УДК 539.12

Е.М. Овсиюк[1], О.В. Веко[2], Я.А. Войнова[3], В.В. Кисель[4], В.М. Редьков[5]

[1]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. общей физики и методики преподавания физики Мозырского государственного университета имени И.П. Шамякина

[2]учитель физики гимназии г. Калинковичи

[3]учитель физики Качищанской средней школы Ельского района

[4]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники

[5]д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник лаборатории теоретической физики Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ ½ С АНОМАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Уравнение Дирака для частицы со спином ½ и аномальным магнитным моментом исследовано в присутствии внешнего однородного электрического поля. Построены точные решения этого уравнения, выполнено сравнение со случаем нулевого магнитного момента. Рассмотрен специальный случай частицы с нулевым электрическим зарядом и ненулевым магнитным моментом (в этой роли может выступать, например, нейтрон); при этом решения уравнения Дирака строятся в виде «плоских» волн, однако с модифицированным соотношением связи между энергией и импульсом частицы $\varepsilon^2 = m^2 + p_3^2 + (p_1^2 + p_2^2 \pm \Gamma)^2$*, электрическое поле ориентировано вдоль оси* x_3*;* $\Gamma \neq 0$ *соответствует ненулевому магнитному моменту частицы.*

В [1–3] в рамках теории релятивистских волновых уравнений первого порядка в присутствии внешних электромагнитного и гравитационного полей была исследована 20-компонентная теория Петраша [4] для частицы со спином ½ и аномальным магнитным моментом. В частности, было показано, что после исключения дополнительного вектор-биспинора волновое уравнение для основного биспинора $\Psi(x)$ сводится к общековариантному уравнению Дирака, содержащему, помимо минимального и паулиевского членов взаимодействий, дополнительное взаимодействие частицы со спином ½ с внешним гравитационным полем, осуществляемое через скалярную кривизну $R(x)$.

В настоящей работе это обобщенное уравнение Дирака для частицы со спином ½ с аномальным магнитным моментом исследуется в плоском пространстве Минковского в присутствии внешнего однородного электрического поля. Будут построены точные решения этого уравнения, выполнено сравнение со случаем нулевого магнитного момента. Кроме того, будет рассмотрен специальный случай частицы с нулевым электрическим зарядом и ненулевым магнитным моментом (в роли такой частицы может выступать, например, нейтрон); при этом решения уравнения Дирака строятся в виде «плоских» волн, однако с модифицированным соотношением связи между энергией и импульсом частицы $\varepsilon^2 = m^2 + p_3^2 + (p_1^2 + p_2^2 \pm \Gamma)^2$, предполагается ориентация электрического поля вдоль оси x_3; $\Gamma \neq 0$ соответствует ненулевому магнитному моменту электрона.

Исходное уравнение имеет вид (используем обозначения из работ [1–3]):

$$\left\{\gamma^b \left(i\partial_b + \frac{e}{\hbar c} A_b\right) - i\lambda \frac{2e}{Mc^2} \sigma^{ab} F_{ab} - \frac{Mc}{\hbar}\right\} \Psi = 0 . \qquad (1)$$

Пусть действует внешнее однородное электрическое поле:

$$A_0 = -E_0 z, \quad F_{03} = E, \quad \sigma^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \gamma^0 \gamma^3 E_0 . \qquad (2)$$

Введем сокращения в обозначениях:

$$\frac{e}{c\hbar} \Rightarrow e, \quad \frac{Mc}{\hbar} \Rightarrow M\,, \quad \Gamma = \lambda \frac{2eE_0}{Mc^2}, \quad eE_0 = E\,;$$

тогда уравнение представляется так:

$$\left\{ \gamma^0 (i\frac{\partial}{\partial t} - Ez) + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} + i\gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - i\Gamma\gamma^0\gamma^3 - M \right\} \Psi = 0\,. \tag{3}$$

Используя подстановку

$$\Psi = e^{-i\varepsilon t} e^{ik_1 x} e^{ik_2 y} \begin{vmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ f_3(z) \\ f_4(z) \end{vmatrix}, \quad k_1 = a\,, k_2 = b\,, \tag{4}$$

