Проблемы физики, математики и техники, № 3 (28), 2016

ФИЗИКА

УДК 539.12

ИЗОТОПИЧЕСКИЙ ДУБЛЕТ ДИРАКОВСКИХ ЧАСТИЦ В ПРИСУТСТВИИ НЕАБЕЛЕВА МОНОПОЛЯ: ПРИБЛИЖЕНИЕ ПАУЛИ

Е.М. Овсиюк[1], **А.Н. Редько**[2], **В.В. Кисель**[3], **В.М. Редьков**[4]

[1]*Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина*
[2]*Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка, Минск*
[3]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск*
[4]*Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск*

ISOTOPIC DOUBLET OF THE DIRAC PARTICLES IN PRESENCE OF THE NON-ABELIAN MONOPOLE: THE PAULI APPROXIMATION

E.M. Ovsiyuk[1], **A.N. Red'ko**[2], **V.V. Kisel**[3], **V.M. Red'kov**[4]

[1]*I.P. Shamyakin Mosyr State Pedagogical University*
[2]*M. Tank Belarusian State Pedagogical University, Minsk*
[3]*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk*
[4]*B.I. Stepanov Institute of Physics National Academy of Sciences of Belarus, Minsk*

Построено нерелятивистское уравнение паулиевского типа для дублета дираковских частиц, учитывающее присутствие внешних неабелевых полей. Оно детализировано в случае монопольных потенциалов Богомольного – Прасада – Зоммерфельда. Выполнен анализ возможности существования связанных состояний в системе. Проведено сопоставление поведения дублета частиц в пространствах постоянной кривизны: Евклида, Лобачевского и Римана, откуда следует, что обычное использование в пространстве Минковского несингулярного монопольного решения является использованием решения, более естественно связанного с геометрией пространства Лобачевского. В такой трактовке во всех трех пространствах связанных состояний для дублета фермионов в полях неабелева монополя не возникает.

Ключевые слова: *дублет фермионов*, *неабелев монополь*, *приближение Паули*, *пространства постоянной кривизны*, *связанные состояния.*

For the doublet of Dirac particles in presence of external non-Abelian fields, a non-relativistic Pauli equation is constructed. It is detailed for the case of the Bogomolny – Prasad – Sommerfeld monopole potentials. The problem of existence of bound states in the system is studied. Comparison of the behavior of the Dirac particles doublet in three spaces of constant curvature: Euclid, Lobachevsky, and Riemann, is performed, from where it follows that the known nonsingular monopole solution usually used for the case of Minkowski space is the application of a mathematical possibility more naturally related to the Lobachevsky space model. Within that treatment, in all three space models, no bound states for the doublet of fermions in the non-Abelian monopole potential exist.

Keywords: *doublet of fermions*, *non-Abelian monopole*, *Pauli approximation*, *spaces of constant curvature*, *bound states.*

Введение

Как только неабелев монополь был введен (Хуфтом [1], Поляковым [2], Жулиа, Зи [3], Бэйс–Расел [4]) в научный обиход, его основные свойства были детально изучены. Есть два основных способа исследования монопольных проблем: основанный на геометрических и топологических методах и другой подход, базирующийся на исследовании физических проявлений монополей, когда они рассматриваются как внешние потенциалы [5]–[10]. В работе исследуется поведение изотопического дублета дираковских фермионов во внешнем неабелевом монопольном потенциале. Специальное внимание уделено проблеме нерелятивистского приближения в теории изотопических мультиплетов в неабелевых полях. В этом приближении анализ упрощается из-за уменьшения вдвое числа функций, связываемых дифференциальными уравнениями. Выведено уравнение паулиевского типа, учитывающее присутствие внешних неабелевых полей. Оно детализировано для монопольных потенциалов Богомольного – Прасада – Зоммерфельда [11], [12].

1 Уравнение Паули для дублета фермионов, общий анализ

Рассмотрим изотопический дублет дираковских фермионов во внешнем неабелевом поле Янга – Миллса [10]

$$\left[i\gamma^{\alpha}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha}(x) - iet^{a}W_{\alpha}^{a}(x) \right) - M \right]\Psi(x) = 0. \quad (1.1)$$

В классе пространств, допускающих нерелятивистское приближение [10], [13]

$$dS^2 = (dx^0)^2 + g_{ij}(x)dx^i dx^j,$$

уравнение (1.1) имеет вид

$$\left\{ \gamma^0 \left[i\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_t \right) - et^a W_0^a \right] + \right.$$

$$+\gamma^j(x)\left[i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+\Gamma_j\right)-et^aW_j^a\right]-M\Bigg\}\Psi(x)=0, \quad (1.2)$$

где обобщенные матрицы Дирака и связность задаются равенствами

$$\gamma^0(x)=\gamma^0,\ \gamma^j(x)=\gamma^k e^j_{(k)}(x),$$

$$\Gamma_t(x)=\Gamma_0(x)=\frac{1}{4}\gamma^k(x)\gamma_{k;0}(x),$$

$$\Gamma_j(x)=\frac{1}{4}\gamma^0\gamma_{0;j}(x)+\frac{1}{4}\gamma^k(x)\gamma_{k;j}(x).$$

Нерелятивистское приближение может быть выполнено в любом базисе матриц Дирака. Большая и малая составляющие задаются с помощью двух проекционных операторов:

$$\Psi_+=\frac{1+\gamma^0}{2}\Psi,\ \Psi_-=\frac{1+\gamma^0}{2}\Psi. \quad (1.3)$$

Действуя этими операторами (1.3) слева на уравнение (1.2), находим

$$\left[i\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Gamma_t\right)-e\,t^a\,W_t^a\right]\Psi_+ +$$
$$+\gamma^j(x)\left[i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}+\Gamma_j\right)-et^aW_j^a\right]\Psi_- -M\Psi_+(x)=0,$$
$$-\left[i\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Gamma_t\right)-et^aW_t^a\right]\Psi_- +$$
$$+\gamma^j(x)\left[i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+\Gamma_j\right)-et^aW_j^a\right]\Psi_+ -M\Psi_-(x)=0.$$

Выделяя энергию покоя подстановкой

$$\Psi_\pm(x)=\exp(-iMt)\Phi_\pm(x),$$

получим

$$\left[i\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Gamma_t\right)-et^aW_t^a\right]\Phi_+ +$$
$$+\gamma^j(x)\left[i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+\Gamma_j\right)-et^aW_j^a\right]\Phi_- =0, \quad (1.4)$$

$$-\left[i\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Gamma_t\right)-et^aW_t^a\right]\Phi_- +$$
$$+\gamma^j(x)\left[i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}+\Gamma_j\right)-et^aW_j^a\right]\Phi_+ - \quad (1.5)$$
$$-2M\Phi_-(x)=0.$$

Заменяя уравнение (1.5) на его приближение (при этом предполагаем $W_t^a=0$)

$$\Phi_-(x)=\frac{1}{2M}\gamma^j(x)\left[i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x^j}+\Gamma_j\right)-et^aW_j^a\right]\Phi_+,$$

после исключения малой компоненты из (1.4) получаем

$$\left[i\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Gamma_t\right)-et^aW_0^a\right]\Phi_+ =$$
$$=-\frac{1}{2M}\gamma^j(x)\left[i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}+\Gamma_j\right)-t^aW_j^a\right]\times$$
$$\times\gamma^l(x)\left[i\left(\frac{\partial}{\partial x^l}+\Gamma_l\right)-et^aW_l^a\right]\Phi_+. \quad (1.6)$$

Это общековариантное уравнение Паули для дублета дираковских фермионов во внешнем поле Янга – Миллса.

