     sq:= 0;
     for i := 1 to n do
        sq := sq + 2i – 1;
end
{sq = n²}
```

Решение. Пусть $P(n)$ обозначает предикат «$sq = n^2$ после n-го прохода цикла», а sq_k – значение переменной sq после k-го прохода цикла. Покажем:

1) $sq_1 = 1^2$;
2) если $sq_k = k^2$, то $sq_{k+1} = (k + 1)^2$.

Очевидно, что после первого прохода цикла $sq_1 = 1$, и п. 1 выполнен. Предположим, что после k-го шага цикла $sq_k = k^2$, тогда после следующего шага

$$sq_{k+1} = sq_k + 2(k + 1) – 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Таким образом, п. 2 тоже имеет место.

Итак, мы установили, что $P(1)$ истинно (п. 1). Кроме того, исходя из п. 2 импликация ($P(k)$ => $P(k + 1)$) справедлива при любом $k \geq 1$. Следовательно, согласно принципу математической индукции, $P(n)$ истинно для всех натуральных n.

В рассмотренной задаче цикл *for* ограничен определенным числом итераций (проходов). В том случае, когда число петель цикла заранее не определено, при доказательстве методом индукции следует предположить, что число проходов все же ограничено, и показать правильность выходных данных. После чего необходимо будет проверить, что число петель такого цикла действительно конечно.

1.3. Индивидуальные задания

1. Пусть *P*, *Q* и *R* – определенные следующим образом высказывания:

P: *Я* умираю от жажды; *Q*: Мой стакан пуст; *R*: Сейчас три часа.

Запишите каждое из следующих высказываний как логическое выражение, включающее *P*, *Q* и *R*.

а) Я умираю от жажды и мой стакан не пуст.

б) Сейчас три часа, а я умираю от жажды.

в) Если сейчас три часа, то я умираю от жажды.

г) Если я умираю от жажды, то мой стакан пуст.

д) Если я не умираю от жажды, то мой стакан не пуст.

2. Обозначим через *P* высказывание «розы красные», а через *Q* – «фиалки синие». Запишите как логическое выражение каждое из следующих высказываний:

а) если розы не красные, то фиалки не синие;

б) розы красные или фиалки не синие;

в) либо розы красные, либо фиалки синие (но не одновременно).

Используя таблицы истинности, докажите логическую эквивалентность высказываний *а* и *б*.

3. Составные высказывания, принимающие истинные значения при любых истинностных значениях своих компонент, называются ***тавтологиями***. С помощью таблиц истинности найдите тавтологии среди следующих высказываний:

а) *НЕ* (*P И* (*НЕ P*)); *б*) *P* => (*НЕ P*);

в) (*P И* (*P* => *Q*)) => *Q*.

4. Покажите, что высказывание (*P* => *Q*) => *R* логически эквивалентно высказыванию ((*НЕ P*) => *R*) *И* (*Q* => *R*).

5. Обозначим через x слово «кошка», а через $P(x)$ предикат «у x есть усы». Запишите каждое из высказываний в символьной форме:

а) усы есть у всех кошек; *б*) найдется кошка без усов;

в) не бывает кошек с усами.

Запишите отрицание высказывания «*б»* в символьной форме, а отрицание высказывания «*в»* запишите как символами, так и словами.

6. Пусть $P(x)$ означает «x высокий», а $Q(x)$ – «x толстый», где x – какой-то человек. Прочитайте высказывание $\forall x\ (P(x)\ И\, Q(x))$.

Найдите его отрицание среди следующих утверждений:

а) найдется некто короткий и толстый;

б) нет никого высокого и худого;

в) найдется некто короткий или худой.

7. *а*) Прямым рассуждением докажите истинность высказывания «n и m – четные числа => $n + m$ – число четное».

б) Дайте обратное доказательство высказывания «n^2 – четное число => n – четное».

в) Методом «от противного» докажите, что «$n + m$ – нечетное число => одно из слагаемых является четным, а другое – нечетным».

8. Докажите каждое из высказываний методом математической индукции:

а) $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n\,(2n - 1)$ для всех натуральных чисел n;

б) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n\,(n + 1)\,(2n + 1)/6$ для всех натуральных чисел n;

в) $1/(1\cdot 3) + 1/(3\cdot 5) + \cdots + 1/(2n - 1)(2n + 1) = n/(2n + 1)$ для всех натуральных чисел n;

г) число $n^3 - n$ делится на 3 при всех натуральных значениях числа n;

д) $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + n\cdot n! = (n + 1)! - 1$ для всех натуральных чисел n.

9. Последовательность натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяется рекуррентной формулой

$$x_1 = 1 \text{ и } x_{k+1} = x_k\ /\ (x_k + 2) \text{ при } k \geq 1.$$

Вычислите x_2, x_3, x_4. Докажите по индукции, что

$$x_n = 1\ /\ (2^n - 1) \text{ для всех } n \geq 1.$$

10. Последовательность натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяется рекуррентной формулой

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2 \text{ и } x_{k+1} = 2\,x_k - x_{k-1} \text{ при } k > 1.$$

Вычислите x_3, x_4, x_5. Найдите общую формулу для x_n и индуктивным методом докажите ее истинность.

Тема 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

2.1. Теоретическая часть

Множество – это совокупность объектов, называемых его элементами.

Символом $\varnothing$ обозначается пустое множество, а U – универсальное.

$N = \{1, 2, 3, ...\}$ – множество натуральных чисел.

$Z = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$ – множество целых чисел.

$Q = \{p / q : p, q$ целые, $q \neq 0\}$ – множество рациональных чисел.

$R = \{$все десятичные дроби$\}$ – множество вещественных чисел.

Подмножеством множества S называется множество A, все элементы которого принадлежат S. Этот факт обозначается так: $A \subset S$.

Два множества называются **равными** тогда и только тогда, когда каждое из них является подмножеством другого.

Объединением множеств A и B называется множество

$$A \cup B = \{x : X \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечением множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{x : x \in \mathbf{A} \text{ и } x \in B\}.$$

Дополнением множества B до A называется множество

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Дополнением множества A (до универсального множества U) называется множество

$$\sim A = \{x : x \notin A\}.$$

Симметрической разностью множеств A и B называется множество

$$A \Delta B = \{x : (x \in A \text{ и } x \notin B\} \text{ или } (x \in B \text{ и } x \notin A\}.$$

Мощностью конечного множества S называется число его элементов. Оно обозначается через $|S|$.

Декартовым произведением множеств A и B является множество

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ и } b \in B\}.$$

Элементы $A \times B$ называются **упорядоченными парами.**

Множество $R \times R$ или R^2 называется **декартовой плоскостью.**

Битовой строкой (длиной n) называется элемент множества B^n, где $B = \{0, 1\}$.

Законы теории множеств:

– **ассоциативности** $A \cup (B \cup C) = (A \cup \mathrm{B}) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

– **коммутативности** $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;

– **тождества** $A \cup \varnothing = A$; $A \cap U = A$; $A \cup U = U$; $A \cap \varnothing = A$;

– **идемпотентности** $A \cup A = A$; $A \cap A = A$;

– **дистрибутивности** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

– **дополнения** $\overline{A} \cup A = U$; $\overline{A} \cap A = \varnothing$; $\overline{U} = \varnothing$; $\overline{\varnothing} = U$; $\overline{\overline{A}} = A$;

– **Де Моргана** $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Формула включений и исключений $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Упорядоченной парой называется запись вида (a, b), где a – элемент некоторого множества A, b – элемент множества B. Множество всех таких упорядоченных пар называется *декартовым,* или *прямым произведением* множеств A и B и обозначается $A \times B$.

Следовательно, $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ и } b \in B\}$. Операция прямого произведения множеств имеет практическое значение, поскольку вплотную подводит нас к понятиям *«отношение»* и *«функция».*

Пусть $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, если $A \subset C$, мы поставим ему в соответствие n-битную строку $(b_1, b_2, \ldots b_n)$, где $b_i = 1$, если $s_i \in A$, и $b_i = 0$ в противном случае. Такая строка бит называется *характеристическим вектором* подмножества A. Теперь мы можем имитировать операции на множествах логическими операциями, применяемыми к соответствующим характеристическим векторам, условившись считать 1 за *И*, а 0 за *Л*.

2.2. Решение практических задач

Пример 2.1. Найдите более простое описание множеств, перечисляющее их элементы:

а) $A = \{x : x$ – целое и $x^2 + 4x = 12\}$;

б) $B = \{x : x$ – название дня недели, не содержащее буквы «е»$\}$;

в) $C = \{n^2 : n$ – целое$\}$.

Решение:

а) Если $x^2+4x = 12$, то $x(x+4) = 12$. Поскольку x – целое число, делящее 12, то оно может быть равно только $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$ и ± 12. С другой стороны, $x + 4$ тоже делит 12. Поэтому остается только два значения: $x = -6$ или $x = 2$.

Другой способ решения заключается в отыскании корней квадратного уравнения $x^2+4x - 12 = 0$. Он приводит к тому же ответу: $x = -6$ или $x = 2$.

Следовательно, $A = \{-6, 2\}$.

б) $B = \{$вторник, пятница, суббота$\}$.

в) $C = \{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$.

Пример 2.2. Пусть $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$; $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Найдите $A \cup C$, $B \cap C$, $A \setminus C$ и $B \Delta C$.

Решение: $A \cup C = \{1, 3, 5, 7, 2, 4\}$; $B \cap C = \{2, 4\}$; $A \setminus C = \{7\}$;

$B \Delta C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) = \{6, 8\} \cup \{1, 3, 5\} = \{6, 8, 1, 3, 5\}$.

Пример 2.3. Пусть

$A = \{x : 1 \le x : \le 12$ и x четное целое число$\}$,

$B = \{ x : 1 \le x : \le 12$ и x целое число, кратное 3$\}$.

Убедитесь, что $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Решение. Заметим, что универсальным множеством здесь служит

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Кроме того, $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ и $B = \{3, 6, 9, 12\}$. Поэтому

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{\{6,\ 12\}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

и

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \{ 1 , 3, 5, 7, 9, 11\} \cup \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\} =$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}.$$

Следовательно, $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Пример 2.4. Каждый из 63 студентов первого курса, изучающих информатику в университете, может посещать и дополнительные лекции. Если 16 из них слушают еще курс бухгалтерии, 37 – курс коммерческой деятельности и 5 изучают обе эти дисциплины, то сколько студентов вообще не посещают упомянутые дополнительные занятия?

Решение. Введем обозначения: A = {студенты, слушающие курс бухгалтерии}, B = {студенты, слушающие курс коммерческой деятельности}, тогда

$$|A| = 16, |B| = 37 , |A \cap B| = 5.$$

Поэтому

$$|A \cup B| = 16 + 37 – 5 = 48.$$

Следовательно, 63 – 48 = 15 студентов не посещают дополнительных курсов.

Пример 2.5. Пусть $A = \{x, y\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$. Найдите декартовы произведения: $A \times B$, $B \times A$ и $B \times B$.

Решение. Прямое произведение $A \times B$ это множество $\{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$, а $B \times A$ – это $\{(1, x), (2, x), (3, x), (1, y), (2, y), (3, y)\}$. Очевидно, что они различны! Прямым произведением $B \times B$ служит множество $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

Учитывая пример 2.5, можно предположить, что мощность прямого произведения конечных множеств $A \times B$ равна $|A \times B| = mn$, если $|A| = m$ и $|B| = n$.

Если же одно из них или сразу оба бесконечны, то и произведение будет иметь бесконечное число упорядоченных пар.

Пример 2.6. Пусть $B = \{0, 1\}$. Опишите множество B^n.

Решение. Множество B состоит из последовательностей нулей и единиц длиной n. Они называются *строкой бит*, или *битовой строкой* длиной n.

Пример 2.7. Пусть $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 4\}$.

Выпишите характеристические векторы A и B, а затем определите характеристические векторы множеств $A \cup B$, $A \cap B$ и $\sim B$.

Решение. Нетрудно заметить, что характеристическим вектором множества A является $a = (1, 0, 1, 0, 1)$, а характеристический вектор множества B равен $b = (0, 0, 1, 1, 0)$. Значит,

a или $b = (1, 0, 1, 0, 1)$ или $(0, 0, 1, 1, 0) = (1, 0, 1, 1, 1)$;

a и $b = (1, 0, 1, 0, 1)$ и $(0, 0, 1, 1, 0) = (0, 0, 1, 0, 0)$;

не b = не $(0, 0, 1, 1, 0) = (1, 1, 0, 0, 1)$.

$A \cup B = \{1, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$ и $\sim B = \{1, 2, 5\}$.

2.3. Индивидуальные задания

1. Перечислите элементы следующих множеств:

$A = \{x : x \in Z$ и $10 \le x \le 17\}$; $B = \{x : x \in Z$ и $x^2 < 24\}$;

$C = \{x : x \in Z$ и $6x^2 + x - 1 = 0\}$; $D = \{x : x \in R$ и $6x^2 + x - 1 = 0\}$.

Указание: $6x^2 + x - 1 = 0 = (3x - 1)(2x + 1)$.

Определите с помощью предикатов следующие множества:

$S = \{ 2 , 5 , 8 , 11 , ... \}$; $T = \{ 1 , {}^1/_3 , {}^1/_7 , {}^1/_{15} , ... \}$.

2. Пусть $U = \{p, q, r, s, t, u, v, w\}$ – универсальное множество данной задачи и заданы подмножества $A – \{p, q, r, s\}$, $B = \{r, t, v\}$, $C = \{p, s, t, u\}$. Найдите элементы следующих множеств:

а) $B \cap C$; *б*) $A \cup C$; *в*) $\sim C$; *г*) $\sim(A \cap B)$;
д) $B \setminus C$; *е*) $A \cap B \cap C$; *ж*) $B \Delta C$; *з*) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

3. Пусть заданы подмножества стандартного словаря русского языка:
$A = \{x : x$ – слово, стоящее перед «собака»$\}$;
$B = \{x : x$ – слово, стоящее после «кошка»$\}$;
С = $\{x : x$ – слово, содержащее двойную букву$\}$.
Выясните, какие из следующих высказываний истинны:
а) $C \subset A \cup B$; *б*) «бассейн» $\in \sim B \cap C$;
в) «стресс» $\in B \Delta C$; *г*) $A \cap B = \varnothing$.
Опишите словами элементы следующих множеств:
д) $A \cap B \cap C$; *е*) $(A \cup B) \cap \sim C$.

4. Пусть заданы подмножества целых чисел: $A = \{3n : n \in Z$ и $n \ge 4\}$; $B = \{2n : n \in Z\}$; $C = \{n : n \in Z$ и $n^2 \le 100\}$.

Используя операции на множествах, выразите следующие подмножества через A, B и C:
а) множество всех нечетных целых чисел;
б) $\{-10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$;
в) $\{6n : n \in$ Z и $n \ge 2\}$;
г) $\{-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$.
Запишите определение множества $A \setminus B$ в предикатах.

5. Нарисуйте серию диаграмм Венна, иллюстрирующих закон дистрибутивности: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Докажите, что закон справедлив для любых множеств A, B и C.

6. Нарисуйте серию диаграмм Венна, иллюстрирующих следующее тождество: $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Покажите на примере, что множество $A \cup (B \Delta C)$ необязательно совпадает с множеством $(A \cup B) \Delta (A \cup C)$.

7. Докажите с помощью законов алгебры множеств следующие тождества:

а) $\overline{\left(A \cap \overline{B}\right)} \cup B = \overline{A} \cup B$; *б*) $\overline{\left(\overline{A} \cap \overline{B \cup C}\right)} = A \cup B \cup C$;

в) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$; *г*) $A \,\Delta\, A \,\Delta\, A = A$.

д) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup \overline{B} \cup C) \cap \overline{(A \cup C)} = \varnothing$;

8. Определим операцию «*» (не умножение) по формуле $A * B = \overline{(A \cap B)}$.

Изобразите на диаграмме Венна множество $A * B$. С помощью законов алгебры множеств докажите тождества:

а) $A * A = \overline{A}$; *б*) $(A*A) * (B*B) = A \cup B$;

в) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup \overline{B} \cup C) \cap \overline{(A \cup C)} = \varnothing$; *г*) $(A*B) * (A*B) = A \cap B$.