с учетом явного вида матриц Дирака в спинорном базисе, находим систему уравнений (представим эти уравнения в виде двух подсистем):

$$(a-ib)\,f_2 - (i\Gamma - M)\,f_3 = D_- f_1\,, \quad -(i\Gamma - M)\,f_2 - (a+ib)\,f_3 = D_- f_4\,; \tag{5}$$

$$-(a+ib)\,f_1 - (i\Gamma + M)\,f_4 = D_+ f_2\,, \quad -(i\Gamma + M)\,f_1 + \left(a-ib\right) f_4 = D_+ f_3\,, \tag{6}$$

где использованы обозначения $D_+ = i\dfrac{d}{dz} + Ez - \varepsilon\,, \quad D_- = i\dfrac{d}{dz} - Ez + \varepsilon\,.$

Дальше получаем

$$f_2 = \frac{(i\Gamma - M)\,D_- f_4 - \left(a+ib\right) D_- f_1}{\left(\Gamma + iM\right)^2 - a^2 - b^2}, \quad f_3 = \frac{(i\Gamma - M)\,D_- f_1 + \left(a-ib\right) D_- f_4}{\left(\Gamma + iM\right)^2 - a^2 - b^2}; \tag{7}$$

$$f_1 = \frac{(i\Gamma + M)\,D_+ f_3 + \left(a-ib\right) D_+ f_2}{\left(\Gamma - iM\right)^2 - a^2 - b^2}, \quad f_4 = \frac{(i\Gamma + M)\,D_+ f_2 - \left(a+ib\right) D_+ f_3}{\left(\Gamma - iM\right)^2 - a^2 - b^2}. \tag{8}$$

Подставим выражения (7) в уравнения (6):

$$\frac{D_+ D_-}{\left(\Gamma + iM\right)^2 - a^2 - b^2}\left[-\left(a+ib\right) f_1 + (i\Gamma - M)\,f_4\right] = -(a+ib)f_1 - (i\Gamma + M)\,f_4\,,$$

$$\frac{D_+ D_-}{\left(\Gamma + iM\right)^2 - a^2 - b^2}\left[(i\Gamma - M)\,f_1 + \left(a-ib\right) f_4\right] = -(i\Gamma + M)\,f_1 + \left(a-ib\right) f_4\,. \tag{9}$$

Вводим новые функции:

$$-\left(a+ib\right) f_1 + (i\Gamma - M)\,f_4 = F_1\,, \quad (i\Gamma - M)\,f_1 + \left(a-ib\right) f_4 = F_4\,; \tag{10}$$

$$f_1 = \frac{(a-ib)F_1 - (i\Gamma - M)F_4}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2}, \quad f_4 = -\frac{(i\Gamma - M)F_1 + (a+ib)F_4}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2}. \tag{11}$$

Затем уравнения (9) представляем так:

$$D_+ D_-\, F_1 = -(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2)\,F_1 + 2\,i\Gamma(a+ib)\,F_4\,,$$

$$D_+ D_-\, F_4 = -2\,i\Gamma(a-ib)\,F_1 - (\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2)\,F_4\,. \tag{12}$$

Приведем матрицу справа

$$A = \begin{vmatrix} -(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2) & 2\,i\Gamma(a+ib) \\ -2\,i\Gamma(a-ib) & -(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2) \end{vmatrix} \tag{13}$$

к диагональном виду:

$$D_+ D_- F = AF, \quad F = P\bar{F},$$

$$D_+ D_- \bar{F} = P^{-1} A P \bar{F}, \quad J = P^{-1} A\, P, \quad \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_4 \end{vmatrix},$$

$$J = \begin{vmatrix} -M^2 - (\sqrt{a^2+b^2}+\Gamma)^2 & 0 \\ 0 & -M^2 - (\sqrt{a^2+b^2}-\Gamma)^2 \end{vmatrix},$$

$$P = \begin{vmatrix} \sqrt{a+ib} & \sqrt{a+ib} \\ i\sqrt{a-ib} & -i\sqrt{a-ib} \end{vmatrix}. \qquad (14)$$

Таким образом, получим раздельные уравнения для функций $\bar F_1$ и $\bar F_4$:

$$D_+ D_- \bar F_1 = -\left(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{\Gamma^2 a^2 + \Gamma^2 b^2}\right)\bar F_1,$$

$$D_+ D_- \bar F_4 = -\left(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2 - 2\sqrt{\Gamma^2 a^2 + \Gamma^2 b^2}\right)\bar F_4;$$