Волновая функция дублета подчиняется дополнительному условию $\gamma^0\Phi_+=\Phi_+$. Существование этого условия связано с тем, что паулиевская волновая функция для дираковской частицы содержит только две независимые компоненты (это в явном виде устанавливается при выборе матриц Дирака в стандартном базисе). Соответственно, волновая функция дублета в нерелятивистском приближении содержит только 4 независимые компоненты, а не 8.

2 Неабелев монополь в калибровке Швингера

В работе [13] известная подстановка для монопольного решения Хуфта – Полякова [1], [2], а также Жулиа, Зи [3] (для полноты включаем и взаимодействие с триплетом скалярных полей Хиггса) приводится в специальном базисе изотопического пространства к виду

$$W_\theta^{S.(a)}=\begin{vmatrix}0\\(r^2K+1/e)\\0\end{vmatrix},\ W_\phi^{S.(a)}=\begin{vmatrix}-(r^2K+1/e)\\0\\\frac{1}{e}\cos\theta\end{vmatrix},$$

$$W_r^{S.(a)}=\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}, W_t^{S.(a)}=\begin{vmatrix}0\\0\\rF(r)\end{vmatrix}, \Phi^{S.(a)}=\begin{vmatrix}0\\0\\r\Phi(r)\end{vmatrix}. \quad (2.1)$$

Заметим, что абелев потенциал в калибровке Швингера после преобразования к сферическим координатам принимает очень простой вид:

$$A_\phi^{S.}=g\cos\theta. \quad (2.2)$$

Примечательно, что в [4] было получено явное представление для вложенного в неабелеву модель абелева монопольного решения (2.2), и оно следует из (2.1) при специальном выборе функции *K*: $(r^2K+1/e)=0$.

3 Разделение переменных в релятивистском уравнении

В базисе сферической тетрады и в швингеровской унитарной калибровке монопольного потенциала уравнение для дублета (1.1) примет вид [13]

$$\Bigg[\gamma^0(i\partial_t+erF(r)t^3)+i\gamma^3\left(\partial_r+\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\Sigma^{S.}_{\theta,\phi}+$$
$$+\frac{er^2K(r)+1}{r}(\gamma^1\otimes t^2-\gamma^2\otimes t^1)-$$
$$-(M+\kappa r\Phi(r)t^3)\Bigg]\Psi^{S.}=0,$$

$$\Sigma^{S.}_{\theta,\phi} = i\gamma^1\partial_\theta + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi + (i\sigma^{12} + t^3)\cos\theta}{\sin\theta}, \quad (3.1)$$

где $t^j = (1/2)\sigma^j$. Специальный выбор базиса автоматически привел к необходимой перегруппировке слагаемых волнового уравнения. В частности, только пропорциональный $(er^2K(r)+1)$ член смешивает компоненты дублета, и он исчезает при использовании потенциала с $(r^2K + 1/e) = 0$.

В представлении (3.1) компоненты общего сохраняющегося момента определяются согласно

$$J^{S.}_1 = l_1 + \frac{(i\sigma^{12} + t^3)\cos\phi}{\sin\theta}, J^{S.}_2 = l_2 + \frac{(i\sigma^{12} + t^3)\sin\phi}{\sin\theta},$$

$$J^{S.}_3 = l_3,$$

в соответствии с этим подстановка для волновой функции $\Psi_{\varepsilon jm}(x)$ такая [13]:

$$\Psi_{\varepsilon jm}(x) = \frac{e^{-i\varepsilon t}}{r}\left[T_{+1/2} \otimes F(r,\theta,\phi) + T_{-1/2} \otimes G(r,\theta,\phi)\right],$$

$$T_{+1/2} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} f_1(r)D_{-1} \\ f_2(r)D_0 \\ f_3(r)D_{-1} \\ f_4(r)D_0 \end{vmatrix},$$

$$T_{-1/2} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad G = \begin{vmatrix} g_1(r)D_0 \\ g_2(r)D_{+1} \\ g_3(r)D_0 \\ g_4(r)D_{+1} \end{vmatrix}, \quad (3.2)$$

$D_\sigma \equiv D^j_{-m,\sigma}(\phi,\theta,0)$. Квантовое число j может принимать значения $j = 0,1,2,3,...$

Важным в исследовании электронмонопольной проблемы является случай $j = 0$, при этом волновая функция $\Psi_{\varepsilon 0}(x)$ строится так:

$$\Psi_{\varepsilon 0} = T_{+1/2} \otimes \begin{vmatrix} 0 \\ f_2(r) \\ 0 \\ f_4(r) \end{vmatrix} + T_{-1/2} \otimes \begin{vmatrix} g_1(r) \\ 0 \\ g_3(r) \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Здесь и ниже множитель $e^{-i\varepsilon t}/r$ опускаем. Используя рекуррентные соотношения для вигнеровских функций [14], находим

$$\Sigma^{S.}_{\theta,\phi}\Psi^{S.}_{jm} = i\nu\left[T_{+1/2} \otimes \begin{vmatrix} -f_4\ D_{-1} \\ +f_3\ D_0 \\ +f_2\ D_{-1} \\ -f_1\ D_0 \end{vmatrix} + T_{-1/2} \otimes \begin{vmatrix} -g_4\ D_0 \\ +g_3\ D_{+1} \\ +g_2\ D_0 \\ -g_1\ D_{+1} \end{vmatrix}\right].$$

Приведем выражение для члена, перемешивающего изотопические компоненты:

$$\frac{er^2K(r)+1}{r}(\gamma^1 \otimes t^2 - \gamma^2 \otimes t^1)\Psi_{jm} = i\frac{er^2K(r)+1}{r} \times$$

$$\times\left[T_{+1/2} \otimes \begin{vmatrix} 0 \\ +g_3D_0 \\ 0 \\ -g_1D_0 \end{vmatrix} + T_{-1/2} \otimes \begin{vmatrix} -f_4D_0 \\ 0 \\ +f_2D_0 \\ 0 \end{vmatrix}\right].$$