9. Студенты первого курса, изучающие информатику в университете, могут посещать и дополнительные дисциплины. В этом году 25 из них предпочли изучать бухгалтерию, 27 выбрали бизнес, а 12 решили заниматься туризмом. Кроме того, было 20 студентов, слушающих курс бухгалтерии и бизнеса, пятеро изучали бухгалтерию и туризм, а трое – туризм и бизнес. Известно, что никто из студентов не отважился посещать сразу три дополнительных курса. Сколько студентов посещали, по крайней мере, один дополнительный курс? Сколько из них были увлечены только туризмом?

10. Что можно сказать о непустых множествах A и B, если имеет место равенство $A \times B = B \times A$?

Непустые множества A, B, C удовлетворяют соотношению $A \times B = A \times C$. Следует ли отсюда, что $B = C$?

11. Пусть A, B, C – произвольные множества. Докажите, что:

а) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

б) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

12. ***Показательным множеством*** $P(A)$ называется множество, элементами которого являются подмножества множества A, $R(A) = \{C : C \subset A\}$.

а) Найдите $P(A)$, если $A = \{1, 2, 3\}$.

б) Докажите, что $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ для любых множеств A и B.

в) Покажите на примере, что $P(A) \cup P(B)$ не всегда совпадает с $P(A \cup B)$.

13. Пусть $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – универсальное множество. Выпишите характеристические векторы подмножеств $A = \{1, 2, 4, 5\}$ и $B = \{3,5\}$.

Найдите характеристические векторы подмножеств $A \cup {\sim}B$ и $A \,\Delta\, B$, после чего перечислите их элементы.

Тема 3. ОТНОШЕНИЯ

3.1. Теоретическая часть

Бинарным отношением между множествами A и B называется подмножество R в $A \times B$. Если $A = B$, то говорят, что R – **отношение на** A.

Бинарное отношение между конечными множествами может быть описано на словах (при помощи подходящих предикатов), как множество упорядоченных пар, как орграф и с помощью матрицы.

Отношение R на множестве A называется:

– **рефлексивным**, если $x\,R\,x$ для всех $x \in A$;

– **симметричным**, если $x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$ для всех $x, y \in A$;

– **кососимметричным**, если ($x\,R\,y$ и $y\,R\,x \Rightarrow x = y$) для всех $x, y \in A$;

– **транзитивным**, если ($x\,R\,y$ и $y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$) для всех $x, y, z \in A$.

Отношение R^* называют **замыканием отношения** R относительно свойства P, если выполняются следующие условия:

1) R^* обладает свойством P;

2) $R \subset R^*$;

3) R^* – подмножество любого другого отношения, содержащего R и обладающего свойством P.

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение R на множестве A называется **отношением эквивалентности**. **Классом эквивалентности** элемента $x \in A$ является подмножество $E_x = \{z \in A : z\,R\,x\}$.

Разбиение множества A_i представляет собой совокупность подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в A, удовлетворяющих требованиям:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \text{ и } A_i \cap A_j = \varnothing \text{ при } i \neq j\,.$$

Подмножества A_i из предыдущего определения называются **блоками** разбиения. Если R – отношение эквивалентности на A, то различные классы эквивалентности образуют **разбиение** A.

Рефлексивное, кососимметричное и транзитивное отношение R на множестве A называется **частичным порядком.** Множества, на которых определено такое отношение, в свою очередь, называются **частично упорядоченными множествами**.

Линейный порядок на множестве – это такой частичный порядок, при котором можно сравнить любую пару элементов.

Если R – отношение частичного порядка на множестве A и $x\,R\,y$, $x \neq y$, то x называется **предшественником** y. В том случае, когда x предшествует y и нет такого элемента z, для которого $x\,R\,z$ и $z\,R\,y$, то говорят, что x – **непосредственный предшественник** y. Последний факт обозначают так: $x < y$. **Диаграмма Хассе** представляет собой граф, чьи вершины изображают элементы частично упорядоченного множества. В том случае, когда $x < y$, вершина x располагается непосредственно под вершиной y и соединяется с ней ребром.

3.2. Решение практических задач

Пример 3.1. Выпишите упорядоченные пары, принадлежащие следующим бинарным отношениям на множествах $A = \{1, 3, 5, 7\}$ и $B = \{2, 4, 6\}$:

а) $U = \{(x, y) : x + y = 9\}$; *б*) $V = \{(x, y) : x < y)$.

Решение:

а) U состоит из пар: (3, 6), (5, 4) и (7, 2);

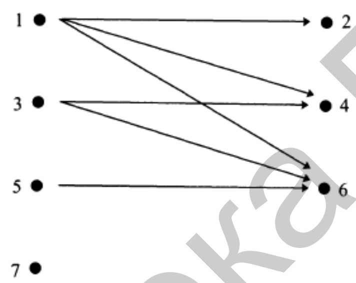
б) $V = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 4), (3, 6), (5, 6)\}$.

Пример 3.2. Множество $R = \{(x, y) : x$ – делитель $y\}$ определяет отношение на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Найдите все упорядоченные пары, ему принадлежащие.

Решение. R состоит из пар: (1, 1), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5) и (6, 6).

Пример 3.3. Изобразите граф отношения $V = \{(x, y) : x < y)$ между множествами $A = \{1, 3, 5, 7\}$ и $B = \{2, 4, 6\}$.

Решение. Граф указанного отношения имеет следующий вид:



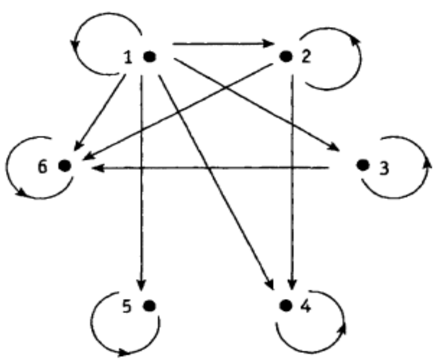
Пример 3.4. Отношение R на множестве $A = \{a, b, c, d\}$ задано матрицей, порядок строк и столбцов в которой соответствует порядку элементов множества A.

л	и	и	л
л	л	и	и
л	и	л	л
и	и	л	и

Назовите упорядоченные пары, принадлежащие R.

Решение. Отношение R содержит упорядоченные пары: (a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, b), (d, a), (d, b), (d, d).

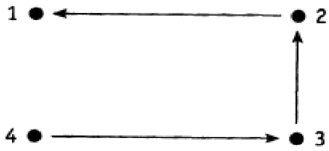
Пример 3.5. Выпишите матрицу, представляющую отношение R (предикат «x – делитель y»), выраженное следующим графом:



Решение. Матрица отношения R имеет вид

	1	2	3	4	5	6
1	и	и	и	и	и	и
2	л	и	л	и	л	и
3	л	л	и	л	л	и
4	л	л	л	и	л	л
5	л	л	л	л	и	л
6	л	л	л	л	л	и

Пример 3.6. Отношение R на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$ представлено графом



Перечислите упорядоченные пары, принадлежащие R, выпишите соответствующую матрицу и определите это отношение с помощью предикатов.

Решение. В терминах упорядоченных пар $R = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$. Матрица (относительно данного в условии порядка элементов множества) имеет вид

	1	2	3	4
1	л	л	л	л
2	и	л	л	л
3	л	и	л	л
4	л	л	и	л

С помощью предикатов это отношение может быть описано как $x - y = 1$.

Пример 3.7. Что можно сказать о свойствах (рефлексивности, симметричности, кососимметричности и транзитивности) следующих отношений:

а) «x делит y» на множестве натуральных чисел;

б) «$x \neq y$» на множестве целых чисел;

в) «количество лет x совпадает с возрастом y» на множестве всех людей.

Решение:

а) Поскольку x всегда делит сам себя, то это отношение рефлексивно. Оно несимметрично, поскольку, например, 2 является делителем 6, но не наоборот: 6 не делит 2.

Проверим, что отношение делимости транзитивно. Предположим, что x делит y, а y делит z. Тогда из первого предположения вытекает, что $y = mx$ для некоторого натурального числа m, а из второго – $z = ny$, где n – натуральное число. Следовательно, $z = ny = (nm)x$, т. е. x делит z. Значит, данное отношение транзитивно.

Наконец, наше отношение кососимметрично, поскольку из предположений: «x делит y» и «y делит x» вытекает, что $y = x$.

б) Так как высказывание «$x \neq x$» ложно, то это отношение нерефлексивно. Оно симметрично, поскольку $x \neq y$ тогда и только тогда, когда $y \neq x$. Наше отношение не обладает свойством транзитивности, т. к., например, $2 \neq 3$ и $3 \neq 2$, но, тем не менее, $2 = 2$. Наше отношение не кососимметрично, поскольку из условий $x \neq y$ и $y \neq x$ нельзя заключить, что $x = y$.

в) Отношение этого пункта рефлексивно, т. к. возраст любого человека x совпадает с количеством прожитых им лет. Оно симметрично, поскольку высказывание «количество лет x совпадает с возрастом y» равносильно высказыванию «количество лет y совпадает с возрастом x». Отношение также и транзитивно, т. к. если найдутся такие три человека x, y и z, что «количество лет x совпадает с возрастом y», а «количество лет y совпадает с возрастом z», то все трое будут одинакового возраста. Так как мы можем найти много ровесников, то данное отношение некососимметрично.

Пример 3.8. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, а отношение R на A задано упорядоченными парами: $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$. Оно нерефлексивно, несимметрично и нетранзитивно. Найдите соответствующие замыкания.

Решение. Замыкание относительно рефлективности должно содержать все пары вида (x, x). Поэтому искомое замыкание имеет вид

$$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3); (2, 2), (3, 3)\},$$

где добавленные пары отделены от исходных точкой с запятой. Замыкание относительно симметричности должно содержать все пары, симметричные исходным. Значит,

$$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3); (2, 1), (3, 2)\}.$$

Чтобы найти замыкание относительно транзитивности, необходимо выполнить несколько шагов. Так как R содержит пары (3, 1) и (1, 2), замыкание обязано включать в себя и пару (3, 2). Аналогично пары (2, 3) и (3, 1) добавляют пару (2, 1), а пары (3, 1) и (1, 3) – пару (3, 3). Добавим сначала эти пары:

$$R^* \supset \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3); (3, 2), (2, 1), (3, 3)\}.$$

Теперь у нас возникло сочетание (2, 1) и (1, 2). Значит, замыкание R^* должно содержать пару (2, 2). Теперь можно увидеть, что все необходимые пары мы добавили (хотя бы потому, что перебрали все пары из A^2). Следовательно,

$$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3); (3, 2), (2, 1), (3, 3), (2, 2)\}.$$

Замыкание по транзитивности позволит нам определить, существует ли возможность переправить сообщение из одного места в другое, например, в ориентированном графе, отражающем коммуникационную сеть.

Пример 3.9. Отношение R на вещественной прямой $\boldsymbol{R}$ задано условием $x\,R\,y$, если $x - y$ – целое число. Докажите, что R – отношение эквивалентности и опишите классы эквивалентности, содержащие 0, $^1/_2$ и $\sqrt{2}$.

Решение. Так как $x - x = 0 \in \boldsymbol{Z}$ для любого вещественного числа x, отношение R рефлексивно. Если $x - y$ – число целое, то и противоположное к нему $y - x = -(x - y)$ является целым. Следовательно, R – симметричное отношение. Пусть $x - y$ и $y - z$ – целые числа. Тогда $x - z = (x - y) + (y - z)$ – сумма целых чисел, т. е. целое число. Это означает, что R транзитивно.

Класс эквивалентности E_x произвольного вещественного числа x определяется по формуле $E_x = \{z \in \boldsymbol{R} : z - x$ – целое число$\}$.

Поэтому $E_0 = \boldsymbol{Z}$;

$E_{1/2} = \{z \in \boldsymbol{R} : (z - {}^1/_2)$ – целое число$\} = \{\ldots, -1^1/_2, -^1/_2, {}^1/_2, 1^1/_2, \ldots\}$;

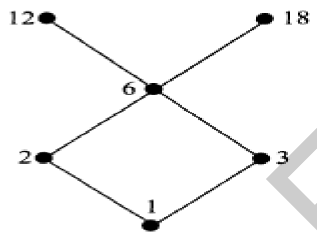
$E_{\sqrt{2}} = \{z \in \boldsymbol{R} : (z - \sqrt{2})$ – целое число$\} = \{\ldots, -1 + \sqrt{2}, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, \ldots\}$.

Пример 3.10. Дано, что отношение «...делитель...» определяет частичный порядок на множестве $A = \{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$. Составьте таблицу предшественников и непосредственных предшественников, после чего постройте соответствующую диаграмму Хассе.

Решение. Искомая таблица и диаграмма Хассе приведены ниже.

Элемент	Предшественник	Непосредственный предшественник
1	Нет	Нет
2	1	1
3	1	1
6	1, 2, 3	2, 3
12	1, 2, 3, 6	6
18	1, 2, 3, 6	6

Диаграмма Хассе:



3.3. Индивидуальные задания

1. Выпишите множество упорядоченных пар и начертите ориентированный граф отношения, заданного матрицей:

$$\begin{array}{c|cccc|} & a & b & c & d \\ \hline 1 & \text{и} & \text{и} & \text{и} & \text{и} \\ 2 & \text{л} & \text{и} & \text{л} & \text{и} \\ 3 & \text{л} & \text{л} & \text{и} & \text{л} \\ \hline \end{array}$$

2. Для каждого из следующих отношений на множестве натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ опишите упорядоченные пары, принадлежащие отношениям:

а) $R = \{(x, y) : 2x + y = 9\}$; *б*) $S = \{(x, y) : x + y < 7\}$;

в) $T = \{(x, y) : y = x^2\}$.

3. Пусть R – отношение на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$, определяемое условием $u\,R\,v$ тогда и только тогда, когда $u + 2v$ – нечетное число. Представьте R каждым из способов:

а) как множество упорядоченных пар; *б*) в графической форме;

в) в виде матрицы.

4. Определите, какие из следующих отношений на множестве людей рефлексивны, симметричны или транзитивны:

а) «...имеет тех же родителей, что и...»; *б*) «...является братом...»;

в) «... старше или младше, чем...»; *г*) «... не выше, чем...».

5. Определите, какие из приведенных ниже отношений на $\boldsymbol{Z}$ являются рефлексивными, симметричными, а какие транзитивными?

а) «$x + y$ – нечетное число»; *б*) «$x + y$ – четное число»;
в) «xy – нечетное число»; *г*) «$x + xy$ – четное число».

6. Перечислите упорядоченные пары, принадлежащие отношениям, заданным на множестве $\{x : x \in \boldsymbol{Z}$ и $1 \le x \le 12\}$.
а) $R = \{(x, y) : xy = 9\}$; *б*) $S = \{(x, y) : 2x = 3y\}$;
в) замыкание R по транзитивности; *г*) замыкание S по транзитивности.

7. Ниже определены отношения на множествах. Опишите на словах замыкание по транзитивности в каждом случае:
а) «x на один год старше, чем y» на множестве людей;
б) $x = 2y$ на множестве $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел;
в) $x < y$ на множестве $\boldsymbol{R}$ вещественных чисел;
г) «x является дочерью y» на множестве женщин.

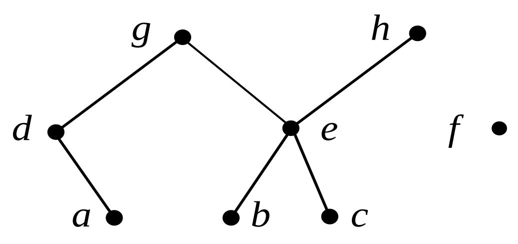
8. Найдите замыкания по рефлексивности, симметричности и транзитивности отношения $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, a)\}$, заданного на множестве $\{a, b, c, d\}$. Есть ли замыкание по антисимметричности?

9. Для каждого из следующих отношений эквивалентности на данном множестве A опишите блоки, на которые разбивается множество A:
а) A – множество книг в библиотеке, а R определяется условием $x\,R\,y$, если цвет переплета x совпадает с цветом переплета y;
б) $A = \boldsymbol{Z}$, R задается условием $x\,R\,y$ только тогда, когда $x - y$ – четное число;
в) A – множество людей, и $x\,R\,y$, если x имеет тот же пол, что и у;
г) $A = \boldsymbol{R}^2$, R задается по правилу $(a, b)\ R\ (c, d)$ в том случае, когда $a^2 + b^2 = c^2 + c^2$.

10. Отношение R на множестве $\boldsymbol{Z}$ определяется так: xRy в том и только том случае, когда $x^2 - y^2$ делится на 3. Покажите, что R является отношением эквивалентности и опишите классы эквивалентности.