в явном виде они записываются так:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + iE + (Ez-\varepsilon)^2 - \left(M^2 + (\sqrt{a^2+b^2}+\Gamma)^2\right)\right]\bar F_1 \;\; 0, \qquad (15)$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + iE + (Ez-\varepsilon)^2 - \left(M^2 + (\sqrt{a^2+b^2}-\Gamma)^2\right)\right]\bar F_4 \;\; 0. \qquad (16)$$

Введем обозначения $\nu = M^2 + (\sqrt{a^2+b^2}+\Gamma)^2, \;\; \nu' \;\; M^2 + (\sqrt{a^2+b^2}-\Gamma)^2$,
тогда уравнения примут вид:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + iE + (Ez-\varepsilon)^2 - \nu\right]\bar F_1 \;\; 0, \quad \left[\frac{d^2}{dz^2} + iE + (Ez-\varepsilon)^2 - \nu'\right]\bar F_4 \;\; 0; \qquad (17)$$

отмечаем различие только в знаке при Γ. Рассмотрим (для определенности) уравнение для $\bar F_1$. Введем переменную

$$Z = \frac{i(Ez-\varepsilon)^2}{E}, \quad Z\frac{d^2\bar F_1}{dZ^2} + \frac{1}{2}\frac{d\bar F_1}{dZ} - \frac{1}{4}\left(Z - \frac{i\nu}{E} - 1\right)\bar F_1 \;\; 0. \qquad (18)$$

Сделаем подстановку $\bar F_1 = Z^A e^{BZ}\varphi_1$:

$$Z\frac{d^2\varphi_1}{dZ^2} + \left(\frac{1}{2} + 2A + 2BZ\right)\frac{d\varphi_1}{dZ} + \left[\left(B^2 - \frac{1}{4}\right)Z + \frac{(4A+1)B}{2} + \frac{i\nu + E}{4E} + \frac{A(2A-1)}{2Z}\right]\varphi_1 \;\; 0.$$

При A и B, выбранных согласно $A = 0, 1/2$ и $B = -1/2$, уравнение упрощается до вырожденного гипергеометрического уравнения

$$Z\frac{d^2\varphi_1}{dZ^2} + \left(\frac{1}{2} + 2A - Z\right)\frac{d\varphi_1}{dZ} - \left(A - \frac{i\nu}{4E}\right)\varphi_1 \;\; 0, \quad \gamma = \frac{1}{2} + 2A, \quad \alpha = A - \frac{i\nu}{4E}.$$

Для функции $\bar F_1^{(1)}$ имеем два линейно независимых решения:

$$\bar F_1^{(1)} = e^{-Z/2}Y_1(Z), = Y_1 \quad \Phi(\alpha,\gamma,Z), = \gamma \quad \frac{1}{2}, = \alpha \quad -\frac{i\nu}{4E}; \qquad (19)$$

$$\bar F_1^{(2)} = e^{-Z/2}Y_2(Z), \quad Y_2(Z) \quad Z^{1-\gamma}\Phi(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma; Z). \qquad (20)$$

Для функции $\bar F_4$ также имеем два линейно независимых решения:

$$\bar F_4^{(1)} = e^{-Z/2}\, F(\alpha', \gamma; Z) \quad e^{-Z/2}Y_1(Z), \quad Y_1 \quad \Phi(\alpha', \gamma; Z), \quad \gamma \quad \frac{1}{2}, \quad \alpha' \quad -\frac{i\nu'}{4E}; \qquad (21)$$

$$\bar F_4^{(2)} = e^{-Z/2}\sqrt{Z}\, F(\alpha' + \frac{1}{2}, \gamma+1; Z) \quad e^{-Z/2}Y_2(Z), = Y_2(Z) \quad Z^{1-\gamma}\Phi(\alpha'-\gamma+1, 2-\gamma; Z). \qquad (22)$$

Поскольку уравнения для функций $\bar F_1$ и $\bar F_4$ несвязанные, то каждая из этих функций порождает соответствующую пару функций $\{F_1, F_4\}$:

$$A)\quad \begin{vmatrix} \bar F_1 \\ 0 \end{vmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} F_1 \\ F_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{a+ib}\,\bar F_1 \\ i\sqrt{a-ib}\,\bar F_1 \end{vmatrix}, \tag{23}$$

$$B)\quad \begin{vmatrix} 0 \\ \bar F_4 \end{vmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} F_1 \\ F_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{a+ib}\,\bar F_4 \\ -i\sqrt{a-ib}\,\bar F_4 \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Зная F_1 и F_4, можно найти явные выражения для функций f_1 и f_4:

A)

$$f_1 = \frac{(a-ib)\sqrt{a+ib} - i(i\Gamma - M)\sqrt{a-ib}}{(\Gamma+iM)^2 - a^2 - b^2}\,\bar F_1 = \frac{\sqrt{a-ib}}{(\Gamma+iM) - \sqrt{a^2+b^2}}\,\bar F_1,$$

$$f_4 = -\frac{(i\Gamma - M)\sqrt{a+ib} + i(a+ib)\sqrt{a-ib}}{(\Gamma+iM)^2 - a^2 - b^2}\,\bar F_1 = \frac{-i\sqrt{a+ib}}{(\Gamma+iM) - \sqrt{a^2+b^2}}\,\bar F_1, \tag{25}$$

B)

$$f_1 = \frac{(a-ib)\sqrt{a+ib} + i(i\Gamma - M)\sqrt{a-ib}}{(\Gamma+iM)^2 - a^2 - b^2}\,\bar F_4 = \frac{-\sqrt{a-ib}}{(\Gamma+iM) + \sqrt{a^2+b^2}}\,\bar F_4,$$

$$f_4 = -\frac{(i\Gamma - M)\sqrt{a+ib} - i(a+ib)\sqrt{a-ib}}{(\Gamma+iM)^2 - a^2 - b^2}\,\bar F_4 = \frac{-i\sqrt{a+ib}}{(\Gamma+iM) + \sqrt{a^2+b^2}}\,\bar F_4. \tag{26}$$

Затем получаем соответствующие представления для функций f_2, f_3:

$$A)\qquad f_2 = \frac{\sqrt{a+ib}}{(\Gamma+iM)^2 - a^2 - b^2}\,D_-\bar F_1,\;\; f_3 = \frac{i\sqrt{a-ib}}{(\Gamma+iM)^2 - a^2 - b^2}\,D_-\bar F_1; \tag{27}$$

$$B)\qquad f_2 = \frac{\sqrt{a+ib}}{(\Gamma+iM)^2 - a^2 - b^2}\,D_-\bar F_4,\;\; f_3 = -\frac{i\sqrt{a-ib}}{(\Gamma+iM)^2 - a^2 - b^2}\,D_-\bar F_4. \tag{28}$$

Для функций f_2, f_3 можно получить и другие выражения. Для этого возвратимся к равенствам (7), (8) и подставим (8) в уравнения (5):

$$\frac{D_-D_+}{(\Gamma - iM)^2 - a^2 - b^2}[(a-ib)f_2 + (i\Gamma+M)f_3] = (a-ib)f_2 - (i\Gamma - M)f_3,$$

$$\frac{D_-D_+}{(\Gamma - iM)^2 - a^2 - b^2}[(i\Gamma+M)f_2 - (a+ib)f_3] = -(i\Gamma - M)f_2 - (a+ib)f_3. \tag{29}$$

Вводим новые функции

$$(a-ib)f_2 + (i\Gamma+M)f_3 = G_2, \quad (i\Gamma+M)f_2 - (a+ib)f_3 = G_3;$$

$$f_2 = -\frac{(a+ib)G_2 + (M+i\Gamma)G_3}{(\Gamma - iM)^2 - a^2 - b^2}, \quad f_3 = -\frac{(M+i\Gamma)G_2 - (a-ib)G_3}{(\Gamma - iM)^2 - a^2 - b^2}.$$

Затем из (29) получим

$$D_-D_+G_2 = -(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2)G_2 - 2i\Gamma(a-ib)G_3,$$

$$D_-D_+G_3 = 2i\Gamma(a+ib)G_2 - (\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2)G_3.$$

Приведем матрицу справа (сравн. с (13))

$$A = \begin{vmatrix} -(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2) & -2i\Gamma(a-ib) \\ 2i\Gamma(a+ib) & -(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2) \end{vmatrix} \tag{30}$$

к диагональному виду: $D_+D_-G = AG, \quad G = P\bar{G},$

$$D_+D_-\bar{G} = P^{-1}AP\bar{G}, \quad J = P^{-1}AP, \quad \bar{G} = \begin{vmatrix} \bar{G}_2 \\ \bar{G}_3 \end{vmatrix},$$

$$J = \begin{vmatrix} -M^2 - (\sqrt{a^2+b^2} + \Gamma)^2 & 0 \\ 0 & -M^2 - (\sqrt{a^2+b^2} - \Gamma)^2 \end{vmatrix},$$

$$P = \begin{vmatrix} \sqrt{a-ib} & \sqrt{a-ib} \\ -i\sqrt{a+ib} & i\sqrt{a+ib} \end{vmatrix}. \tag{31}$$