Для краткости дальше используем обозначения

$$W \equiv er^2K(r)+1, \quad \tilde{F} \equiv \frac{erF(r)}{2}, \quad \tilde{\Phi} \equiv \frac{\kappa r\Phi(r)}{2}.$$

После простых вычислений находим систему радиальных уравнений:

$$\left(-i\frac{d}{dr} + \varepsilon + \tilde{F}\right)f_3 - i\frac{\nu}{r}f_4 - (M + \tilde{\Phi})f_1 = 0,$$

$$\left(+i\frac{d}{dr} + \varepsilon + \tilde{F}\right)f_4 + i\frac{\nu}{r}f_3 + i\frac{W}{r}g_3 - (M + \tilde{\Phi})f_2 = 0,$$

$$\left(+i\frac{d}{dr} + \varepsilon + \tilde{F}\right)f_1 + i\frac{\nu}{r}f_2 - (M + \tilde{\Phi})f_3 = 0, \quad (3.3)$$

$$\left(-i\frac{d}{dr} + \varepsilon + \tilde{F}\right)f_2 - i\frac{\nu}{r}f_1 - i\frac{W}{r}g_1 - (M + \tilde{\Phi})f_4 = 0,$$

$$\left(-i\frac{d}{dr} + \varepsilon - \tilde{F}\right)g_3 - i\frac{\nu}{r}g_4 - i\frac{W}{r}f_4 - (M - \tilde{\Phi})g_1 = 0,$$

$$\left(+i\frac{d}{dr} + \varepsilon - \tilde{F}\right)g_4 + i\frac{\nu}{r}g_3 - (M - \tilde{\Phi})g_2 = 0,$$

$$\left(+i\frac{d}{dr} + \varepsilon - \tilde{F}\right)g_1 + i\frac{\nu}{r}g_2 + i\frac{W}{r}f_2 - (M - \tilde{\Phi})g_3 = 0,$$

$$\left(-i\frac{d}{dr} + \varepsilon - \tilde{F}\right)g_2 - i\frac{\nu}{r}g_1 - (M - \tilde{\Phi})g_4 = 0.$$

Для случая $j = 0$ (при этом $\Sigma_{\theta,\phi}\Psi_{\varepsilon 0} \equiv 0$) радиальные уравнения упрощаются:

$$\left(+i\frac{d}{dr} + \varepsilon + \tilde{F}\right)f_4 + i\frac{W}{r}g_3 - (M + \tilde{\Phi})f_2 = 0,$$

$$\left(-i\frac{d}{dr} + \varepsilon + \tilde{F}\right)f_2 - i\frac{W}{r}g_1 - (M + \tilde{\Phi})f_4 = 0, \quad (3.4)$$

$$\left(-i\frac{d}{dr} + \varepsilon - \tilde{F}\right)g_3 - i\frac{W}{r}f_4 - (M - \tilde{\Phi})g_1 = 0,$$

$$\left(+i\frac{d}{dr} + \varepsilon - \tilde{F}\right)g_1 + i\frac{W}{r}f_2 - (M - \tilde{\Phi})g_3 = 0.$$

Введем дополнительный диагонализирующийся оператор. Обычный оператор P-инверсии для биспинорного поля не может быть полностью пригоден для такой цели, а требуемый оператор может быть построен как комбинация из биспинорного P-отражения и некоторого дискретного преобразования в изотопическом пространстве. Действительно, учтем, что биспинорное P-отражение в базисе декартовой тетрады

$$\hat{P}^{Cart}_{bisp} \otimes \hat{P} = i\gamma^0 \otimes \hat{P},$$

где P-отражение пространственных координат будет определяться в сферическом базисе как

$$\hat{P}^{sph}_{bisp} \otimes \hat{P} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \otimes \hat{P} = -(\gamma^5\gamma^1) \otimes \hat{P}.$$

Этот оператор действует на волновую функцию $\Psi_{jm}(x)$ следующим образом:

$$(\hat{P}^{sph}_{bisp} \otimes \hat{P})\Psi_{\varepsilon jm}(x) =$$

$$=(-1)^{j+1}\left[T_{+1/2}\otimes\begin{vmatrix}f_4\ D_0\\ f_3\ D_{+1}\\ f_2\ D_0\\ f_1\ D_{+1}\end{vmatrix}+T_{-1/2}\otimes\begin{vmatrix}g_4\ D_{-1}\\ g_3\ D_0\\ g_2\ D_{-1}\\ g_1\ D_0\end{vmatrix}\right].$$

Т. е., оператор с требуемыми свойствами строится так:

$$\hat{N}^{S.}_{sph}\equiv\hat{\pi}^{S.}\otimes\hat{P}^{sph}_{bisp}\otimes\hat{P},$$

$$\hat{\pi}^{S.}T_{+1/2}=(a+ib)T_{-1/2},$$

$$\hat{\pi}^{S.}T_{-1/2}=(a+ib)T_{+1/2}.$$

Общий множитель при величине $\hat{\pi}^{S.}$ не существенен при разделении переменных, ниже будем полагать $(\hat{\pi}^{S.})^2=a^2+b^2=+1$. Из уравнения $\hat{N}^{S.}_{sph}\Psi_{jm}=N\Psi_{jm}$ находим два собственных значения $N=\delta(-1)^{j+1}$, $\delta=\pm 1$ и ограничения на функции:

$$g_1=\delta(a+ib)f_4,\ g_2=\delta(a+ib)f_3,$$

$$g_3=\delta(a+ib)f_2,\ g_4=\delta(a+ib)f_1. \qquad (3.5)$$

Учитывая (3.5), получаем уравнения, которые непротиворечивы только при условии, что $\tilde{F}(r)=0$ и $\tilde{\Phi}(r)=0$. Дальше ограничиваемся рассмотрением чисто монопольного внешнего потенциала и исключаем дополнительное взаимодействие дублета со скалярными полями Хиггса. При этом система уравнений (3.3) принимает более простой вид (вводим обозначение $\Delta=a+ib$)

$$\left(-i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_3-\frac{i\nu}{r}f_4-Mf_1=0,$$

$$\left(+i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_4+\frac{i\nu}{r}f_3+i\frac{W}{r}\delta\Delta f_2-Mf_2=0,$$

$$\left(+i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_1+\frac{i\nu}{r}f_2-Mf_3=0,$$

$$\left(-i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_2-\frac{i\nu}{r}f_1-i\frac{W}{r}\delta\Delta f_4-Mf_4=0,$$

$$\left(-i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_2-\frac{i\nu}{r}f_1-i\frac{W}{r}\Delta^{-1}\delta f_4-M-\tilde{\Phi})f_4=0,$$

$$\left(+i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_1+\frac{i\nu}{r}f_2-Mf_3=0,$$

$$\left(+i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_4+\frac{i\nu}{r}f_3+i\frac{W}{r}\Delta^{-1}\delta f_2-Mf_2=0,$$

$$\left(-i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_3-\frac{i\nu}{r}f_4-Mf_1=0. \qquad (3.6)$$