11. Нарисуйте диаграмму Хассе для каждого из следующих частично упорядоченных множеств:
а) множество $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ с отношением «x делит y»;
б) множество всех подмножеств в $\{1, 2, 3\}$ с отношением «X – подмножество Y».

12. Диаграмма Хассе частичного порядка R на множестве $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ показана ниже. Перечислите элементы R и найдите минимальный и максимальный элементы частично упорядоченного множества A.



Тема 4. ФУНКЦИИ

4.1. Теоретическая часть

Обратное отношение к отношению R между множествами A и B обозначается как R; оно является отношением между множествами B и A и состоит из пар: $R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$.

Пусть R – отношение между множествами A и B, а S – отношение между множествами B и C. **Композицией** отношений R и S называется отношение между A и C, которое определяется условием

$S \circ R = \{(a, c) : a \in \text{A}, c \in C$ и $a\,R\,b,\ b\,S\,c$ для некоторого $b \in B\}$.

Пусть M и N – логические матрицы отношений R и S соответственно. **Логическим**, или **булевым произведением матриц** $M \circ N$ называется логическая матрица композиции $S \circ R$.

Функцией, определенной на множестве A со значениями в B , называется отношение f между A и B, при котором каждому элементу множества A ставится в соответствие единственный элемент из множества B.

Запись $f : A \to B$ обозначает функцию из множества A в множество B. Множество A при этом называют областью определения, а множество B – областью значений функции f. Мы пишем $y = f(x)$, чтобы подчеркнуть, что $y \in B$ – **значение функции** f, принимаемое на аргументе x. Еще y называют **образом** x при отображении f.

Множеством значений функции f называют подмножество в B: $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ (не путайте с *областью* значений).

Функция $f : A \to B$ называется **инъективной** (или **взаимно однозначной),** если $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ для всех $a_1, a_2 \in A$.

Функция $f : A \to B$ называется **сюръективной,** если ее множество значений совпадает с областью значений. Иначе говоря, если для каждого $b \in B$ найдется такой $a \in A$, что $f(a) = b$.

Функция, которая инъективна и сюръективна, называют **биективной.**

Если обратное отношение к функции f снова функция, то мы называем f **обратимой.** Функция $f : A \to B$ обратима тогда, когда она биективна. Обратную функцию к f мы обозначаем символом $f^{-1} : B \to A$. Если $f(a) = b$, то $f^{-1}(b) = a$.

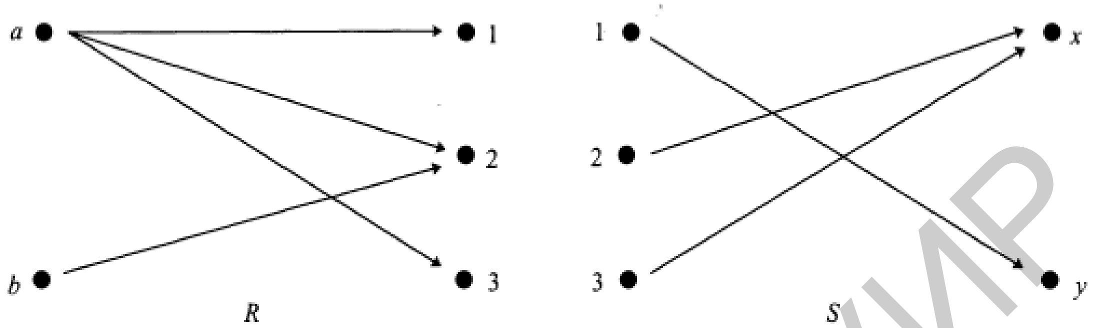
Принцип Дирихле: если $f : A \to B$ – функция, отображающая конечное множество A в конечное множество B, и $|A| > |B|$, то по крайней мере одно из значений f встретится более одного раза. Если $|A| > k|B|$ для некоторого натурального k, то одно из значений функции f повторится по крайней мере $k + 1$ раз.

4.2. Решение практических задач

Пример 4.1. Пусть R – отношение «a – сестра b», а S обозначает отношение «b – мать c» на множестве всех людей. Опишите словами следующие композиции: $S \circ R$ и $S \circ S$.

Решение. Если a – сестра b, а b – мать c, то a будет сестрой матери c, т. е. a приходится тетей c. Значит, отношение $S \circ R$ есть не что иное, как «a – тетя c». Аналогичными рассуждениями легко установить, что $S \circ S$ – это «a – бабушка с».

Пример 4.2. Предположим, что отношения R и S заданы орграфами, представленными ниже. Найдите орграф, соответствующий композиции $S \circ R$.



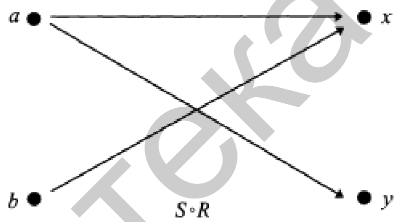
Решение. Используя орграфы, выпишем упорядоченные пары, принадлежащие отношениям: $R = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 2)\}$ и $S = \{(1, y), (2, x), (3, x)\}$.

Применим определение композиции отношений:

$aR1$ и $1Sy$ => $(a, y) \in S \circ R$; $aR2$ и $2Sx$ => $(a, x) \in S \circ R$;

$aR3$ и $3Sx$ => $(a, x) \in S \circ R$; $bR2$ и $2Sx$ => $(b, x) \in S \circ R$.

Орграф, соответствующий композиции $S \circ R$, имеет следующий вид :



Пример 4.3. Пусть R и S – отношения из примера 4.2. Вычислите логическую матрицу отношения $S \circ R$ с помощью булева произведения логических матриц отношений R и S.

Решение. Отношение R между $A = \{a, b\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$ задается матрицей $M = \begin{bmatrix} T & T & T \\ F & T & F \end{bmatrix}$, строки и столбцы которой помечены элементами множеств A и B в том порядке, в котором они выписаны.

Аналогично S – отношение между $B = \{1, 2, 3\}$ и $C = \{x, y\}$, заданное матрицей $N = \begin{bmatrix} F & T \\ T & F \\ T & F \end{bmatrix}$. Значит, матрица P отношения $S \circ R$ равна булеву произведению:

$$P = \begin{bmatrix} T & T & T \\ F & T & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & T \\ T & F \\ T & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & T \\ T & F \end{bmatrix}.$$

Пример 4.4. Определите, какие из следующих отношений между множествами $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$ являются функциями из множества A и B.

а) $f = \{\{a, 1), (a, 2), (b, 3), (c, 2)\}$; *б*) $g = \{\{a, 1), \{b, 2), (c, 1)\}$;
в) $h = \{(a, 1), (c, 2)\}$.

Решение:

а) Отношение f – не функция, поскольку элементу a соответствуют два разных элемента множества B : 1 и 2.

б) Отношение g является функцией.

в) Последнее отношение функцией не является, поскольку элементу b не соответствует ни одного элемента.

Пример 4.5. Определите, какие отношения являются функциями.

а) Отношение «x – брат или сестра y» на множестве всех людей.

б) Отношение на множестве $\boldsymbol{Z}$, заданное парами: $\{(x, x^2) : x \in \boldsymbol{Z}\}$.

в) Отношение на множестве $\boldsymbol{R}$, заданное парами: $\{\{x, y) : x = y^2\}$.

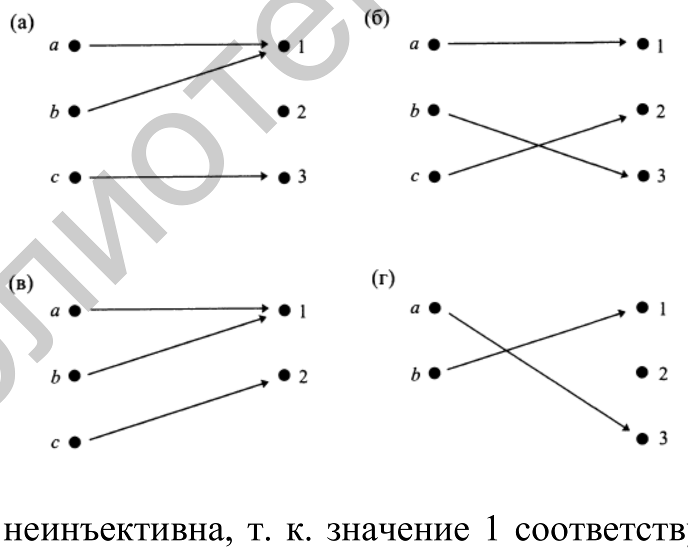
Решение.

а) Это не функция, поскольку есть люди с несколькими братьями и сестрами, а также бывают семьи с единственным ребенком.

б) Это отношение – функция, поскольку по каждому целому числу x его квадрат x^2 определяется однозначно.

в) Это отношение – не функция, т. к., например, обе упорядоченные пары: $(2, \sqrt{2})$ и $(2, -\sqrt{2})$ – ему принадлежат. Кроме того, в нем отсутствуют пары (x, y) с отрицательными x.

Пример 4.6. Определите, какие из функций, изображенных ниже, инъективны, а какие сюръективны. Перечислите все биекции.



Решение:

а) Функция неинъективна, т. к. значение 1 соответствует как a, так и b. Она несюръективна, т. к. в элемент 2 ничего не переходит.

б) Функция инъективна, т. к. не имеет повторяющихся значений, и сюръективна, т. к. множество ее значений совпадает со всей областью значений.

в) Значение 1 эта функция принимает как на a, так и на b. Следовательно, она не инъективна. Однако данная функция сюръективна, поскольку в ее множество значений входят все элементы области значений.

г) Последняя функция инъективна, но несюръективна.

Только в случае *б* мы имеем биекцию.

Пример 4.7. Покажите, что функция $h : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$, заданная как $h(x) = x^2$, и неинъективна, и несюръективна.

Решение. Прежде всего заметим, что данная функция не совпадает с функцией $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, заданной той же формулой $f(x) = x^2$. Чтобы показать, что h неинъективна, достаточно найти такие разные целые числа $a_1 \neq a_2$, для которых $h(a_1) = h(a_2)$. На графике видно много таких пар целых чисел. Например, $a_1 = 2$ и $a_2 = -2$.

Что касается противоречия с сюръективностью, то можно найти такое число, которое содержится в области значений, но не является значением функции h. Любое отрицательное число, в частности –1.

Пример 4.8. Покажите, что функция $k : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, заданная как $k(x) = 4x + 3$, является биекцией.

Решение. Предположим, что $k(a_1) = k(a_2)$, т. е. $4a_1 + 3 = 4a_2 + 3$.

Из равенства следует, что $4a_1 = 4a_2$, откуда $a_1 = a_2$. Значит, k – инъективна.

Пусть $b \in \boldsymbol{R}$. Покажем, что найдется такое вещественное число $a \in \boldsymbol{R}$, что $h(a) = b$. Ясно, что в качестве a можно взять $a = {}^{1}\!/_{4}\,(b - 3)$.

Итак, k – сюръективная функция. Поскольку k является одновременно и сюръекцией и инъекцией, то она – биективная функция.

Пример 4.9. Пусть на множестве $A = \{x : x \in \boldsymbol{R}$ и $x \neq 1\}$ функция $f : A \to A$ задана формулой $f(x) = x / (x - 1)$.

Покажите, что f биективна, и найдите обратную ей функцию.

Решение. Предположим, что $f(a_1) = f(a_2)$. Тогда $a_1 / (a_1 - 1) = a_2 / (a_2 - 1)$, значит $a_2a_1 - a_1 = a_2a_1 - a_2$, откуда $a_1 = a_2$. Следовательно, f инъективна.

Пусть $b \in A$ – элемент области значений f. Найдем элемент a из множества A, удовлетворяющий условию $f(a) = b$, т. е. $a / (a - 1) = b$.

Разрешая полученное уравнение относительно a, найдем $b / (b - 1) = a$.

Нам удалось найти элемент $a \in A$, для которого $f(a) = b$. Это свидетельствует о сюръективности f. Значит, она является биекцией.

Обратная функция определяется условием $f^{-1}(b) = a$ всегда, когда $f(a) = b$. Но, как мы уже выяснили при доказательстве сюръективности f, $a = b / (b - 1)$.

Таким образом, $f^{-1} : A \to A$, $f^{-1}(b) = b / (b - 1)$, т. е. функция f обратна сама себе.

Пример 4.10. Пусть функции $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ и $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ заданы формулами $f(x) = x^2$ и $g(x) = \, = 4x + 3$. Вычислить $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$.

Решение. Все четыре новые функции определены на R со значениями в R:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 4x^2 + 3$;

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x + 3) = (4x + 3f)^2 = 16x^2 + 24x + 9$;

$(f \circ f)(x) = f(f(x^2)) = x^4$;

$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(4x + 3) = 4(4x + 3) + 3 = 16x + 15$.

Пример 4.11. В автобусе едет 15 людей. Покажите, что по крайней мере у двоих из них день рождения в одном и том же месяце.

Решение. Множество людей в автобусе обозначим буквой A, а множество всех 12 месяцев – B. Рассмотрим функцию $f : A \to B$, сопоставляющую каждому человеку из автобуса месяц его рождения. Так как $|A| = 15$, а $|B| = 12$, то $|A| > |B|$. По принципу Дирихле функция f должна иметь повторяющиеся значения, т. е. найдутся два человека с одним и тем же месяцем рождения.

Пример 4.12. Какое наименьшее число фамилий должно быть записано в телефонном справочнике, чтобы с гарантией можно было утверждать, что хотя бы две фамилии начинаются с одной и той же буквы и заканчиваются одинаковыми буквами?

Решение. Пусть A – множество фамилий в справочнике, а B – множество пар букв, выписанных из стандартного алфавита русского языка, насчитывающего 33 буквы. Обозначим через $f : A \to B$ функцию, которая каждой фамилии справочника ставит в соответствие пару букв: первую и последнюю буквы фамилии. Например, f (*Кузнецов*) = (*к, в*). Множество B содержит $33 \cdot 33 = 1089$ пар букв. Принцип Дирихле гарантирует нам, что если $|A| > |B| = 1089$, то найдется по крайней мере две фамилии, начинающиеся и оканчивающиеся на одинаковые буквы. Поэтому телефонный справочник должен содержать не менее 1090 фамилий.

Пример 4.13. Покажите, что какие бы пять цифр из диапазона 1–8 мы не выбрали, найдутся хотя бы две из них, сумма которых равна 9.

Решение. Перечислим пары цифр, дающих в сумме 9: $\{1, 8\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$. Обозначим через A множество выбранных пяти цифр (неважно, каких конкретно), а через B следующее множество пар: $B = \{\{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\}$.

Рассмотрим функцию $f : A \to B$, сопоставляющую каждой цифре из пятерки пару из множества B, которая в ней содержится, например, $f(3) = \{3, 6\}$. По принципу Дирихле хотя бы две цифры из множества A попадут в одну и ту же пару.

Пример 4.14. Какое наименьшее число фамилий должно быть записано в телефонном справочнике, чтобы с гарантией можно было утверждать, что хотя бы пять фамилий начинаются с одной и той же буквы алфавита и заканчиваются одинаковыми буквами?

Решение. Пусть $f : A \to B$ – функция из примера 4.12. Как мы уже подсчитали, B состоит из 1089 элементов. Чтобы по крайней мере пять фамилий начинались и оканчивались одинаковыми буквами, нам нужно, чтобы $|A| > 4|B| = 4356$. Таким образом, телефонный справочник должен содержать не менее чем 4357 абонентов.

Пример 4.15. Покажите, что в любой группе из шести человек найдутся трое, знакомые друг с другом, или наоборот, совершенно не знающие друг друга.

Решение. Пусть x – один из шести людей, A – множество оставшихся пяти людей в группе и $B = \{0, 1\}$. Определим функцию $f : A \to B$ по правилу: $f(a) = 0$, если a не знаком с x, иначе $f(a) = 1$.

Поскольку $5 = |A| > 2|B|$, то найдется три человека, которые либо все знакомы с x, либо все трое его не знают.

Предположим теперь, что три человека a, b и c знакомы с x. Если все три друг с другом не знакомы, то мы получаем решение задачи. В противном случае, какая-то пара, скажем a и b, знает друг друга. Но они также знакомы и с x. Следовательно, трое людей a, b и x – хорошие знакомые. Аналогично разбирается случай, когда нашлась тройка людей, которые с x не знакомы.

4.3. Индивидуальные задания

1. Пусть R – отношение между множествами $\{1, 2, 3\}$ и $\{1, 2, 3, 4\}$, заданное перечислением пар: $R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$. Кроме того, S – отношение между множествами $\{1, 2, 3, 4\}$ и $\{1, 2\}$, состоящее из пар: $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$. Вычислите R^{-1}, S^{-1}, и $S \circ R$. Проверьте, что $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

2. Пусть R – отношение «...родитель...», а S – отношение «...брат...» на множестве всех людей. Дайте краткое словесное описание отношениям: R^{-1}, S^{-1}, и $R \circ S$, $R^{-1} \circ S^{-1}$, $R \circ R$.