Таким образом, получим раздельные уравнения для функций G_2 и G_3

$$D_-D_+ G_2 = -\left(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{\Gamma^2 a^2 + \Gamma^2 b^2}\right)\bar{G}_2,$$

$$D_-D_+ G_3 = -\left(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2 - 2\sqrt{\Gamma^2 a^2 + \Gamma^2 b^2}\right)\bar{G}_3;$$

в явном виде они представляются так:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - iE + (Ez-\varepsilon)^2 - \left(M^2 + (\sqrt{a^2+b^2} + \Gamma)^2\right)\right]\bar{G}_2 \quad 0, \tag{32}$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - iE + (Ez-\varepsilon)^2 - \left(M^2 + (\sqrt{a^2+b^2} - \Gamma)^2\right)\right]\bar{G}_3 \quad 0. \tag{33}$$

С обозначений для ν, ν' уравнения запишутся короче:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - iE + (Ez-\varepsilon)^2 - \nu\right]G_2 \quad 0, \quad \left[\frac{d^2}{dz^2} - iE + (Ez-\varepsilon)^2 - \nu'\right]G_3 \quad 0. \tag{34}$$

Они различаются только знаком при Γ, поэтому достаточно исследовать только одно из них. Рассмотрим уравнение для G_2. Введем переменную $Z = i\left(Ez-\varepsilon\right)^2/E$, тогда

$$Z\frac{d^2G_2}{dZ^2} + \frac{1}{2}\frac{dG_2}{dZ} - \frac{1}{4}\left(Z - \frac{i\nu}{E} + 1\right)G_2 \quad 0. \tag{35}$$

Сделаем подстановку $G_2 = Z^A e^{BZ}\varphi_2$:

$$Z\frac{d^2\varphi_2}{dZ^2} + \left(\frac{1}{2} + 2A + 2BZ\right)\frac{d\varphi_2}{dZ} + \left[\left(B^2 - \frac{1}{4}\right)Z + \frac{(4A+1)B}{2} + \frac{i\nu - E}{4E} + \frac{A(2A-1)}{2Z}\right]\varphi_2 \quad 0.$$

При $A = 0, 1/2$ и $B = -1/2$ уравнение упрощается до вырожденного гипергеометрического уравнения

$$Z\frac{d^2\varphi_2}{dZ^2} + \left(\frac{1}{2} + 2A - Z\right)\frac{d}{dZr} - \left[\frac{4A+1}{4} - \frac{i\nu - E}{4E}\right]\varphi_2 \quad 0, \quad a \quad A + \frac{1}{2} - \frac{i\nu}{4E}, \; c \quad \frac{1}{2} + 2A.$$

Имеем два линейно независимых решения:

$$\bar{G}_2^{(1)} = e^{-Z/2}\, F(a, c; Z), \quad c = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{2} - \frac{i\nu}{4E}, \; \bar{G}_2^{(2)} = \sqrt{Z}\, e^{-Z/2}\, F(a + \frac{1}{2}, c+1; Z); \tag{36}$$

отмечаем равенство $a = \alpha + 1/2, c = \gamma$. Для функции $\bar{G}_3$ также имеем два линейно независимых решения:

$$\bar{G}_3^{(1)} = e^{-Z/2}\, F(a', c; Z), \quad c = \frac{1}{2}, \quad a' = \frac{1}{2} - \frac{i\nu'}{4E}; \quad \bar{G}_3^{(2)} = \sqrt{Z}\, e^{-Z/2}\, F(a' + \frac{1}{2}, c+1; Z). \tag{37}$$

Поскольку уравнения для функций $\bar{G}_2, \bar{G}_3$ несвязанные, то каждая из функций функция порождает соответствующую пару функций G_2, G_3:

$$\begin{vmatrix} \bar{G}_2 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} G_2 \\ G_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{a-ib}\ \bar{G}_2 \\ -i\sqrt{a+ib}\ \bar{G}_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 \\ \bar{G}_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} G_2 \\ G_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{a-ib}\ \bar{G}_3 \\ i\sqrt{a+ib}\ \bar{G}_3 \end{vmatrix}. \tag{38}$$