В системе (3.6) необходимо различать два случая в зависимости от выражения для $W(r)$. Если $W(r)=0$, различие между Δ и Δ^{-1} в уравнениях (3.6) не является значимым, поскольку соответствующие члены просто исчезают из уравнений. Для этого случая система (3.6) превращается в следующую

$$W(r)=0,$$

$$\left(-i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_3-\frac{i\nu}{r}f_4-Mf_1=0,$$

$$\left(+i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_4+\frac{i\nu}{r}f_3-Mf_2=0,$$

$$\left(+i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_1+\frac{i\nu}{r}f_2-Mf_3=0,$$

$$\left(-i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_2-\frac{i\nu}{r}f_1-Mf_4=0. \qquad (3.7)$$

Анализ радиальных уравнений может быть доведен до полного решения. Действительно, уравнения (3.7) допускают дальнейшие упрощения за счет диагонализации оператора $\hat{K}_{\theta,\phi}=-i\gamma^0\gamma^5\Sigma_{\theta,\phi}$. Из уравнения $\hat{K}_{\theta,\phi}\Psi_{jm}=\lambda\Psi_{jm}$ следует

$$\lambda=-\mu\sqrt{j(j+1)},\ (\mu=\pm 1),$$

$$f_4=\mu f_1,\ f_3=\mu f_2,\ g_4=\mu g_1,\ g_3=\mu g_2.$$

Соответственно система (3.7) приводит к

$$\left(+i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_1+i\frac{\nu}{r}f_2-\mu Mf_2=0,$$

$$\left(-i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_2-i\frac{\nu}{r}f_1-\mu Mf_1=0.$$

Эти уравнения решаются в функциях Бесселя. Волновая функция дублета с квантовыми числами $(\varepsilon,j,m,\delta,\mu)$ имеет вид

$$\Psi^{\Delta}_{\varepsilon jm\delta\mu}(x)=T_{+1/2}\otimes\begin{vmatrix}f_1\ D_{-1}\\ f_2\ D_0\\ \mu f_3\ D_{-1}\\ \mu f_4\ D_0\end{vmatrix}+\mu\delta\Delta T_{-1/2}\otimes\begin{vmatrix}f_4\ D_0\\ f_3\ D_{+1}\\ \mu f_2\ D_0\\ \mu f_1\ D_{+1}\end{vmatrix}.$$

Данная ситуация реализуется при $W\neq 0$. Здесь уравнения (3.6) совместимы, только если $\Delta=\Delta^{-1}$, следовательно, $\Delta=(a+ib)=\pm 1$. Комбинируя это соотношение с нормировочным условием $(a+ib)(a-ib)=1$, можно получить $a=\pm 1$ и $b=0$ (для определенности выберем параметр a равным +1). Соответствующий набор радиальных уравнений, полученный из (3.6), следующий:

$$\left(-i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_3-\frac{i\nu}{r}f_4-Mf_1=0,$$

$$\left(+i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_1+\frac{i\nu}{r}f_2-Mf_3=0,$$

$$\left(+i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_4+\frac{i\nu}{r}f_3+i\frac{W}{r}\delta f_2-Mf_2=0,$$

$$\left(-i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_2-\frac{i\nu}{r}f_1-i\frac{W}{r}\delta f_4-Mf_4=0. \quad (3.8)$$

Аналогичным образом может быть рассмотрен случай $j=0$, собственные значения и ограничения на волновую функцию:

$$N=-\delta,\ \delta=\pm 1,$$

$$g_1(r)=\delta\Delta f_4(r),\ g_3(r)=\delta\Delta f_2(r).$$

Величины $\tilde{F}$ и $\tilde{\Phi}$ должны быть приравнены нулю. Возникают две возможности:

$$W(r)=0,$$
$$\left(i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_4-Mf_2=0,$$
$$\left(-i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_2-Mf_4=0; \tag{3.9}$$

$$W(r)\neq 0,$$
$$\left(i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_4-\left(M-i\frac{\delta}{r}W\right)f_2=0,$$
$$\left(-i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_2-\left(M+i\frac{\delta}{r}W\right)f_4=0. \tag{3.10}$$

4 Нерелятивистское приближение: случай $j=0$

В системе уравнений (3.10) при $\delta=+1$:

$$\left(i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_4-\left(M-i\frac{W}{r}\right)f_2=0,$$
$$\left(-i\frac{d}{dr}+\varepsilon\right)f_2-\left(M+i\frac{W}{r}\right)f_4=0$$

сложим и вычтем уравнения друг из друга. В результате получим

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{W}{r}\right)f+(\varepsilon+M)g=0,$$
$$\left(\frac{d}{dr}-\frac{W}{r}\right)g-(\varepsilon-M)f=0,$$

где использованы обозначения

$$f_2(r)+f_4(r)=f(r),\ i[f_2(r)-f_4(r)]=g(r).$$

Выделим энергию покоя следующей формальной заменой $\varepsilon=M+E$; в результате получаем (в первом уравнении пренебрегаем нерелятивистской энергией в сравнении с энергией покоя)

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{W}{r}\right)f+2Mg=0,$$
$$\left(\frac{d}{dr}-\frac{W}{r}\right)g-Ef=0. \tag{4.1}$$

Исключаем из (4.1) функцию $g(r)$, получаем одномерное уравнение Шредингера

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+2ME+\left(\frac{W}{r}\right)-\frac{W^2}{r^2}\right]f(r)=0. \tag{4.2}$$

Воспользуемся известным в литературе монопольным решением Богомольного – Прасада – Зоммерфельда [11], [12]. В декартовой изотопической калибровке оно выглядит так:

$$W_i^a(x)=\varepsilon_{iab}x^bK(r),$$
$$W\equiv er^2K(r)+1,$$

где функция $W(r)$ задается шестью способами [13]:

$$W=\pm1,\ W=\pm\frac{Ar}{\mathrm{sh}Ar},\ W=\pm\frac{Ar}{\sin Ar}, \tag{4.3}$$

A – произвольная постоянная.