3. Покажите, что если R – отношение частичного порядка на множестве A, то обратное к нему отношение R^{-1} тоже устанавливает частичный порядок на множестве A. Какова связь между максимальным и минимальным элементами относительно R и R^{-1}?

4. Отношения R и S заданы матрицами M и N соответственно:

$$M = \begin{bmatrix} T & F & F \\ T & F & T \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} T & F & T & T \\ T & T & F & F \\ F & T & T & T \end{bmatrix}.$$

Вычислите булево произведение $M \times N$. Какое отношение задается этим произведением?

5. Пусть $A = \{0, 2, 4, 6\}$ и $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Какие из нижеперечисленных отношений между множествами A и B являются функциями, определенными на A со значениями в B?

а) $\{(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5)\}$;
б) $\{(2, 3), (4, 7), (0, 1), (6, 5)\}$;
в) $\{(2, 1), (4, 5), (6, 3)\}$;
г) $\{(6, 1), (0, 3), (4, 1), (0, 7), (2, 5)\}$.

6. Про каждую из следующих функций, чьи области определения и значений совпадают с $\mathbf{Z}$, скажите, являются ли они инъекциями, сюръекциями или биекциями.

а) $f(n) = 2n + 1$;

б) $g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, \text{ если } n \text{ четно,} \\ 2n, \text{ если } n \text{ нечетно;} \end{cases}$

в) $h(n) = \begin{cases} n+1, \text{ если } n \text{ четно,} \\ n-1, \text{ если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$

7. Функция $f : A \to B$ задана формулой $f(x) = 1 + 2/x$, где A обозначает множество вещественных чисел, отличных от 0, а B – множество вещественных чисел без 1. Покажите, что f биективна, и найдите обратную к ней функцию.

8. Заданы две функции: $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ($f(x) = x^2$) и $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ $\left(g(x) = \begin{cases} 2x+1, \text{ если } x \geq 0; \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases} \right)$. Выразите формулами композиции: $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$.

9. Пусть $f : A \to B$ и $g : B \to C$ – функции. Докажите следующие утверждения:

а) если f и g инъективны, то $g \circ f$ тоже инъективна;

б) если f и g сюръективны, то $g \circ f$ тоже сюръективна;

в) если f и g обратимые функции, то $(g \circ f) = f^{-1} \circ g^{-1}$.

10. *а*) Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы какое-то число на ней выпало по крайней мере дважды?

б) Сколько раз нужно бросить две игральные кости, чтобы можно было утверждать, что сумма выпавших очков появится по крайней мере дважды?

в) Сколько карт необходимо вытащить из стандартной колоды в 52 карты, чтобы обязательно попались хотя бы две карты одной масти?

г) Сколько карт необходимо вытащить из стандартной колоды в 52 карты, чтобы обязательно попались хотя бы четыре карты одной масти?

11. Известно, что в одном селе проживает 79 семей, в каждой из которых по 2 ребенка.

а) Покажите, что найдется по крайней мере две семьи, в которых совпадают месяцы рождения обоих детей, т. е. если в первой семье дети родились в январе и мае, то и во второй – в январе и мае.

б) Докажите, что по крайней мере у шестерых детей имена начинаются с одной и той же буквы.

12. Пусть $S = \{1, 2,\ldots, 20\}$.

а) Какое наименьшее количество четных чисел необходимо взять из множества S, чтобы по крайней мере два из них в сумме давали 22?

б) Покажите, что если взять 11 элементов из множества S, то по крайней мере одно из выбранных чисел будет делить какое-то из оставшихся в выборке.

Тема 5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

5.1. Теоретическая часть

Граф $G = (V, E)$ состоит из множества V, чьи элементы называют **вершинами** графа, и множества E его **ребер**, соединяющих некоторые пары вершин. Вершины u и v графа называют **смежными,** если они соединены каким-то ребром $\boldsymbol{e}$, про которое говорят, что оно инцидентно вершинам u и v.

Степенью вершины v считают число $S(v)$ ребер графа, инцидентных v. Граф, в котором существует маршрут (называемый **эйлеровым)**, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же вершине и проходящий по каждому ребру графа ровно один раз, называется **эйлеровым** графом. Связный граф с двумя или более вершинами является эйлеровым тогда и только тогда, когда каждая его вершина имеет четную степень.

Лемма об **эстафете** утверждает, что сумма степеней вершин произвольного графа $G = (V, E)$ равна удвоенному числу его ребер.

Простым принято называть граф $G = (V, E)$ с конечным множеством вершин V и конечным множеством ребер E, в котором нет петель и кратных ребер. Логическая матрица отношения на множестве вершин простого графа G, которое задается его ребрами, называется **матрицей смежности.**

Подграфом графа $G = (V, E)$ называют граф $G' = (V', E')$, в котором $E' \subset E$ и $V' \subset V$.

Маршрутом длиной k в графе называют такую последовательность вершин $v_0, v_1, \ldots, v_k$, в которой каждая пара соседних вершин v_{i-1} и v_i соединена ребром.

Циклом в графе является замкнутый маршрут $v_0, v_1, \ldots, v_0$, у которого все вершины, кроме первой и последней, различны. Граф, не содержащий циклов, называют **ацикличным.**

Связным является тот граф, в котором каждая пара вершин соединена маршрутом. Количество компонент связности графа можно подсчитать с помощью **алгоритма связности.**

Гамильтоновым называют такой цикл в графе, который проходит через каждую вершину графа, причем только один раз. Граф, в котором существует гамильтонов цикл, называют **гамильтоновым.**

Задача коммивояжера состоит в поиске гамильтонова цикла минимального общего веса в нагруженном графе. **Алгоритм ближайшего соседа** позволяет найти субоптимальное решение задачи коммивояжера.

Связный ацикличный граф $G = (V, E)$ является **деревом**. Следующие утверждения о связном графе $G = (V, E)$ с n вершинами и m ребрами эквивалентны:

а) G – дерево;
б) любую пару вершин G связывает единственный путь;
в) G связен и $m = n - 1$;
г) G связен, а удаление любого его ребра нарушает это свойство;

д) G ацикличен, но соединяя любую пару вершин новым ребром, мы получаем цикл.

Остовным деревом графа G называют такой его подграф, который является деревом и содержит все вершины графа G. **Алгоритм поиска минимального остовного дерева** позволяет найти остовное дерево минимального общего веса в нагруженном графе и может быть использован для решения **задачи поиска кратчайшего соединения.**

Дерево с одной выделенной вершиной называют **деревом с корнем,** а выделенную вершину – его **корнем.** Вершины, стоявшие непосредственно под вершиной V (и соединенные с ней ребрами), называются **сыновьями** вершины v. Вершины, расположенные в самом низу дерева (они не имеют сыновей), называются **листьями.** Вершины, отличные от корня и листьев, называют **внутренними** вершинами графа. **Нулевое дерево** – это дерево, не имеющее ни одной вершины. Каждая вершина дерева с корнем T является корнем какого-то другого дерева, называемого **поддеревом** T.

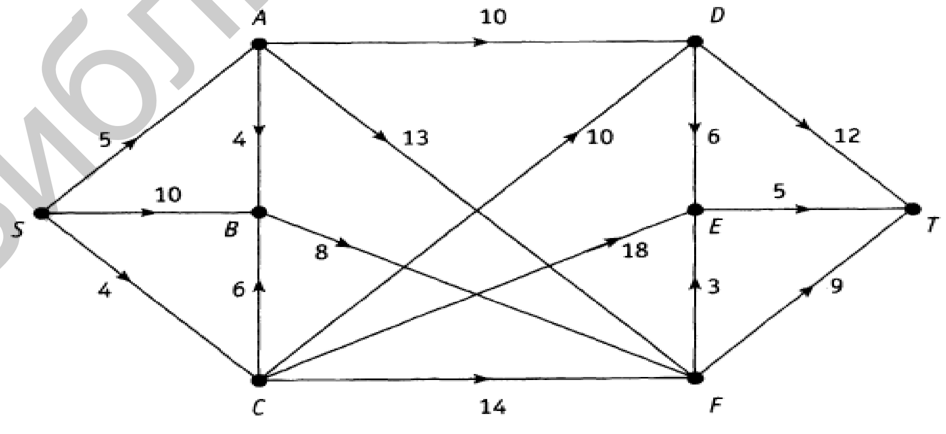
В двоичном дереве с корнем каждая вершина имеет не более двух сыновей, а два поддерева вершины V называют **левым** и **правым** поддеревьями, ассоциированными с V. Двоичное дерево с корнем называют **полным**, если каждая его вершина, за исключением листьев, имеет ровно по два сына.

Глубиной вершины v дерева с корнем T принято считать длину единственного маршрута, соединяющего ее с корнем. **Глубиной графа** T называют максимальную глубину его вершин.

Ориентированным графом, или **орграфом**, называют пару $G = (V, E)$, где V – конечное множество **вершин,** а E – отношение на V. Элементы множества E называют **дугами** орграфа. Если uv – дуга орграфа, то вершину u называют **антецедентом** v.

Путем длиной k в орграфе называют такую последовательность различных вершин $v_0, v_1,\ldots, v_k$, в которой каждая пара (v_{i-1}, v_i) образует дугу (i = l, ..., k).

Ниже приведен пример орграфа с 7 вершинами и 16 дугами:



Контуром в орграфе G принято называть образующую путь последовательность вершин $v_1,\ldots, v_k$, в которой первая вершина v_0 совпадает с последней, а других повторяющихся вершин в ней нет.

Орграф называют **бесконтурным,** если в нем нет контуров. В задаче о планировании заданий соответствующий бесконтурный орграф называют системой **ПЕРТ** (PERT – Program Evaluation and Review Technique).

Последовательность согласованных меток бесконтурного орграфа $G = (V, E)$ – это метки 1, 2, 3, …, n вершин, причем если uv – дуга орграфа, соединяющая вершину u с меткой i и вершину v с меткой j, то $i < j$.

Для орграфа можно выписать последовательность согласованных меток только тогда, когда он не имеет контуров. **Алгоритм топологической сортировки** генерирует последовательность согласованных меток бесконтурного орграфа.

Пусть $G = (V, E)$ – орграф с n вершинами и матрицей смежности M. Логическая степень M^k матрицы смежности хранит информацию о существовании путей длиной k между произвольной парой вершин орграфа G. Матрица $M^* = M$ или M^2 …, или M^n называется **матрицей достижимости** орграфа. В ней записана информация о существовании путей между вершинами.

Алгоритм Уоршелла используется для вычисления матрицы достижимости орграфа. Алгоритм генерирует последовательность матриц $W_0, W_1, W_2,\ldots, W_n$, где $W_0 = M$, $W_n = M^*$, а для любого $k \geq 1$ матрица W_k строится по W_{k-1} следующим образом:

1. Берем k-й столбец матрицы W_{k-1}.

2. Каждую строчку, у которой на k-м месте стоит F, переписываем в соответствующую строку матрицы W_k.

3. Каждую строчку, у которой на k-м месте стоит T, сцепляем с помощью операции *ИЛИ* с k-й строкой, а результат записываем в соответствующую строку матрицы W_k.

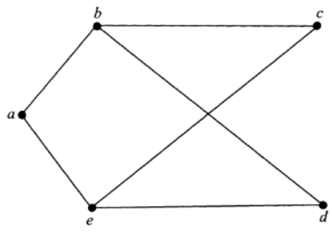
Кратчайшим путем между произвольной парой вершин в нагруженном орграфе называется путь наименьшего общего веса. Общий вес кратчайшего пути, ведущего от вершины u к v, называется ***расстоянием*** от u до v. Если пути от u до v не существует, то расстояние между ними принято считать бесконечным и обозначать символом ∞.

Алгоритм Дейкстры определяет кратчайшие пути в нагруженном графе от заданной вершины до любой другой.

5.2. Решение практических задач

Пример 5.1. Заданы множества вершин $V = \{a, b, c, d, e\}$ и ребер $E = \{ab, ae, bc, bd, ce, de\}$. Нарисуйте граф $G(V, E)$ и запишите его матрицу смежности.

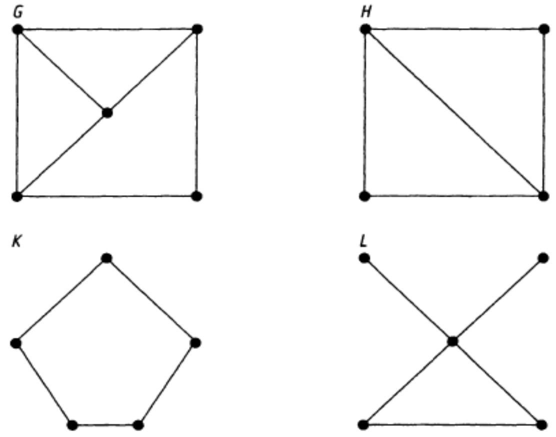
Решение. Граф $G(V, E)$ и его матрица смежности имеют следующий вид:



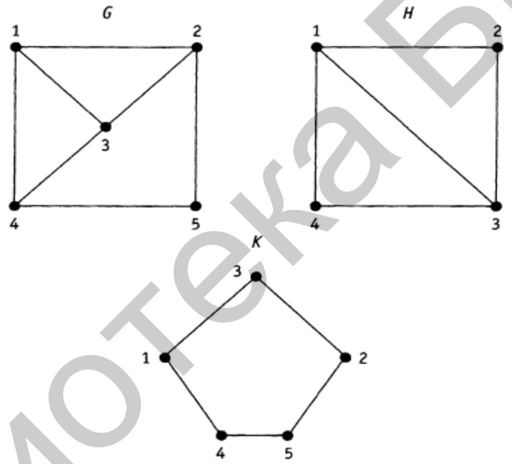
$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} F & T & F & F & T \\ T & F & T & T & F \\ F & T & F & F & T \\ F & T & F & F & T \\ T & F & T & T & F \end{bmatrix} \end{array}$$

Для восстановления графа нам достаточно только тех элементов матрицы смежности, которые стоят над главной диагональю.

Пример 5.2. Найдите среди графов *H, K* и *L* подграфы графа *G*:



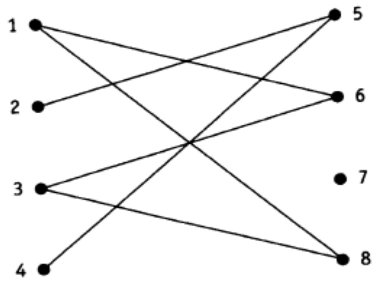
Решение. Обозначим вершины графов *G*, *H* и *K* как показано ниже. Графы *H* и *K* – подграфы в *G*, как видно из наших обозначений. Граф *L* не является подграфом в *G*, поскольку у него есть вершина индекса 4, а у графа *G* такой вершины нет.



Пример 5.3. Найдите циклы в графе *G* из примера 5.2.

Решение. В этом графе есть два разных цикла длиной 5: (132541) и (125431). Мы можем пройти эти циклы как в одном направлении, так и в другом, начиная с произвольной вершины цикла. Кроме того, в графе есть три разных цикла длиной 4: (12541), (12341) и (25432), и два цикла длиной 3: (1231) и (1341). Граф, в котором нет циклов, называется *ацикличным.* Структуры деревьев, которые возникают при вычислениях, представляют собой частный случай ацикличных графов.

Пример 5.4. Опишите алгоритм связности для изображенного графа.



Решение. Пусть $G = (V, E)$ – граф. *Алгоритм связности* предназначен для вычисления значения $c = c\,(G)$, т. е. числа компонент связности графа G:

begin

$V' := V$; $c := 0$;

while $V' \neq \varnothing$ *do*

begin

Выбрать $y \in V'$;

Найти все вершины, соединенные маршрутом с y;

Удалить вершину y из V' и соответствующие ребра из E;

$c := c + 1$;

end

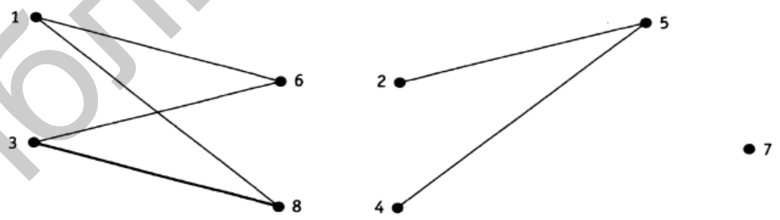
end

Выполнение алгоритма оформим следующим образом:

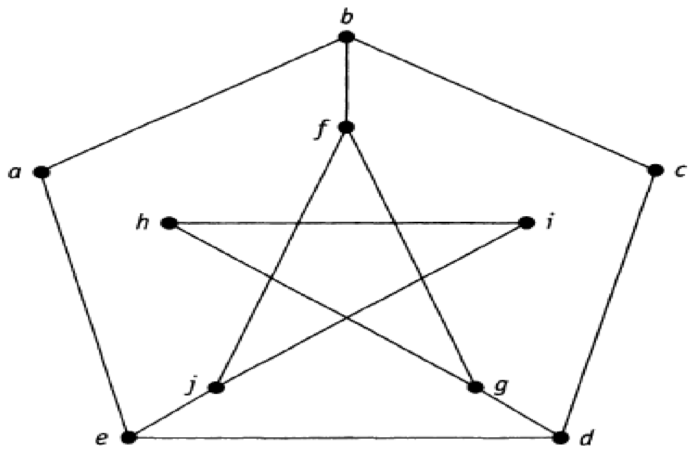
	V'	c
Исходные значения	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	0
1. Выбор $y = 1$	{2, 4, 5, 7}	1
2. Выбор $y = 2$	{7}	2
3. Выбор $y = 7$	$\varnothing$	3

Найдено число компонент связности $c(G) = 3$

В результате работы алгоритма из исходного графа были удалены два указанных ниже маршрута (1638), (254) и вершина 7:



Пример 5.5. Покажите, что указанный граф не является гамильтоновым.



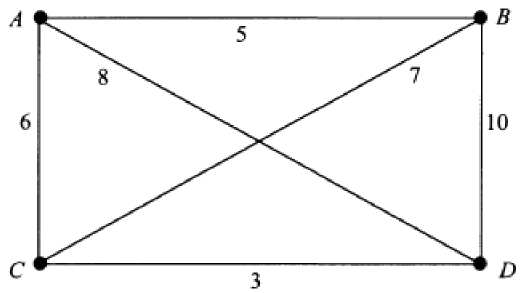
Решение. Предположим, что в связном графе найдется гамильтонов цикл. Каждая вершина v включается в гамильтонов цикл C выбором двух инцидентных с ней ребер, а значит, степень каждой вершины в гамильтоновом цикле (после удаления лишних ребер) равна 2. Степени вершин данного графа – 2 или 3. Вершины степени 2 входят в цикл вместе с обоими инцидентными с ними ребрами. Следовательно, ребра $a\,b$, $a\,e$, $c\,d$, $c\,b$, $h\,i$, $h\,g$, и $i\,j$ в том или ином порядке входят в гамильтонов цикл C.

Ребро $b\,f$ не может быть частью цикла C, поскольку каждая вершина такого цикла должна иметь степень 2. Значит, ребра $f\,j$ и $f\,g$ обязаны входить в цикл C, чтобы включить в него вершину f.

Но тогда ребра $j\,e$ и $g\,d$ никак не могут принадлежать циклу C, поскольку в противном случае в нем появятся вершины степени 3. Это вынуждает нас включить в цикл ребро $e\,d$, что приводит к противоречию: ребра, которые мы были вынуждены выбрать, образуют два несвязных цикла, а не один, существование которого мы предполагали. Вывод: граф не является гамильтоновым.

Гамильтоновы графы применяются для моделирования многих практических задач. Основой всех таких задач служит классическая *задача коммивояжера*.

Пример 5.6. Примените алгоритм ближайшего соседа к указанному графу.



За исходную вершину возьмите вершину D.

Решение. *Алгоритм ближайшего соседа.*

begin

Выбрать $v \in V$ Маршрут := v; v' := v; Отметить v';

while остаются неотмеченные вершины *do*

begin

Выбрать неотмеченную вершину u, ближайшую к v';
Маршрут := Маршрут u;
$w := w$ + вес ребра $u\, v'$;
$v' := u$;
Отметить v';
end
end

Результат выполнения алгоритма представим следующим образом:

	u	Маршрут	w	v'
Исходные значения	–	D	0	D
	C	DC	3	C
	A	DCA	9	A
	B	$DCAB$	14	B
Последний проход	B	$DCABD$	24	B

В результате работы алгоритма был найден гамильтонов цикл $DCABD$ общим весом 24. Делая полный перебор всех циклов в этом маленьком графе, можно обнаружить еще два других гамильтоновых цикла: $ABCDA$ общим весом 23 и $ACBDA$ общим весом 31.

В полном графе с 20 вершинами существует приблизительно $6{,}1 \cdot 10^{16}$ гамильтоновых циклов, перечисление которых требует чрезвычайно много машинной памяти и времени.

Пример 5.7. Докажите с помощью индукции по числу вершин, что для дерева T с n вершинами и m ребрами выполнено соотношение: $m = n - 1$.

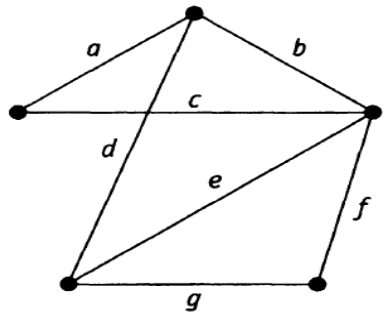
Решение. Поскольку дерево с единственной вершиной вообще не содержит ребер, то доказываемое утверждение справедливо при $n = 1$. Рассмотрим дерево T с n вершинами (и m ребрами), где $n > 1$, и предположим, что любое дерево с $k < n$ вершинами имеет ровно $k - 1$ ребер. Удалим ребро из T. По третьему свойству дерево T после этой процедуры превратится в несвязный граф. Получится ровно две компоненты связности, ни одна из которых не имеет циклов (в противном случае исходный граф T тоже содержал бы циклы и не мог бы быть деревом). Таким образом, полученные компоненты связности – тоже деревья.

Обозначим новые деревья через T_1 и T_2. Пусть n_1 – количество вершин у дерева T_1, а n_2 – у T_2. Поскольку $n_1 + n_2 = n$, то $n_1 < n$ и $n_2 < n$. По предположению индукции дерево T_1 имеет $n_1 - 1$ ребер, а T_2 – $n_2 - 1$. Следовательно, исходное дерево T насчитывало (с учетом одного удаленного) $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n - 1$ ребро, что и требовалось доказать.

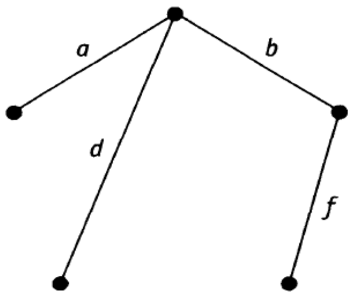
Несложно доказать, что в любом связном графе найдется подграф, являющийся деревом. Подграф в G, являющийся деревом и включающий в себя все вершины G, называется *остовным деревом.*

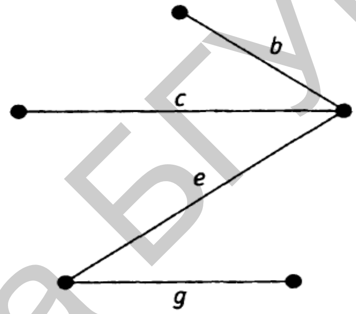
Остовное дерево в графе G строится просто: выбираем произвольное его ребро и последовательно добавляем другие ребра, не создавая при этом циклы, до тех пор, пока нельзя будет добавить ребро, не получив при этом цикл. Итак, для построения остовного дерева в графе из n вершин необходимо выбрать ровно $n-1$ ребер.

Пример 5.8. Найдите два разных остовных дерева в указанном графе.



Решение. В этом графе существует несколько остовных деревьев: одно из них получается последовательным выбором ребер a, b, d и f , другое – b, c, e и g.



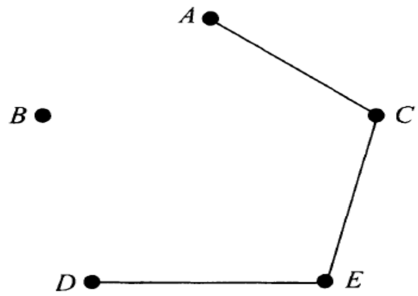


Пример 5.9. Заданы расстояния между пятью населенными пунктами A, B, C, D и E:

	A	B	C	D	E
A	–	13	3	9	9
B	13	–	11	11	13
C	3	11	–	9	7
D	9	11	9	–	2
E	9	13	7	2	–

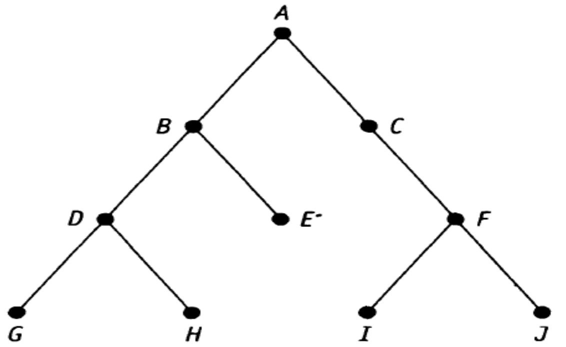
Найдите минимальное остовное дерево (МОД).

Решение. Ребра выбираются следующим образом: первое – ребро DE весом 2; второе – AC весом 3; третье – CE весом 7. На этой стадии дерево имеет вид



Следующие по весу ребра – AD, AE и CD, каждое из которых имеет вес 9. Какое бы из них мы ни добавили, получится цикл, поэтому перечисленные ребра следует исключить из числа доступных для строительства. Далее идут ребра BC и BD весом 11. Можно присоединить любое из них, получив при этом два разных МОД: $\{AC, BC, CE, DE\}$ или $\{AC, BD, CE, DE\}$ весом 23 каждое.

Пример 5.10. Пусть T – двоичное дерево с корнем, изображенное ниже.



Определите:

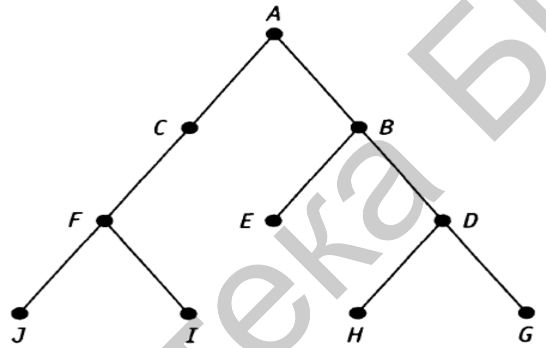
а) корень T;   *б*) корень левого поддерева вершины B;

в) листья T;   *г*) сыновей вершины C.

Нарисуйте двоичное дерево с корнем T', полученное из T перестановкой левых и правых поддеревьев у каждой вершины.

Решение: *а*) A;   *б*) D;   *в*) G, H, E, I и J;   *г*) F.

Двоичное дерево с корнем T' :

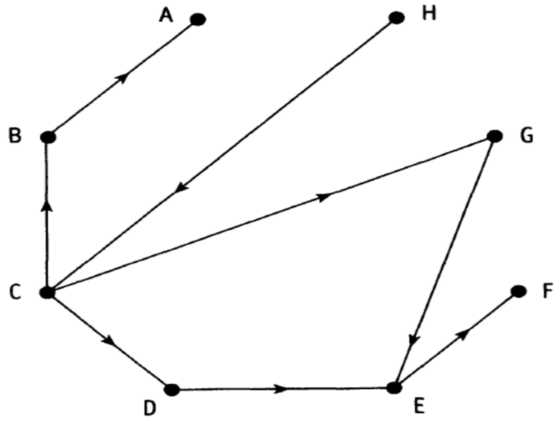


Пример 5.11. Для получения степени магистра биологии студенту необходимо прослушать восемь курсов, некоторым образом зависящих друг от друга:

		Предварительные курсы
A	Биотехнология	*B*
B	Начальный курс биотехнологии	*C*
C	Цитология	*H*
D	Структура ДНК	*C*
E	Энзимология	*D, G*
F	Диетология	*E*
G	Генная инженерия	*C*
H	Биология человека	*Никаких требований*

Изобразите систему ПЕРТ, иллюстрирующую приоритетную структуру курсов.

Решение. Система ПЕРТ – это просто орграф, представляющий данную приоритетную структуру. Вершины орграфа в данном случае – восемь курсов. Для краткости ссылок мы обозначим курсы буквами латинского алфавита от A до H. Дуги орграфа отражают представленные выше требования, необходимые для усвоения данного курса.



Предположим, что студент намерен определить порядок, в котором ему следует изучать предметы с учетом их зависимости друг от друга. Он может сделать это с помощью *алгоритма топологической сортировки.* Алгоритм создает *последовательность согласованных меток* для вершин бесконтурного орграфа таким образом, что если 1, 2, 3, …, n – метки вершин и uv – дуга орграфа, идущая от вершины u с меткой i к вершине v с меткой j, то $i < j$.

Решение. ***Алгоритм топологической сортировки*** генерирует последовательность согласованных меток вершин бесконтурного орграфа $G = (V, E)$. В самом начале работы алгоритма антецеденты каждой вершины v записываются в множество $A(v)$.

begin
    for $v \in V$ *do*
        Вычислить $A(v)$;
    label := 0;
    while Остаются неотмеченные вершины, для которых $A(v) = \varnothing$ *do*
    begin
        label := 1;
        u := Вершина с $A(u) = \varnothing$;
        Присвоить метку вершине u;
        for Каждой неотмеченной вершины $v \in V$ *do*;
        $A(v) := A(v) \setminus \{u\}$;
    end
end

Алгоритм успешно присваивает метки вершинам. Каждая вершина получает очередную метку в том случае, если у нее нет неотмеченных антецедентов.

Пример 5.12. Найдите последовательность меток для орграфа, изображенного в примере 5.11.

Решение. Множество антецедентов выглядит следующим образом: A(A) = {B}, A(B) = {C}, A(C) = {H}, A(D) = {C}, A(E) = {D, G}, A(F) = {E}, A(G) = {C} и A(H) = ∅.

Первый проход цикла *while*. Назначить метку 1 вершине H и удалить вершину H из всех оставшихся множеств A(v): A(A) = {B}, A(B) = {C}, A(C) = ∅, A(D) = {C}, A(E) = {D, G}, A(F) = {E}, A(G) = {C}.

Второй проход цикла *while*. Назначить метку 2 вершине C и удалить вершину C из всех оставшихся множеств $A(v)$: A(A) = {B}, A(B) =∅, A(D) = ∅, A(E) = {D, G}, A(F) = {E}, A(G) = ∅.

Третий проход цикла *while*. Теперь у нас появился выбор, какой вершине присвоить очередную метку. В зависимости от нашего выбора получатся разные последовательности меток. Присвоим, например, метку 3 вершине B и удалим B из множеств $A(v)$: A(A) = ∅, A(D) = ∅, A(E) = {D, G}, A(F) = {E}, A(G) = ∅.

Четвертый проход цикла *while*. Мы снова стоим перед выбором. Назначим метку 4 вершине A и удалим вершину A из $A(v)$: A(D) = ∅, A(E) = {D, G}, A(F) = {E}, A(G) = ∅.

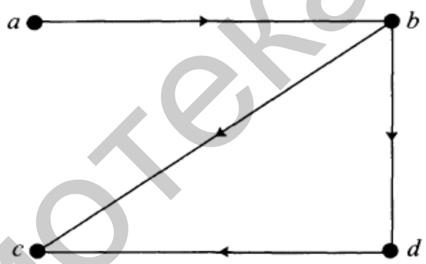
Пятый проход цикла *while*. Назначим метку 5 вершине D и удалим вершину D из $A(v)$: A(E) = {G}, A(F) = {E}, A(G) = ∅.

Шестой проход цикла *while*. Назначим метку 6 вершине G и удалим вершину G из $A(v)$: A(E) = ∅, A(F) = ∅.

Седьмой проход цикла *while*. Назначим метку 7 вершине E и удалим E из списка $A(v)$. Останется только A(F) = ∅.

Последний проход цикла *while*. Назначим метку 8 вершине F. Один из возможных приоритетных списков: H, C, B, A, D, G, E, F. Он дает нам порядок, в котором можно изучать курсы, соблюдая должную последовательность.

Пример 5.13. Вычислите матрицу достижимости представленного орграфа.