Рассмотрим сначала первые два случая из (4.3). Первый вариант:

$$W(r)=+1,\ \left(\frac{d^2}{dr^2}+2ME-\frac{2}{r^2}\right)f(r)=0 \tag{4.4}$$

приводит к задаче Шредингера с эффективным центробежным полем отталкивания от центра. В переменной $x=2\sqrt{-2ME}\,r$ решение уравнения (4.4) строятся в функциях Бесселя. Второй случай:

$$W(r)=-1,\ \left(\frac{d^2}{dr^2}+2ME\right)f(r)=0,$$
$$f=e^{\pm i\sqrt{2ME}\,r}. \tag{4.5}$$

Решение в (4.5) описывает бегущие сферические волны.

Теперь рассмотрим две возможности, наиболее часто исследуемые в литературе, как представляющие несингулярный монополь. Первая возможность:

$$W=+\frac{Ar}{\mathrm{sh}Ar},\ \left(\frac{d^2}{dr^2}+2ME-\frac{A^2}{\mathrm{ch}Ar-1}\right)f=0, \tag{4.6}$$

это уравнение Шредингера в эффективном поле отталкивания. Здесь не может быть связанных состояний. Рассмотрим уравнение (4.6) детальнее. Сделаем замену переменной:

$$x=\frac{\cosh Ar+1}{2},$$
$$r\to0\ (x\to1),\ r\to+\infty\ (x\to+\infty), \tag{4.7}$$
$$\left[x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{1}{2}-x\right)\frac{d}{dx}-\frac{2ME}{A^2}-\frac{1}{2(1-x)}\right]f(x)=0$$

и введем подстановку $f(x)=x^a(1-x)^bF(x)$ при $a=0,1/2,b=-1/2,\ 1$ уравнение (4.7) для $F(x)$ является уравнением гипергеометрического типа

$$\left[x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}+\left(2a+\frac{1}{2}-(2a+2b+1)x\right)\frac{d}{dx}-\right.$$
$$\left.-(a+b)^2-\frac{2ME}{A^2}\right]F(x)=0$$

с параметрами

$$\alpha=a+b+\frac{\sqrt{-2ME}}{A},\ \beta=a+b-\frac{\sqrt{-2mE}}{A},$$
$$\gamma=2a+\frac{1}{2}.$$

Чтобы иметь требуемое для связанных состояний поведение, нужно выбирать $a=0,\ b=+1/2;$ при этом $a+b$ не может быть отрицательным, следовательно $\alpha>0$. Это означает, что связанных состояний в системе не существует.

Вторая возможность:

$$W=-\frac{Ar}{\mathrm{sh}Ar},\ \left(\frac{d^2}{dr^2}+2ME+\frac{A^2}{\mathrm{ch}Ar+1}\right)f=0, \tag{4.8}$$

это уравнение Шредингера в эффективном поле притяжения (рисунок 4.1)

$$U=-\frac{A^2}{\mathrm{ch}Ar+1},\;\; F_r=-\frac{dU}{dr}=-A^3\,\frac{Ar}{(Ar+1)^2}.$$

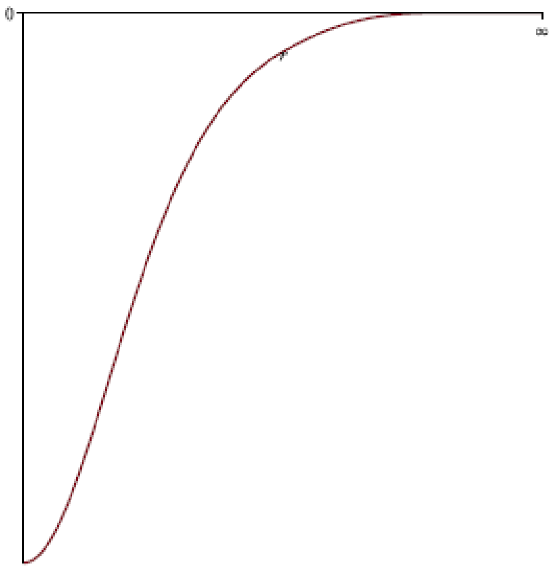

Рисунок 4.1 – Эффективное поле притяжения $U(r)$

Здесь, вообще говоря, могут существовать связанные состояния. В уравнении (4.8) сделаем замену переменной:

$$x=\frac{\cosh Ar+1}{2},\, r\to 0\;(x\to 1),\, r\to+\infty\;(x\to+\infty),$$

и введем подстановку $f(x)=x^a(1-x)^b F(x)$, $a=-\frac{1}{2}, 1, b=0,\;\frac{1}{2}$; уравнение для $F(x)$ является уравнением гипергеометрического типа с параметрами

$$\alpha=a+b+\frac{\sqrt{-2ME}}{A},\;\; \beta=a+b-\frac{\sqrt{-2ME}}{A},$$
$$\gamma=2a+\frac{1}{2}.$$

Имея в виду связанные состояния, будем строить решение, стремящееся к нулю на бесконечности. Для этих целей подходят два решения гипергеометрического уравнения:

$$U_3(x)=(-x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha+1-\gamma,\alpha+1-\beta;\frac{1}{x}\right),$$
$$U_3(\infty)\sim(-x)^{-\alpha},\;\;\alpha>0;$$
$$U_4(x)=(-x)^{-\beta}F\left(\beta+1-\gamma,\beta,\beta+1-\alpha;\frac{1}{x}\right),\qquad (4.9)$$
$$U_4(\infty)\sim(-x)^{-\beta},\;\;\beta>0.$$

С учетом тождеств

$$-\alpha=-a-b-\frac{\sqrt{-2ME}}{A},\;\; -\beta=-a-b+\frac{\sqrt{-2ME}}{A}$$

заключаем, что пригодно только решение U_3, при этом полная функция $f(x)$ на бесконечности обращается в ноль:

$$f(x\to+\infty)\sim x^a(-x)^bU_3(x\to+\infty)\sim x^{-\frac{\sqrt{-2ME}}{A}}.\qquad (4.10)$$

Найдем, как ведет себя это решение около точки $x=1\,(r=0)$. Для этого воспользуемся соотношением Куммера [15] (явный вид коэффициентов $K,\;L$ разложения не потребуется)

$$U_3(x)=KU_2(x)+LU_6(x),$$
$$U_2(x)=F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma;1-x),$$
$$U_6(x)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma+1-\alpha-\beta;1-x),$$
$$U_3(x\to 1)=K+L(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta},\;\;\gamma-\alpha-\beta=\frac{1}{2}-2b.$$

Таким образом,

$$f(x\to 1)\sim(1-x)^b[K+L(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}]\sim$$
$$\sim(1-x)^bK+(1-x)^{1/2-b}L.\qquad (4.11)$$