Решение. Запишем матрицу смежности орграфа:

$$M = \begin{bmatrix} F & T & F & F \\ F & F & T & T \\ F & F & F & F \\ F & F & T & F \end{bmatrix}.$$

Квадрат матрицы M равен

$$M^2 = \begin{bmatrix} F & T & F & F \\ F & F & T & T \\ F & F & F & F \\ F & F & T & F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F & T & F & F \\ F & F & T & T \\ F & F & F & F \\ F & F & T & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & F & T & T \\ F & F & T & F \\ F & F & F & F \\ F & F & F & F \end{bmatrix}.$$

Заметим, что буква T в матрице M^2 соответствует путям длиной 2 в орграфе G, а именно: *abc, abd* и *bdc*. Дальнейшие вычисления приводят к третьей и четвертой степеням матрицы M:

$$M^3 = \begin{bmatrix} F & F & T & F \\ F & F & F & F \\ F & F & F & F \\ F & F & F & F \end{bmatrix}, \qquad M^4 = \begin{bmatrix} F & F & F & F \\ F & F & F & F \\ F & F & F & F \\ F & F & F & F \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$M^* = \begin{bmatrix} F & T & T & T \\ F & F & T & T \\ F & F & F & F \\ F & F & T & F \end{bmatrix}.$$

Отметим, например, что буква T в верхнем правом углу матрицы M^* появляется из матрицы M^2 и соответствует пути *abd*.

Для больших орграфов вычисление матрицы M^* с помощью возведения в большую степень сложно и неэффективно. Более удобный путь определения M^* дает так называемый алгоритм Уоршелла.

Пусть $G = (V, E)$ – орграф с вершинами $v_1,\ldots, v_n$. Алгоритм Уоршелла генерирует последовательность матриц $W_0 = M, M_1,\ldots, M_n$, причем элемент матрицы W_k ($k \geq 1$), стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца $W_k(i, j)$, равен T в том случае, когда существует путь (произвольной длины) из вершины v_i в вершину v_j с внутренними вершинами из множества $\{v_1,\ldots, v_n\}$.

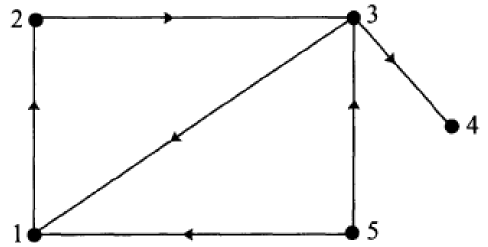
Матрица W_0 совпадает с матрицей смежности M орграфа, а W_n – искомая матрица достижимости M^*. Удачное использование цикла ***for*** придает алгоритму особенное изящество. Последовательные проходы этого цикла (пронумерованные индексом k) вычисляют матрицы $W_1,\ldots, W_n$.

Алгоритм Уоршелла

Этот алгоритм вычисляет матрицу достижимости $W = M^*$ ориентированного графа $G = (V, E)$ с матрицей смежности M.

```
begin
    W := M;
    for k = 1 to n do
        for i = 1 to n do
            for j = 1 to n do
                W (i, j) = W (i, j) или (W(i, k) и W(k, j));
end
```

Пример 5.14. С помощью алгоритма Уоршелла вычислите матрицу достижимости изображенного орграфа.



Решение. Матрица W_0 совпадает с матрицей смежности данного орграфа:

$$W_0 = \begin{bmatrix} F & T & F & F & F \\ F & F & T & F & F \\ T & F & F & T & F \\ F & F & F & F & F \\ T & F & T & F & F \end{bmatrix}.$$

Теперь вычисляем W_1. Учитывая первый шаг, мы рассматриваем 1-й столбец матрицы W_0. Следуя указаниям шага 2, скопируем строки матрицы W_0 с номерами 1, 2 и 4 в матрицу W_1 на те же места. Таким образом,

$$W_1 = \begin{bmatrix} F & T & F & F & F \\ F & F & T & F & F \\ ? & ? & ? & ? & ? \\ F & F & F & F & F \\ ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}.$$

Далее, согласно шагу 3, строка с номером 3 матрицы W_1 получается с помощью логической операции *ИЛИ* из 1-й и 3-й строк матрицы W_0. Поэтому

$$W_1 = \begin{bmatrix} F & T & F & F & F \\ F & F & T & F & F \\ T & T & F & T & F \\ F & F & F & F & F \\ ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}.$$

Опять применяем шаг 3 алгоритма для вычисления 5-й строки матрицы W_1 с помощью операции *ИЛИ*, примененной к 5-й и 1-й строкам матрицы W_0. Получаем

$$W_1 = \begin{bmatrix} F & T & F & F & F \\ F & F & T & F & F \\ T & T & F & T & F \\ F & F & F & F & F \\ T & T & T & F & F \end{bmatrix}.$$

Матрица W_1 вычислена. Теперь строим матрицу W_2 по матрице W_1. Взгляд на 2-й столбец матрицы W_1 показывает, что строки с номерами 2 и 4 копируются в W_2. Первая строка матрицы W_2 – результат применения операции *ИЛИ* к 1-й и 2-й строкам из W_1. Третья строка в W_2 получается сцеплением 3-й и 2-й строк матрицы W_1. И, наконец, пятая строка W_2 – результат логической операции *ИЛИ*, примененной к 5-й и 2-й строкам W_1, Значит,

$$W_2 = \begin{bmatrix} F & T & T & F & F \\ F & F & T & F & F \\ T & T & T & T & F \\ F & F & F & F & F \\ T & T & T & F & F \end{bmatrix}.$$

Отметим, что на пересечении 3-й строки и 3-го столбца матрицы W_2 стоит буква T. Это означает, что существует контур, начинающийся и заканчивающийся в вершине 3, проходящий через одну или обе вершины с номерами 1 и 2. Посмотрев на изображение орграфа, убеждаемся, что действительно существует контур длиной 3: (3123).

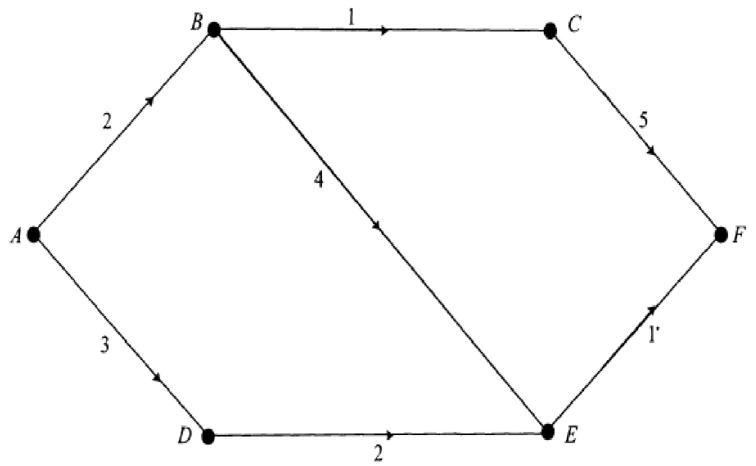
Аналогичным образом вычисляется матрица W_3:

$$W_3 = \begin{bmatrix} T & T & T & T & F \\ T & T & T & T & F \\ T & T & T & T & F \\ F & F & F & F & F \\ T & T & T & T & F \end{bmatrix}.$$

Поскольку из вершины 4 не выходит ни одна дуга, мы не сможем построить ни один путь, проходящий через вершину 4. Следовательно, матрица W_4 совпадает с W_3. Кроме того, в орграфе отсутствуют дуги, ведущие в вершину 5. Значит, нет и путей, через нее проходящих, т. е. $W_4 = W_5$. Наконец, $W_5 = M^*$, поскольку граф состоит только из пяти вершин.

Пример 5.15. *Кратчайший путь* – это путь с минимальным общим весом, соединяющий выбранные вершины. Определим *весовую матрицу* ω, чьи элементы $\omega(u, v)$ задаются формулой

$$\omega(u,v) = \begin{cases} 0, \quad \text{если } u = v, \\ \infty, \text{ если } u = v \text{ не соединены дугой}, \\ d, \text{ если } uv - \text{дуга весом } d. \end{cases}$$



Для представленного графа весовая матрица выглядит следующим образом:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\
\omega = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 1 & \infty & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}
\end{array}.
$$

Решение задачи представим в следующем виде:

Отмеченные вершины	Расстояние до вершины						Неотмеченные вершины
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	
A	0	**2**	∞	3	∞	∞	*B, C, D, E, F*
B	0	2	3	**3**	6	∞	*C, D, E, F*
D	0	2	**3**	3	5	∞	*C, E, F*
C	0	2	3	3	**5**	8	*E, F*
E	0	2	3	3	5	**6**	*F*
F	0	2	3	3	5	6	

1. Поскольку мы интересуемся кратчайшими путями от вершины *A*, мы ее отмечаем и используем первую строку весовой матрицы *w* для определения начальных значений *d*[*v*]. Очевидно, что наименьшее число из всех *d*[*v*] для неотмеченных вершин – это *d*[*B*] = 2.

2. Отмечаем вершину *B*, т. к. она является ближайшей к *A*. Вычисляем длины путей, ведущих от *A* к неотмеченным вершинам через вершину *B*. Если новые значения *d*[*v*] оказываются меньше старых, то меняем последние на новые. Итак, при этом проходе цикла путь *ABC* имеет вес 3, а путь *ABE* – 6, в то время как старые расстояния от *A* до этих вершин были ∞. Следовательно, заполняя вторую строку, мы заменим *d*[*C*] на 3 и *d*[*E*] на 6.

3. Из оставшихся неотмеченными вершины *C* и *D* находятся ближе всех к *A*. Отметить можно любую из них. Возьмем вершину *D*. Так как длина пути *ADE* равна 5, текущее значение *d*[*E*] следует уменьшить до 5. Теперь можно заполнить третью строчку. Наименьшее значение *d*[*v*] среди неотмеченных к этому моменту вершин оказывается у вершины *C*.

4. Отмечаем вершину *C* и подправляем значения *d*[*v*]. Теперь можно дойти и до вершины *F*, следуя путем *ABCF*. Его длина, а стало быть и значение *d*[*F*], равны 8. К этому моменту остались неотмеченными две вершины: *E* и *F*.

5. Мы отмечаем вершину *C*, что позволяет нам уменьшить величину *d*[*F*] с 8 до 6.

6. Отмечаем вершину *F*. Кратчайший путь от *A* до *F* равен 6.

Алгоритм Дейкстры

Пусть (V, E) – нагруженный граф и A – его вершина. Алгоритм выбирает кратчайший путь от вершины A до любой вершины V и присваивает его длину переменной $d[v]$. Для вершин u и v через $w(u, v)$ мы обозначаем вес дуги uv, а в списке *PathTo* (v) перечисляются вершины кратчайшего пути от A до v.

```
begin
    for Каждой v ∈ V do
    begin
        d[v] := w(A, v);
        PathTo (v) := A;
    end
    Отметить вершину A;
    while Остаются неотмеченные вершины do
    begin
      u := Неотмеченную вершину с минимальным расстоянием от A;
      Отметить вершину u;
      for Каждой неотмеченной вершины v с условием uv ∈ E do
      begin
        d' := d[u] + w(u, v)
        if d' < d[v] then
        begin
            d[v] := d';
            PathTo (v) := PathTo (u), v;
        end
      end
    end
end
```

5.3. Индивидуальные задания

1. Объясните, почему сумма степеней всех вершин простого графа G совпадает с удвоенным числом его ребер. Этот факт называют леммой об эстафете.

Используя эту лемму, покажите, что в любом полном графе K_n с n вершинами есть ровно $n(n – 1)/2$ ребер. Для каких значений n граф K_n будет эйлеровым?

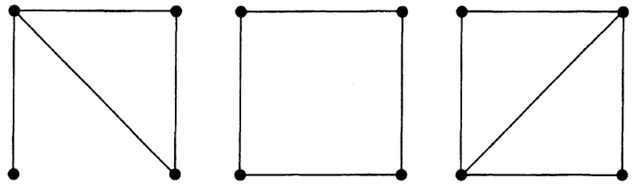
2. Опираясь на принцип Дирихле, докажите, что если простой граф G имеет более одной вершины, то у него найдутся по крайней мере две вершины одинаковой степени.

3. Нарисуйте граф, чья матрица смежности имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} F & T & F & T & F & T \\ T & F & T & F & T & F \\ F & T & F & T & F & T \\ T & F & T & F & T & F \\ F & T & F & T & F & T \\ T & F & T & F & T & F \end{vmatrix}$$

Опишите матрицу смежности полного графа K_n.

4. Введите подходящие обозначения вершин для каждого из изображенных графов (G, H, K):

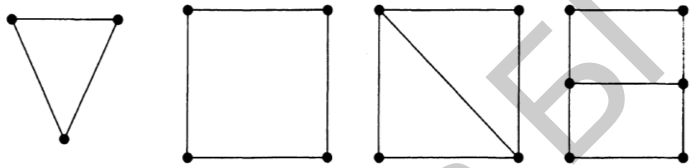


G H K

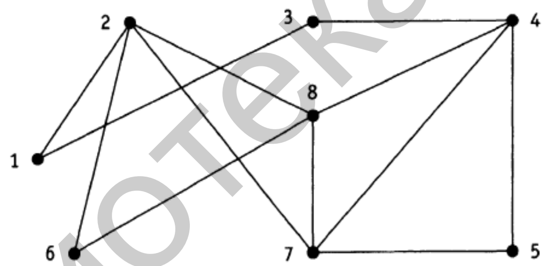
Подберите соответствующую матрицу смежности:

$$а)\begin{bmatrix} F & T & T & F \\ T & F & F & T \\ T & F & F & T \\ F & T & T & F \end{bmatrix}; \qquad б)\begin{bmatrix} F & T & T & F \\ T & F & T & T \\ T & T & F & T \\ F & T & T & F \end{bmatrix}; \qquad в)\begin{bmatrix} F & T & F & F \\ T & F & T & T \\ F & T & F & T \\ F & T & T & F \end{bmatrix}.$$

5. Определите, какие из представленных графов могут быть подграфами графа, полученного в задании 3?

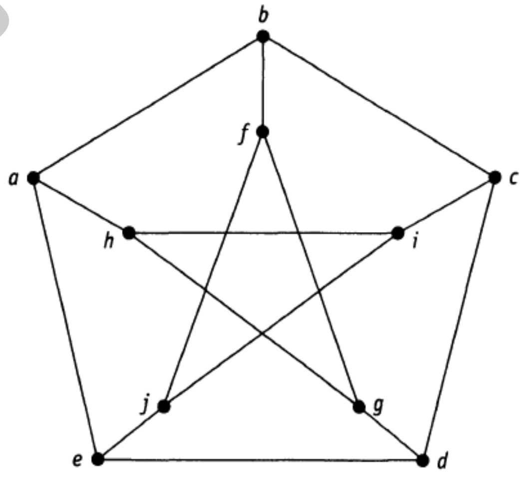


6. Найдите гамильтоновы циклы в следующем графе:



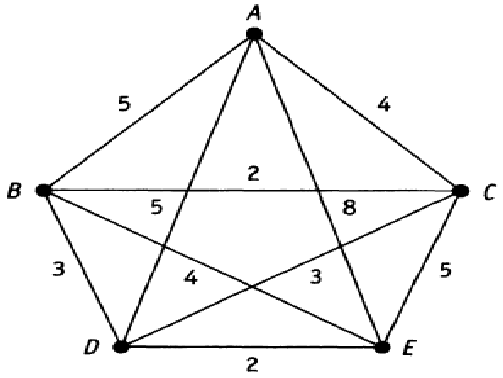
Найдите в нем циклы длиной 3, 4, 5, 6 и 7.

7. В изображенном графе P (граф Петерсена) найдите цикл длиной 9.



Покажите, что P не является гамильтоновым.

8. Используйте алгоритм ближайшего соседа для поиска гамильтонова цикла в нагруженном графе.



Исходные вершины:

а) вершина *A*; *б*) вершина *D*.

9. Выясните, являются ли графы, задаваемые следующими матрицами смежности, деревьями:

$$\begin{bmatrix} F & F & F & F & F & T \\ F & F & F & T & F & T \\ F & F & F & F & T & T \\ F & T & F & F & T & F \\ F & F & T & T & F & F \\ T & T & T & F & F & F \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} F & F & F & F & F & T \\ F & F & T & F & F & F \\ F & T & F & T & F & T \\ F & F & T & F & T & F \\ F & F & F & T & F & F \\ T & F & T & F & F & F \end{bmatrix}.$$

10. Известно, что дерево *T* имеет три вершины степени 3 и четыре вершины степени 2. Остальные вершины дерева имеют степень 1. Сколько вершин степени 1 есть у дерева *T*? (Указание: обозначьте число вершин дерева *T* через *n* и примените лемму об эстафете).

11. ***Лесом*** называют граф (необязательно связный), каждая компонента связности которого – дерево. Пусть *G* – лес с *n* вершинами и *k* компонентами связности.