Из (4.11) следуют две возможности (обе они приводят к конечным значениям функции $f(r\to 0)$):

$$b=0,\;\; f(x\to 1)\sim K;\;\; b=\frac{1}{2},\;\; f(x\to 1)\sim L.$$

Обратимся к условию квантования. Применяя стандартное требование обращения гипергеометрического ряда в $U_3(x)$ в полином $\alpha=-n$, приходим (с учетом $a=-1/2,\,1,\; b=0,\; +1/2$) к единственной нетривиальной возможности удовлетворить этому условию

$$a=-\frac{1}{2},\;\; b=0,\;\; \frac{\sqrt{-2ME}}{|A|}=-n+\frac{1}{2},\;\; n=0,$$

т. е. существует единственное связанное состояние

$$\frac{\sqrt{-2ME}}{|A|}=\frac{1}{2},\;\; E=-\frac{A^2}{8M}.\qquad (4.12)$$

Легко убедиться прямой проверкой, что отвечающая уровню энергии (4.12) функция

$$f(x)=x^{-1/2}=\sqrt{\frac{2}{\cosh Ar+1}}$$

является решением уравнения (4.8) при найденном значении энергии (4.12). Эта функция квадратично интегрируема, нормировочный интеграл имеет вид

$$I=\int_0^\infty f^2(r)dr$$
$$=\frac{1}{A}\int_1^\infty\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x}}=\frac{1}{A}\frac{2}{x}\sqrt{x^2-x}\,\Bigg|_1^{+\infty}=\frac{2}{A}.$$

5 Нерелятивистское приближение: случай $j>0$

Теперь обратимся к системе уравнений при $j>0$ (см. (3.8)) при $\delta=+1$. В пределах каждой пары в (3.8) сложим и вычтем уравнения. С использованием обозначений

$$f_1+f_3=F,\;\; i(f_1-f_3)=f,$$
$$(f_2+f_4)=G,\;\; i(f_2-f_4)=g\qquad (5.1)$$

получаемые уравнения записываются так:

$$\frac{d}{dr}f+\varepsilon F+\frac{\nu}{r}g-MF=0,$$

$$-\frac{d}{dr}F+\varepsilon f-\frac{\nu}{r}G+Mf=0,$$

$$-\frac{d}{dr}g+\varepsilon G-\frac{\nu}{r}f+\frac{W}{r}g-MG=0,$$

$$-\frac{d}{dr}G-\varepsilon g-\frac{\nu}{r}F-\frac{W}{r}G-Mg=0.$$

Выделяем энергию покоя заменой $\varepsilon=E+M$ и затем пренебрегаем нерелятивистской энергией E в сравнении с удвоенной энергией покоя $2M$:

$$\frac{d}{dr}f+EF+\frac{\nu}{r}g=0,\ \frac{d}{dr}F+\frac{\nu}{r}G-2Mf=0,$$

$$-\frac{d}{dr}g+EG-\frac{\nu}{r}f+\frac{W}{r}g=0,$$

$$\frac{d}{dr}G+\frac{\nu}{r}F+\frac{W}{r}G+2Mg=0.$$

Исключая малые компоненты *f*, *g*, находим два зацепляющихся уравнения второго порядка:

$$\Delta F=\left(\frac{\nu}{r^2}+\frac{\nu W}{r^2}\right)G,$$

$$\Delta G=-\left(\frac{d}{dr}(\frac{W}{r})-\frac{W^2}{r^2}\right)G+\left(\frac{\nu}{r^2}+\frac{\nu W}{r^2}\right)F,\quad (5.2)$$

где $\Delta=\left(\frac{d^2}{dr^2}+2ME-\frac{\nu^2}{r^2}\right),\ \nu=\sqrt{j(j+1)}.$

Рассмотрим первый случай $W(r)=+1;$ в матричной форме имеем уравнение

$$\frac{1}{2}r^2\Delta\begin{vmatrix}F\\G\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\nu\\\nu&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}F\\G\end{vmatrix}.$$

Нужно найти преобразование, которое диагонализирует матрицу справа:

$$A=\begin{vmatrix}0&\nu\\\nu&1\end{vmatrix},\ S^{-1}AS=\begin{vmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{vmatrix}.$$

$$S^{-1}=\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2\nu}+\frac{\sqrt{1+4\nu^2}}{2\nu}\\1&\frac{1}{2\nu}-\frac{\sqrt{1+4\nu^2}}{2\nu}\end{vmatrix},$$

$$S=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+4\nu^2}}&\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{1+4\nu^2}}\\\frac{\nu}{\sqrt{1+4\nu^2}}&-\frac{\nu}{\sqrt{1+4\nu^2}}\end{vmatrix},$$

$$\lambda_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4\nu^2},\ \lambda_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4\nu^2}.$$

Учитывая $\sqrt{1+4\nu^2}=2j+1,$ находим выражения для λ_1,λ_2: $\lambda_1=-j,\ \lambda_2=j+1.$ Дальше получаем несвязанные уравнения:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+2ME+\frac{j(j+3)}{r^2}\right)F'=0,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+2ME+\frac{(j-2)(j+1)}{r^2}\right)G'=0.$$

Они решаются в функциях Бесселя, приводя к бегущим сферическим волнам.

Во втором случае $W(r)=-1$ с самого начала из (5.2) получаем несвязанные уравнения:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+2ME+\frac{j(j+1)}{r^2}\right)F=0,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+2ME+\frac{j(j+1)-1}{r^2}\right)G=0.$$

Эти уравнения также решаются в функциях Бесселя, и не имеют решений, отвечающих связанным состояниям.

Для случаев

$$W=\pm\frac{Ar}{\sinh Ar},\ W=\pm\frac{Ar}{\sin Ar}$$

система зацепляющихся уравнений второго порядка (5.2) оказывается слишком сложной. Здесь метод приведения задачи к несвязанным уравнениям второго порядка реализовать не удается, и конечная задача сводится к анализу уравнений 4-го порядка. Эти уравнения едва ли можно решить аналитически из-за одновременного присутствия в уравнениях рациональных и трансцендентных функций от переменной *r*.

6 Дублет дираковских частиц в пространствах постоянной кривизны

Обобщим приведенный выше анализ, сопоставив поведение дублета частиц в трех пространствах постоянной кривизны: Евклида E_3, Лобачевского H_3 и Римана S_3. Это даст возможность сформулировать дополнительные аргументы относительно того, какие решения уравнений Янга – Миллса представляют физический и теоретический интерес. Для определенности будем приводить формулы для случая сферического пространства S_3, переход к пространству Лобачевского достигается посредством формальных замен.