а) Докажите, что *G* имеет $n - k$ ребер.

б) Покажите, что если в каждой компоненте связности леса *G* есть более одной вершины, то *G* содержит по крайней мере $2k$ вершин степени 1.

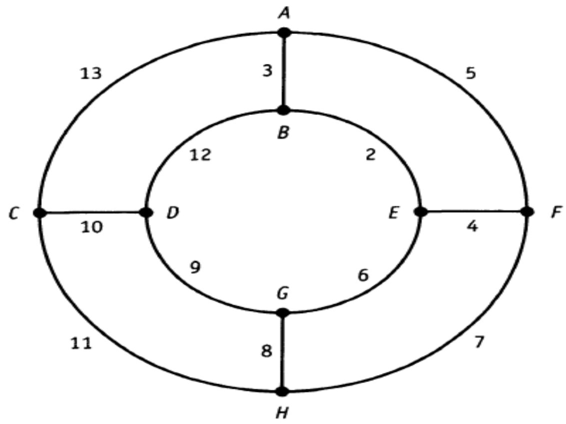
в) Нарисуйте лес с девятью вершинами и шестью ребрами, в котором не больше пяти вершин степени 1.

12. Заданы расстояния между шестью городами: А, Б, В, Г, Д, Е.

	А	Б	В	Г	Д	Е
А	–	78	56	73	71	114
Б	78	–	132	121	135	96
В	56	132	–	64	85	154
Г	73	121	64	–	144	116
Д	71	135	85	144	–	185
Е	114	96	154	116	185	–

Используя алгоритм поиска минимального остовного дерева, найдите сеть дорог с минимальной общей длиной, связывающую все шесть городов.

13. Найдите минимальное остовное дерево изображенного графа:



14. *Глубина вершины v* дерева с корнем *T* определяется как длина единственного пути от нее к корню дерева. *Глубина графа T* – это максимальная глубина его вершин.

а) Начертите следующие деревья: 1) дерево с корнем глубиной 1 с шестью вершинами; 2) полное двоичное дерево с корнем глубиной 2; 3) дерево с корнем глубиной 3, каждая вершина глубиной i ($i \geq 0$) которого имеет ($i + 1$) сына.

б) Покажите методом индукции (по n), что полное двоичное дерево с корнем глубиной n имеет 2^n листьев. (*Полным* называется двоичное дерево с корнем, у которого все вершины (за исключением листьев) имеют по два сына).

15. Изобразите орграф с вершинами $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и матрицей смежности

$$\begin{bmatrix} T & F & F & T & F & F \\ T & F & T & F & F & T \\ F & T & T & F & T & F \\ T & F & F & T & T & T \\ F & F & F & T & F & T \\ F & T & T & T & T & F \end{bmatrix}.$$

Предположите, что вес каждой дуги равен 1 и найдите следующие значения (если они существуют):

а) кратчайший путь от вершины 1 до вершины 2;

б) кратчайший путь от вершины 3 до вершины 6;

в) контур длиной 5.

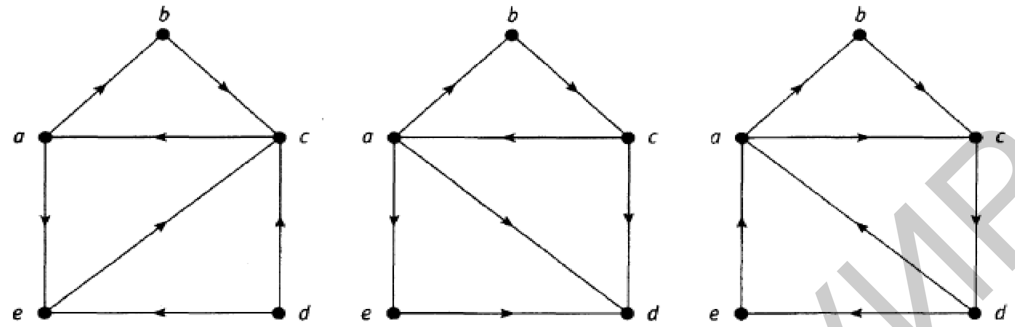
16. *Полустепенью исхода* вершины v орграфа G называется число дуг $\delta^+(v)$ орграфа, исходящих из v, а *полустепенью захода* этой вершины называют число дуг $\delta^-(v)$, заходящих в нее.

Объясните, почему обе суммы – полустепеней исхода и полустепеней захода всех вершин орграфа – совпадают с числом его дуг.

Что можно сказать о числе букв *T* в любой строке матрицы смежности орграфа? А как проинтерпретировать их число в любом столбце?

17. *Связным* называется такой орграф, из которого получается связный граф, если забыть про ориентацию дуг. С другой стороны, если для любой упорядоченной пары его вершин существует путь, ведущий из первой вершины во вторую, то такой орграф называют *сильно связным.*

а) Определите, какие из представленных связных орграфов являются сильно связными.



б) Объясните, как нужно ориентировать ребра гамильтонова графа (т. е. нарисовать на каждом ребре стрелку, превратив ее в дугу), чтобы из него получился сильно связный орграф.

в) Объясните важность требования: орграф, представляющий систему односторонних дорог в городе, должен быть сильно связным.

18. Примените алгоритм топологической сортировки к (ацикличному) орграфу со следующей матрицей смежности:

$$\omega = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} F & F & F & T & F & F \\ T & F & F & F & F & T \\ F & T & F & F & T & F \\ F & F & F & F & F & T \\ F & F & F & T & F & T \\ F & F & F & F & F & F \end{bmatrix} \end{array}.$$

Напишите новую матрицу смежности, строки и столбцы которой упорядочены в соответствии с новыми обозначениями вершин. Что можно сказать о новой матрице?

19. Матрица смежности орграфа G имеет вид

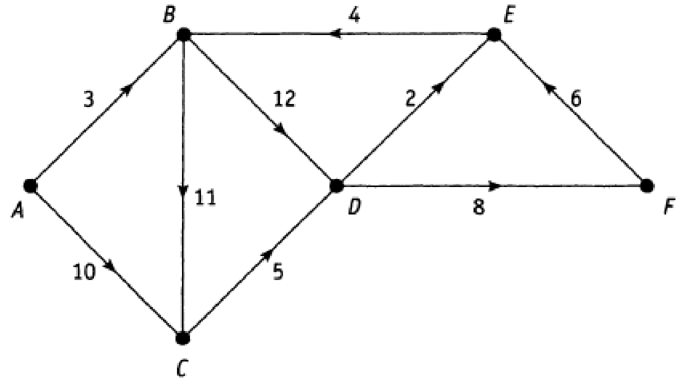
$$M = \begin{bmatrix} F & T & F & F \\ F & F & T & F \\ F & F & F & T \\ T & F & F & F \end{bmatrix}.$$

Вычислите M^2, M^3 и M^4. Найдите матрицу достижимости M^*.

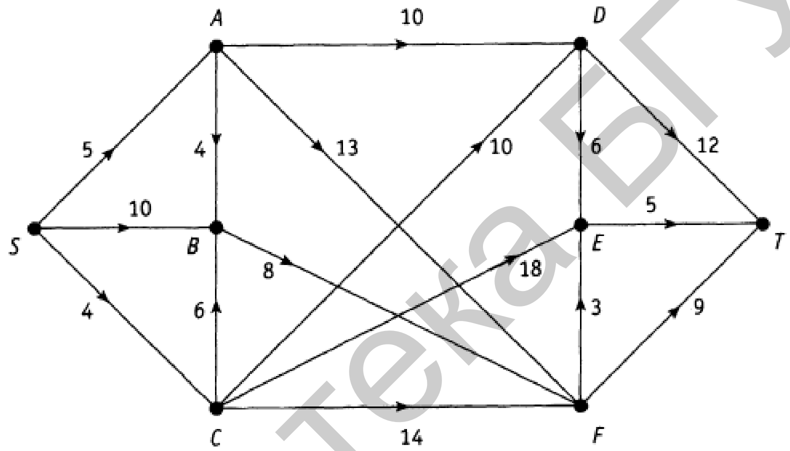
20. С помощью алгоритма Уоршелла вычислите W_1, W_2, W_3, и W_4 для орграфа G из предыдущего упражнения, после чего найдите матрицу достижимости M^*.

21. Проследите за работой алгоритма Дейкстры на примере изображенного ниже орграфа и найдите кратчайшие пути до каждой вершины:

а) от вершины A; *б*) от вершины C.



22. С помощью алгоритма Дейкстры найдите кратчайший путь от вершины S до всех остальных вершин в нагруженном графе:



Найдите два кратчайших пути от S до T.

Тема 6. ОСНОВЫ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ

6.1. Теоретическая часть

Булева переменная принимает только два значения: 0 и 1. Булевы переменные можно комбинировать, используя операции $\vee$ (*ИЛИ – логическое сложение*), $\wedge$ (*И – логическое умножение*) и **~** (*НЕ – отрицание*)* для создания **булевых выражений**.

Булевой функцией от n переменных $p_1, p_2, \ldots, p_n$ называется такая функция $f : B^n \to B$, что $f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ – булево выражение.

Булева функция называется **минтермом**, если столбец таблицы истинности, в котором записаны ее значения, содержит только одну единицу.

Законы булевой алгебры

Пусть p *и* q – булевы переменные, тогда имеют место следующие законы:

– *коммутативности*: $p \wedge q = q \wedge p$, $p \vee q = q \vee p$;

– *ассоциативности*: $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$, $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$;

– *дистрибутивности*: $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$;

– *идемпотентности*: $p \wedge p = p$, $p \vee p = p$;

– *поглощения*: $p \wedge (q \vee p) = p$, $p \vee (q \wedge p) = p$;

– *Де Моргана*: $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$, $\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$.

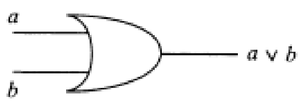
Любая булева функция может быть единственным образом записана как дизъюнкция минтермов. Такое представление функции называется **дизъюнктивной нормальной формой**.

Множество функций, через которые можно выразить любую булеву функцию, называется **полной системой функций**.

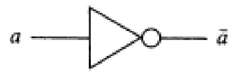
Булево выражение можно упростить, используя **карту Карно**: прямоугольную таблицу, чьи строки и столбцы обозначены конъюнкциями булевых переменных и их отрицаний. В клетках этой таблицы, соответствующих минтермам данной дизъюнктивной нормальной формы, помещаются единицы.

Двоичное устройство – это устройство, как правило, электронное, снабженное конечным числом двоичных входов и выходов.

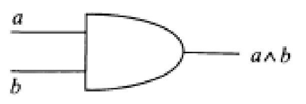
Функциональная схема строится из **функциональных элементов,** которые реализуют основные булевы операции:



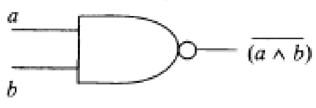
ИЛИ



НЕ



И



НЕ-И

* Вместо символа ~ можно использовать ¯, т. е. $\sim p = \overline{p}$, или $\sim(p \vee q) = \overline{(p \vee q)}$.

Функциональную схему можно упростить, применяя **карту Карно** для уменьшения сложности булева выражения, генерируемого схемой.

Полубитный сумматор

Пусть x и y обозначают двоичные цифры, которые предстоит сложить, а u и v – двоичные цифры суммы, получающейся на выходе сумматора, как показано на рисунке:

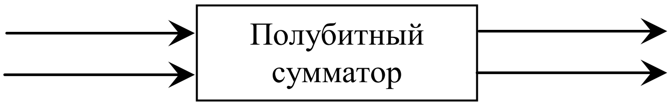


Таблица истинности проясняет связь между вводимыми и выводимыми цифрами. Следовательно, $u = xy$ (*разряд переноса*) и $v = {\sim}xy \vee x\,{\sim}y$ (*сложение по модулю* 2).

x	***y***	***u***	***v***
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

6.2. Решение практических задач

Пример 6.1. Докажите закон дистрибутивности: $p\wedge(q\vee r) = (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$.

Решение. Требуемые таблицы истинности приведены ниже. Поскольку два последних столбца таблицы полностью совпадают, булевы выражения $p\wedge(q\vee r) = (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ эквивалентны.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$q\vee r$	$p\wedge(q\vee r)$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Пример 6.2. Покажите, что выражение $\overline{(\overline{p}\wedge q)}\wedge(p\vee q)$ эквивалентно p.

Решение. Используя известные законы, последовательно выполним несложные преобразования:

$\overline{(\overline{p}\wedge q)}\wedge(p\vee q) = \left(\overline{(\overline{p})}\vee\overline{q}\right)\wedge(p\vee q) =$ (закон де Моргана)

$= (p\vee\overline{q})\wedge(p\vee q) =$ (т. к. $\overline{(\overline{p})} = p$)

$= p\vee(\overline{q}\wedge q) =$ (закон дистрибутивности)

$= p\vee 0 =$ (т. к. $\overline{q}\wedge q = 0$)

$= p$ (по определению $\vee$).

Булевой функцией от n булевых переменных $p_1, p_2, \ldots, p_n$ называется такая функция $f : B^n \to B$, что $f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ – булево выражение.

Наша ближайшая задача – показать, как булеву функцию можно записать в стандартном виде (он называется *дизъюнктивной нормальной формой*). Начнем с небольшого примера. Рассмотрим булеву функцию $m(p, q, r)$ от булевых переменных $p, q, r,$ чья таблица истинности дана ниже:

p	**q**	**r**	**f**
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Функция m – пример *минтерма,* т. е. булевой функции, которая принимает значение 1 только на одном наборе значений аргументов. Так как $m(p, q, r) = 1$, только если $p = 0$, $q = 1$ и $r = 1$, то $m(p, q, r) = {\sim}p \wedge q \wedge r$.

Выражение ${\sim}p \wedge q \wedge r$ называют *элементарной конъюнкцией.*

Пример 6.3. Объясните, каким образом любой минтерм можно записать в виде элементарной конъюнкции, т. е. как конъюнкцию переменных p_i или их отрицаний $m(p_1, p_2, \ldots, p_r)$.

Решение. Пусть $m(p_1, p_2, \ldots, p_r)$ – минтерм. Тогда в последнем столбце таблицы истинности функции m будет стоять только одна единица. Возьмем строку таблицы истинности, последний символ в которой равен 1. Если в этой строке переменная $p_i = 1$, то в элементарной конъюнкции, представляющей функцию m, участвует p_i, а если $p_i = 0$, то участвует ${\sim}p_i$.

Например, для минтерма из таблицы примера 6.2 такой является 4-я строка 0, 1, 1, 1. Это означает, что $m(0, 1, 1) = 1$. Поэтому $m(p, q, r) = {\sim} p \wedge q \wedge r$.

Теперь, используя элементарные конъюнкции, мы запишем произвольную булеву функцию как дизъюнкцию минтермов. Более того, можно доказать, что такая запись (она называется *дизъюнктивной нормальной формой*) для каждой функции определена единственным образом с точностью до перестановки элементарных конъюнкций.

Рассмотрим булеву функцию трех переменных $m(p, q, r)$, чья таблица истинности имеет следующий вид:

p	**q**	**r**	**f**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Единицы последнего столбца в этой таблице соответствуют трем минтермам: $\sim p \wedge \sim q \wedge r$, $\sim p \wedge q \wedge r$, $p \wedge \sim q \wedge \sim r$.

Поскольку дизъюнкция с 1 «поглощает» все 0 (иными словами, $f_1 \vee f_2 \vee \ldots, \vee f_8$ равно 1 тогда и только тогда, когда среди значений f_i найдется хотя бы одна 1), наша функция равна дизъюнкции трех минтермов:

$$f(p, q, r) = (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r).$$

Это и есть нормальная дизъюнктивная форма функции f. Очевидно, в той же форме можно записать произвольную булеву функцию с любым числом переменных.

Пример 6.4. Найдите дизъюнктивную нормальную форму булевой функции $f = (p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$.

Решение. Запишем таблицу истинности функции f (способ ее получения можно проследить в примере 6.1):

p	***q***	***r***	***f***
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Выпишем минтермы: $\sim p \wedge \sim q \wedge r$, $p \wedge \sim q \wedge r$, $p \wedge q \wedge \sim r$, $p \wedge q \wedge r$. Следовательно, искомая дизъюнктивная нормальная форма:

$$f(p, q, r) = (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge q \wedge r).$$

Мы убедились на опыте, что любую булеву функцию можно единственным образом представить в виде дизъюнкции минтермов. Значит, каждая булева функция может быть выражена через две функции от двух аргументов: $p \vee q$, $p \wedge q$ и одной функции одной переменной $\sim p$.

Множество функций, через которые можно выразить любую булеву функцию, называется ***полной системой функций***. Итак, $\{p \vee q, p \wedge q, \sim p\}$ – полная система функций. Однако можно ограничиться и меньшим количеством функций. Например, по закону де Моргана $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$. Следовательно, $\sim(\sim p \wedge \sim q) = p \vee q$.

Значит, любую булеву функцию можно записать только с помощью двух операций: $\wedge$, $\sim$, т. е. $\{p \wedge q, \sim p\}$ – тоже полная система функций. Расплатой за малое количество операций, посредством которых записывается функция, становится громоздкость формул.

Пример 6.5. Функция *НЕ-И* определяется формулой p *НЕ-И* $q = \sim(p \wedge q)$. Покажите, что { *НЕ-И* } является полной системой функций.

Решение. Для решения задачи достаточно показать, что каждая из функций, $p \vee q$, $p \wedge q$ может быть выражена через *НЕ-И*.

Ввиду закона идемпотентности $\sim p = \sim (p \wedge p)$ – p *НЕ-И* p.

По закону де Моргана $p \vee q = \sim(\sim p \wedge \sim q) = \sim ((p$ *НЕ-И* $p) \wedge (q$ *НЕ-И* $q)) =$
$= ((p$ *НЕ-И* $p)$ *НЕ-И* $(q$ *НЕ-И* $q))$.

Наконец, $p \wedge q = \sim(\sim (p \wedge q)) = \sim (p$ *НЕ-И* $q) = ((p$ *НЕ-И* $q)$ *НЕ-И* $(p$ *НЕ-И* $q))$.

Итак, { *НЕ-И* } – действительно полная система функций.

Пример 6.6. Упростите булево выражение (операция $\wedge$ как логическое умножение здесь опущена) $pqr \vee \sim p\sim q\sim r \vee \sim pqr \vee pq\sim r \vee \sim pq\sim r$.

Решение. Построенная карта Карно имеет следующий вид:

	pq	$\bar{p}q$	$\bar{p}\,\bar{q}$	$p\bar{q}$
r	1	1		
$\bar{r}$	1	1	1	

Из нее следует, что в данном выражении есть группа из четырех минтермов: $pqr \vee \sim pqr \vee pq\sim r \vee \sim pq\sim r$, которую мы обозначим (А), и группа из двух минтермов: $\sim p\sim q\sim r \vee \sim pq\sim r$ – обозначим ее (Б).

Сначала поработаем над группой (А):

$pqr \vee \sim pqr \vee pq\sim r \vee \sim pq\sim r = (p \vee \sim p)qr \vee (p \vee \sim p)q\sim r = qr \vee q\sim r = q(r \vee \sim r) = q$.

Теперь займемся группой (Б):

$\sim pq\sim r \vee \sim p\sim q\sim r = \sim p\sim r\ (q \vee \sim q) = \sim p\sim r$.

Таким образом, исходное выражение упрощается до $q \vee \sim p\sim r$.

Пример 6.7. Упростите булеву функцию $f(p, q, r) = (\sim(p \vee q) \wedge r) \vee \sim(q \vee r)$.

Решение. Заполним таблицу истинности функции f :

p	*q*	*r*	*f*
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

По таблице строим дизъюнктивную нормальную форму функции f:

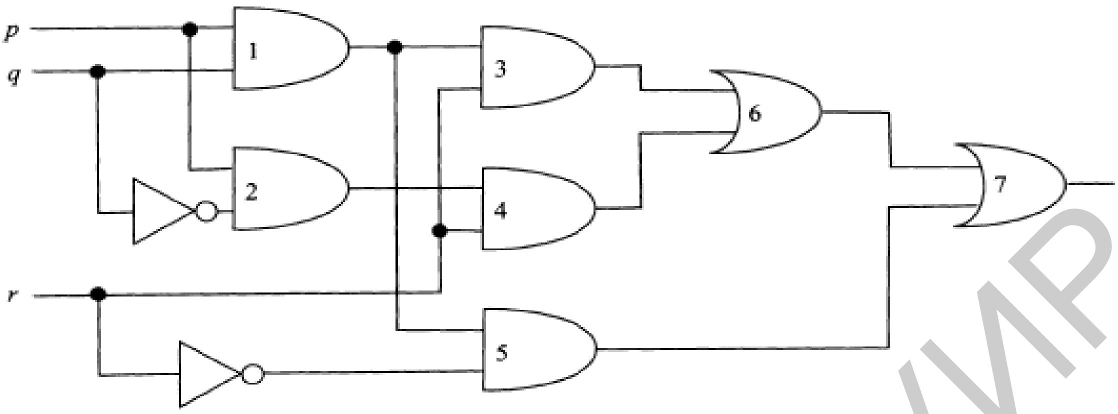
$$\sim p\sim qr \vee p\sim q\sim r \vee \sim p\sim q\sim r$$

	pq	$\bar{p}q$	$\bar{p}\,\bar{q}$	$p\bar{q}$
r			1	
$\bar{r}$			1	1

Из карты Карно видно, что в нашем выражении присутствуют две пары минтермов для 2 группировок: $\sim p\sim q\sim r \vee \sim p\sim qr$ и $p\sim q\sim r \vee \sim p\sim q\sim r$. После их упрощения получаются функции: $\sim p\sim q$ и $\sim q\sim r$. Следовательно, исходная функция сводится к выражению $\sim p\sim q \vee \sim q\sim r$.

Пример 6.8. Соединяя функциональные элементы, используя стандартные обозначения, мы получаем *функциональную схему*. С ее помощью можно реализовать любую булеву функцию.

Что получится на выходе представленной функциональной схемы?



Решение. Перечислим входы и соответствующие выходы для каждого функционального элемента в соответствии с нумерацией:

Вентиль	Вход	Выход
1	p, q	pq
2	$p, \overline{q}$	$p\overline{q}$
3	pq, r	pqr
4	$p\overline{q}, r$	$p\overline{q}r$
5	$pq, \overline{r}$	$pq\overline{r}$
6	$pqr, p\overline{q}r$	$pqr \vee p\overline{q}r$
7	$pqr \vee p\overline{q}r, pq\overline{r}$	$pqr \vee p\overline{q}r \vee pq\overline{r}$

На выходе схемы получится функция с номером 7.

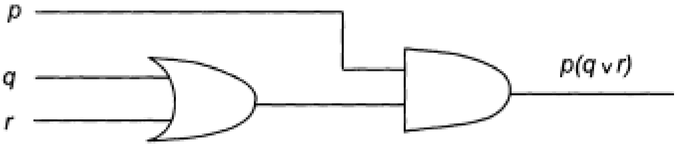
Пример 6.9. Упростите функцию, полученную в примере 6.8, и найдите более простую функциональную схему, ее реализующую.

Решение. Карта Карно требуемого выражения имеет следующий вид:

	pq	$\overline{p}q$	$\overline{p}\,\overline{q}$	$p\overline{q}$
r	1			1
$\overline{r}$	1			

В ней две пары минтермов для группировки (одна из них не видна при данном обозначении столбцов).

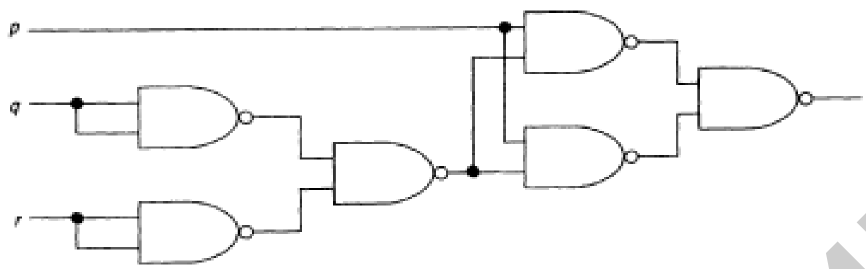
Это сводит функцию к выражению $pq \vee pr$, которое ввиду дистрибутивности редуцируется к функции $p\,(q \vee r)$. Более простая схема, реализующая функцию, имеет следующий вид:



Пример 6.10. Начертите функциональную схему, реализующую булеву функцию $p\,(q \vee r)$, используя только *НЕ-И*.

Решение. Заметим, что $p(q \vee r)$ = (p *НЕ-И* ($q \vee r$) *НЕ-И* (p *НЕ-И* ($q \vee r$)) и $q \vee r$ = (q *НЕ-И* q) *НЕ-И* (r *НЕ-И* r).

Искомая схема будет иметь следующий вид:



6.3. Индивидуальные задания

1. Заполняя подходящие таблицы истинности, докажите законы де Моргана.

2. Опираясь на законы булевой алгебры, проверьте соотношения:

а) $\overline{(p \wedge \overline{q})} \vee \overline{r} = \overline{p} \vee q \vee \overline{r}$;

б) $\overline{((p \wedge \overline{q}) \wedge (r \vee (p \wedge \overline{q})))} = \overline{p} \vee q$.

3. Найдите дизъюнктивную нормальную форму булевой функции четырех переменных, представленной в следующей таблице:

p	***q***	***r***	***s***	***f***
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

4. Заполните таблицу истинности и найдите дизъюнктивную нормальную форму булева выражения ($p\wedge$ (~$q\vee r$)) $\vee$ (~$p \wedge$ ($q \vee$ ~r)).

5. Запишите выражение ($p \wedge$ ~q) $\wedge r$, используя только:
а) операции $\vee$ и ~; *б*) функцию *НЕ-И*.

6. Булева функция *НЕ-ИЛИ* определяется по формуле p *НЕ-ИЛИ* q = ~($p \vee q$).
Покажите, что { *НЕ-ИЛИ* } является полной системой функций.

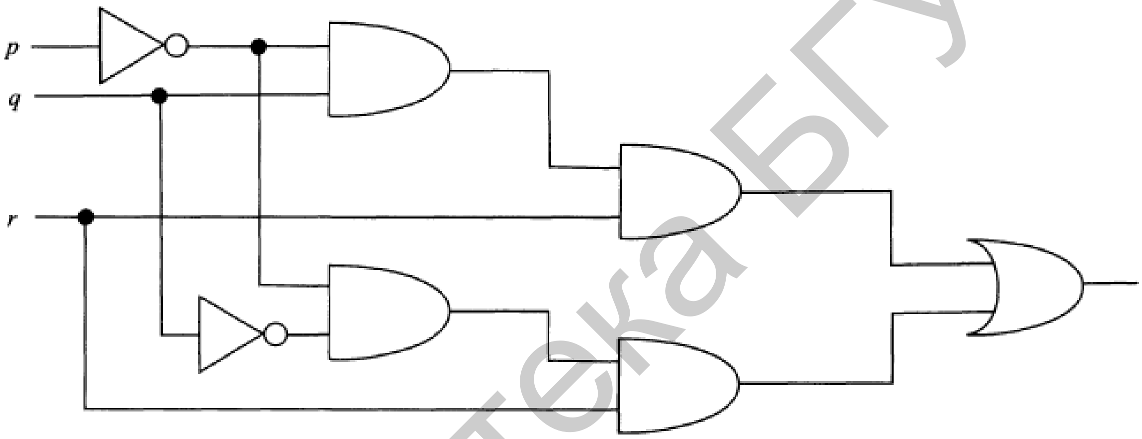
7. Изобразите карту Карно выражения с дизъюнктивной нормальной формой $\sim p{\sim}qr \vee {\sim}pqr \vee pq{\sim}r \vee pqr$ и найдите его упрощенную версию.

8. Найдите дизъюнктивную нормальную форму следующей функции f:

p	q	r	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Изобразите ее карту Карно и упростите функцию f.

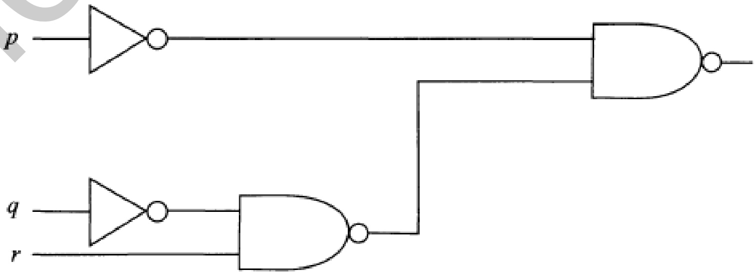
9. Вычислите булеву функцию, генерируемую представленной функциональной схемой:



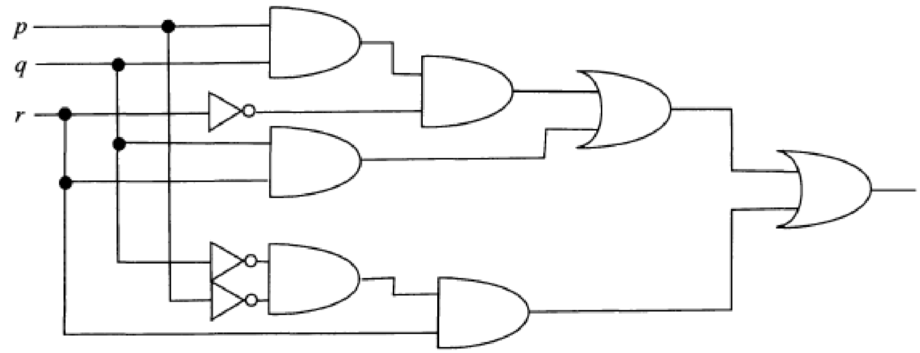
Используя карту Карно, найдите эквивалентную схему, состоящую из двух функциональных элементов: *И* и *НЕ*.

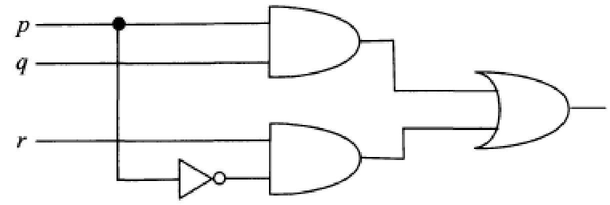
10. С помощью законов булевой алгебры проверьте, что выражение $\sim p$ *НЕ-И* ($\sim q$ *НЕ-И* r) эквивалентно выражению $p \vee (\sim q \wedge r)$.

Затем замените представленную ниже функциональную схему эквивалентной, но состоящей из двух элементов *И* и *ИЛИ* и одного инвертора.



11. Докажите эквивалентность изображенных функциональных схем.





12. Начертите функциональную схему выражения *p НЕ-ИЛИ q*, используя только функциональный элемент *НЕ-И*. (Начните с проверки соотношения *q НЕ-ИЛИ q* = ~(~*p НЕ-И* ~*q*), а затем убедитесь, что любая булева переменная *r* удовлетворяет тождеству ~*r* = *r НЕ-И r*).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерусалимский, Я. Н. Дискретная математика: теория, задачи, приложения / Я. Н. Ерусалимский. – М. : Вузовская наука, 2005.

2. Андерсон, Дж. А. Дискретная математика и комбинаторика / Дж. А. Андерсон; пер. с англ. – М. : Изд. дом «Вильямс», 2004.

3. Аляев, Ю. А. Дискретная математика и математическая логика / Ю. А. Аляев, С. Ф. Тюрин. – М. : Финансы и статистика, 2006.

4. Белоусов, А. И. Дискретная математика / А. И. Белоусов, С. Б. Ткачев. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.

5. Иванов, Б. Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы : учеб. пособие / Б. Н. Иванов. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2003.

6. Мощенский, А. В. Математические основы информатики / А. В. Мощенский, В. А. Мощенский. – Минск : БГУ, 2002.

7. Нефедов, В. Н. Курс дискретной математики / В. Н. Нефедов, В. А. Осипова. – М. : МАИ, 2002.

8. Новиков, Ф. А. Дискретная математика для программистов / Ф. А. Новиков.– 2-е изд. – СПб. : Питер, 2005.

9. Плотников, А. Д. Дискретная математика : учеб. пособие / А. Д. Плотников. – М. : Новое знание, 2005.

10. Хаггарти, Р. Дискретная математика для программистов / Р. Хаггарти; пер. с англ. – М. : Техносфера, 2003.

11. Шоломов, Л. А. Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств / Л. А. Шоломов. – М. : Наука, 2006.

Св. план 2015, поз. 28

Учебное издание

Матвеенко Владимир Владимирович
Кривоносова Татьяна Михайловна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *М. А. Зайцева*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная правка, оригинал-макет *Е. Д. Степусь*

Подписано в печать Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Times».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. Уч.-изд. л. 3,0. Тираж 100 экз. Заказ 272.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
ЛП №02330/264 от 14.04.2014.
220013, Минск, П. Бровки, 6