В сферической системе координат метрика пространства S_3 определяется так:

$$dS^2=dt^2-dr^2-\sin^2 r(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2).\quad (6.1)$$

Уравнение Дирака для дублета частиц принимает следующий вид

$$\Bigg[\gamma^0\left(i\partial_t+erF(r)t^3\right)+i\gamma^3\left(\partial_r+\frac{1}{\mathrm{tg}r}\right)+\frac{1}{\sin r}\Sigma^{S.}_{\theta,\phi}+$$
$$+\frac{er^2K+1}{\sin r}(\gamma^1\otimes t^2-\gamma^2\otimes t^1)-$$
$$-(M+\kappa r\Phi(r)t^3)\Bigg]\Psi^{S.}=0.\quad (6.2)$$

После необходимых вычислений (они несущественно отличаются от сделанных при анализе случая плоского пространства) получаем систему радиальных уравнений, которую можно значительно упростить, если потребовать диагонализации дискретного оператора, действующего одновременно в биспинорном и изотопическом пространствах. Приводим конечный результат при нетривиальном неабелевом потенциале:

$$W(r) \neq 0, \; j = 0,$$

$$\left(i\frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 - \left(M - i\delta\frac{W}{\sin r}\right) f_2 = 0,$$

$$\left(-i\frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \left(M + i\delta\frac{W}{\sin r}\right) f_4 = 0; \qquad (6.3)$$

при $W(r) \neq 0, \; j \neq 0,$

$$\left(-i\frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_3 - \frac{i\nu}{\sin r} f_4 - Mf_1 = 0,$$

$$\left(+i\frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 + \frac{i\nu}{\sin r} f_3 + i\frac{W}{\sin r}\delta f_2 - Mf_2 = 0,$$

$$\left(+i\frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_1 + \frac{i\nu}{\sin r} f_2 - Mf_3 = 0,$$

$$\left(-i\frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \frac{i\nu}{\sin r} f_1 - i\frac{W}{\sin r}\delta f_4 - Mf_4 = 0. \quad (6.4)$$

Имея системы радиальных уравнений для случая сферического пространства S_3 (6.3) и (6.4), легко написать аналогичные системы радиальных уравнений в пространствах E_3 и H_3; для этого достаточно формально заменить $\sin r \Rightarrow r$, $\sin r \Rightarrow \sinh r$ соответственно.

Напомним явный вид радиальной функции $W(r)/\sin r$, найденной во всех трех моделях пространства [13]:

$$S_3, \; \frac{W}{\sin r} = \varphi(r), \; r \in [0, \pi],$$

$$H_3, \; \frac{W}{\sinh r} = \varphi(r), \; r \in [0, +\infty),$$

$$E_3, \; \frac{W}{r} = \varphi(r), \; r \in [0, +\infty). \qquad (6.5)$$

Имеем шесть возможностей для выбора явного вида функции $\varphi(r)$:

$$\varphi(r) = \pm\frac{a}{\sin ar}, \; \pm\frac{a}{\sinh ar}, \; \pm\frac{a}{ar};$$

различающиеся знаком решения будем различать с помощью множителя $\mu = \pm 1$.

Если обратиться к явному виду уравнений при $j \neq 0$, то легко заметить, что среди трех пар решений, возникающих при анализе уравнений Янга–Миллса в пространствах постоянной кривизны E_3, H_3, S_3 для монопольной подстановки, для каждого пространства имеется только одна пара решений, которая выделена своей очевидной связью с выбранной геометрией пространства. Ситуация может быть охарактеризована следующим образом

$$\begin{array}{cccc} & E_3 & H_3 & S_3 \\ ar & * & - & - \\ \sinh ar & - & * & - \\ \sin ar & - & - & * \end{array}.$$

В этой связи следует специально отметить, что известное несингулярное монопольное решение в пределе Богомольного – Прасада – Зоммерфельда в пространстве Минковского является в определенном смысле искусственной комбинацией геометрии плоского пространства с возможностью, ассоциированной с геометрией пространства Лобачевского.

В трех моделях геометрии для нулевого значения квантового числа j имеем уравнения:

$$E_3, \; \left(i\frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 - \left(M - \delta\mu\frac{i}{r}\right) f_2 = 0,$$

$$\left(-i\frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \left(M + \delta\mu\frac{i}{r}\right) f_4 = 0; \qquad (6.6)$$

$$S_3, \; \left(i\frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 - \left(M - \delta\mu\frac{i}{\sin r}\right) f_2 = 0,$$

$$\left(-i\frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \left(M + \delta\mu\frac{i}{\sin r}\right) f_4 = 0; \qquad (6.7)$$

$$H_3, \; \left(i\frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 - \left(M - \delta\mu\frac{i}{\sinh r}\right) f_2 = 0,$$

$$\left(-i\frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \left(M + \delta\mu\frac{i}{\sinh r}\right) f_4 = 0. \qquad (6.8)$$

Для простоты ограничимся подробным изложением только случая $j = 0$.

В системах (6.6)–(6.8) сложим и вычтем уравнения друг из друга. В результате соответственно получим:

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\delta\mu}{r}\right) f + (\varepsilon + M) g = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{\delta\mu}{r}\right) g - (\varepsilon - M) f = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\delta\mu}{\sin r}\right) f + (\varepsilon + M) g = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{\delta\mu}{\sin r}\right) g - (\varepsilon - M) f = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\delta\mu}{\sinh r}\right) f + (\varepsilon + M) g = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{\delta\mu}{\sinh r}\right) g - (\varepsilon - M) f = 0,$$

где использованы обозначения

$$f_2(r) + f_4(r) = f(r),$$

$$i[f_2(r) - f_4(r)] = g(r).$$

Выделим энергию покоя следующей формальной заменой $\varepsilon = M + E$; пренебрегаем нерелятивистской энергией в сравнении с энергией покоя

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\delta\mu}{r}\right) f + 2Mg = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{\delta\mu}{r}\right) g - Ef = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\delta\mu}{\sin r}\right) f + 2Mg = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dr}-\frac{\delta\mu}{\sin r}\right)g-Ef=0, \qquad (6.9)$$

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{\delta\mu}{\sinh r}\right)f+2Mg=0,$$

$$\left(\frac{d}{dr}-\frac{\delta\mu}{\sinh r}\right)g-Ef=0.$$

Исключаем из (6.9) функции $g(r)$, получаем нерелятивистские уравнения:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\delta\mu}{r^2}-\frac{1}{r^2}+2ME\right)f=0,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\delta\mu\cos r}{\sin^2 r}-\frac{1}{\sin^2 r}+2ME\right)f=0, \quad (6.10)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\delta\mu\cosh r}{\sinh^2 r}-\frac{1}{\sinh^2 r}+2ME\right)f=0.$$

Все три уравнения (6.10) решаются в гипергеометрических функциях, при этом не возникает решений, отвечающих связанным состояниям. Исключением является случай сферического пространства, где дискретность уровней энергии возникает из-за топологии самого пространства [16].

Приведем конечные результаты анализа нерелятивистского приближения при больших значениях $j>0$.

В сферическом пространстве нерелятивистские уравнения выглядят так:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+2ME-\frac{\nu^2}{\sin^2 r}\right)F=\frac{\cos r+\delta\mu}{\sin^2 r}\left(0\cdot G+\nu G\right),$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+2ME-\frac{\nu^2}{\sin^2 r}\right)G= \qquad (6.11)$$

$$=\frac{\cos r+\delta\mu}{\sin^2 r}\left(\nu F+\delta\mu G\right).$$

Система переписывается в матричной форме

$$\Delta\begin{vmatrix}F\\G\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & \nu\\ \nu & \delta\mu\end{vmatrix}\begin{vmatrix}F\\G\end{vmatrix},$$

$$\Delta=\left(\frac{\cos r+\delta\mu}{\sin^2 r}\right)^{-1}\left(\frac{d^2}{dr^2}+2ME-\frac{\nu^2}{\sin^2 r}\right). \qquad (6.12)$$

Аналог этой системы в пространстве Лобачевского будет выглядеть так:

$$\Delta\begin{vmatrix}F\\G\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & \nu\\ \nu & \delta\mu\end{vmatrix}\begin{vmatrix}F\\G\end{vmatrix},$$

$$\Delta=\left(\frac{\cosh r+\delta\mu}{\sinh^2 r}\right)^{-1}\left(\frac{d^2}{dr^2}+2ME-\frac{\nu^2}{\sinh^2 r}\right). \qquad (6.13)$$

В обеих системах (6.11) и (6.12) матрицы справа диагонализируются с помощью линейных преобразований; в результате возникают два несвязанных уравнения. В случае сферического пространства Римана эти уравнения приводят к дискретным значениям энергии из-за компактности пространства [16]. В пространстве Лобачевского возникающие дифференциальные уравнения не содержат решений, отвечающих связанным состояниям.

Заключение

Построено нерелятивистское уравнение паулиевского типа для дублета дираковских частиц, учитывающее присутствие внешних неабелевых полей. Оно детализировано в случае неабелевых монопольных потенциалов: вложенного в неабелеву модель потенциала дираковского монополя и потенциалов Богомольного – Прасада – Зоммерфельда. С применением аппарата функций Вигнера проведено разделение переменных. В случае минимального значения полного момента $j=0$ уравнение Паули сводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка, которое решается точно, возникающие эффективные потенциалы допускают существование одного единственного связанного состояния. В случае $j>0$ в нерелятивистском приближении задача сводится к зацепляющейся системе двух уравнений; при специальном виде неабелева потенциала в приближении Богомольного – Прасада – Зоммерфельда эти уравнения удается разделить и также решить уравнения, построив бегущие сферические волны.

Проведено сопоставление поведения дублета дираковских частиц в трех пространствах постоянной кривизны: Евклида E_3, Лобачевского H_3 и Римана S_3. Это дает возможность сформулировать дополнительные аргументы относительно того, какие решения уравнений Янга – Миллса представляют физический и теоретический интерес. В частности, известное несингулярное монопольное решение в пределе Богомольного – Прасада – Зоммерфельда в пространстве Минковского является в определенном смысле искусственной комбинацией геометрии плоского пространства с возможностью, ассоциированной с геометрией пространства Лобачевского. Это позволяет высказать точку зрения, что отношение к физическому статусу данного монопольного решения, возможно, следует пересмотреть. Показано, что в такой трактовке во всех трех пространствах связанных состояний для дублета фермионов в полях неабелева монополя не возникает.

ЛИТЕРАТУРА

1. *'t Hooft*, *G.* Monopoles in unified gauge theories / G. 't Hooft // Nucl. Phys. B. – 1974. – Vol. 79, № 2. – P. 276–284.

2. *Поляков*, *А.М.* Спектр частиц в квантовой теории поля / А.М. Поляков // Письма в ЖЭТФ. – 1974. – Т. 20, вып. 6. – С. 430–433.

3. *Julia*, *B.* Poles with both magnetic and electric charges in non-Abelian gauge theory / B. Julia,

A. Zee // Phys. Rev. D. – 1975. – Vol. 11, № 8. – P. 2227–2232.

4. *Bais*, *F.A.* Magnetic-monopole solution of non-Abelian gauge theory in curved space-time / F.A. Bais, R.J. Russel // Phys. Rev. D. – 1975. – Vol. 11, № 10. – P. 2692–2695.

5. *Swank*, *J.H.* Fermions in Yang – Mills potentials / J.H. Swank, L.J. Swank, Tekin Dereli // Phys. Rev. D. – 1975. – Vol. 12, № 4. – P. 1096–1102.

6. *Jackiw*, *R.* Solitons with fermion number 1/2 / R. Jackiw, C. Rebbi // Phys. Rev. D. – 1976. – Vol. 13, № 12. – P. 3398–3409.

7. *Jackiw*, *R.* Spin from isospin in a gauge theory / R. Jackiw, C. Rebbi // Phys. Rev. Lett. – 1976. – Vol. 36, № 19. – P. 1116–1119.

8. *Hasenfratz*, *P.* Fermion-boson puzzle in a gauge theory / P. Hasenfratz, G. 't Hooft // Phys. Rev. Lett. – 1976. – Vol. 36, № 19. – P. 1119–1122.

9. *Прохватилов*, *Е.В.* Фермионы в поле монополя Хуфта – Полякова / Е.В. Прохватилов, В.А. Франке // Ядер. физика. – 1976. – Т. 24, вып. 4. – С. 856–860.

10. *Редьков*, *В.М.* Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 486 с.

11. *Prasad*, *M.K.* Exact classical solution of the 't Hooft monopole and Julia – Zee dyon / M.K. Prasad, C.M. Sommerfield // Phys. Rev. Lett. – 1975. – Vol. 35, № 12. – P. 760–762.

12. *Богомольный*, *Е.Б.* Стабильность классических решений / Е.Б. Богомольный // Ядер. физика. – 1976. – Т. 24. – С. 861–870.

13. *Редьков*, *В.М.* Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2011. – 339 с.

14. *Варшалович*, *Д.А.* Квантовая теория углового момента / Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. – Л.: Наука, 1975. – 439 с.

15. *Бейтмен*, *Г.* Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдеи. – М.: Наука, 1973. – Т. 1: Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. – 294 с.

16. *Red'kov*, *V.M.* Quantum mechanics in spaces of constant curvature / V.M. Red'kov, E.M. Ovsiyuk. – New York: Nova Science Publishers, Inc., 2012. – 434 p.

Поступила в редакцию 22.03.16.