Сопоставим полученные результаты со случаем нулевого магнитного момента. Исходное уравнение Дирака представляем в виде

$$\left\{\gamma^0(\varepsilon - Ez) - a\gamma^1 - b\gamma^2 + i\gamma^3 \frac{d}{dz} - M\right\} \begin{vmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ f_3(z) \\ f_4(z) \end{vmatrix} = 0. \tag{39}$$

Система уравнений по переменной z после перехода к новым функциям

$$f_1 = \frac{(a-ib)F_1 + MF_4}{-M^2 - a^2 - b^2}, \quad f_4 = -\frac{-MF_1 + (a+ib)F_4}{-M^2 - a^2 - b^2},$$

$$f_2 = D_- \frac{-M f_4 - (a+ib) f_1}{-M^2 - a^2 - b^2}, \quad f_3 = D_- \frac{-Mf_1 + \left(a-ib\right) f_4}{-M^2 - a^2 - b^2} \tag{40}$$

приводит к системе раздельных уравнений второго порядка для основных функций $\{F_1, F_4\}$:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + iE + (Ez-\varepsilon)^2 - \left(M^2 + a^2 + b^2\right)\right] F_1 = 0, \tag{41}$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + iE + (Ez-\varepsilon)^2 - \left(M^2 + a^2 + b^2\right)\right] F_4 = 0. \tag{42}$$

Отмечаем, что математическая структура разделенных уравнений для случаев $\Gamma \neq 0$ и $\Gamma = 0$ одинаковая (см. (32) и (33)) – различия сводятся лишь к замене одного параметра: $M^2 + a^2 + b^2 \Rightarrow M^2 + (\sqrt{a^2+b^2} \pm \Gamma)^2$.

Рассмотрим специальный случай нулевого заряда. Исходное уравнение Дирака для этого специального случая имеет вид:

$$\left\{\gamma^0\varepsilon - a\gamma^1 - b\gamma^2 + i\gamma^3 \frac{d}{dz} - i\Gamma\gamma^0\gamma^3 - M\right\} \begin{vmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ f_3(z) \\ f_4(z) \end{vmatrix} = 0. \tag{43}$$

Вводим новые функции:

$$f_1 = \frac{(a-ib)F_1 - (i\Gamma - M)F_4}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2}, \quad f_4 = -\frac{(i\Gamma - M)F_1 + (a+ib)F_4}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2},$$

$$f_2 = D_- \frac{(i\Gamma - M) f_4 - \left(a+ib\right) f_1}{\left(\Gamma + iM\right)^2 - a^2 - b^2}, \quad f_3 = D_- \frac{(i\Gamma - M) f_1 + \left(a-ib\right) f_4}{\left(\Gamma + iM\right)^2 - a^2 - b^2}.$$

Приводим смешивающую матрицу в системе уравнений для $\{F_1, F_4\}$ к диагональному виду:

$$A = \begin{vmatrix} -(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2) & 2i\Gamma(a+ib) \\ -2i\Gamma(a-ib) & -(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2) \end{vmatrix}, \tag{44}$$

$$J = P^{-1} A P, \quad \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_4 \end{vmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} \sqrt{a+ib} & \sqrt{a+ib} \\ i\sqrt{a-ib} & -i\sqrt{a-ib} \end{vmatrix},$$

$$J = \begin{vmatrix} -M^2 - (\sqrt{a^2+b^2}+\Gamma)^2 & 0 \\ 0 & -M^2 - (\sqrt{a^2+b^2}-\Gamma)^2 \end{vmatrix}. \qquad (45)$$

Разделенные уравнения для $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_4$ имеют вид:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - \left(M^2 + (\sqrt{a^2+b^2}+\Gamma)^2 \right) \right] \bar{F}_1 = 0,$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - \left(M^2 + (\sqrt{a^2+b^2}-\Gamma)^2 \right) \right] \bar{F}_4 = 0;$$

их решения такие:

$$\bar{F}_1 = e^{i\sigma z}, \quad \sigma = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - M^2 - (\sqrt{a^2+b^2}+\Gamma)^2},$$

$$\bar{F}_4 = e^{i\sigma' z}, \quad \sigma' = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - M^2 - (\sqrt{a^2+b^2}-\Gamma)^2}. \qquad (46)$$

Обратим внимание на наиболее характерное проявление ненулевого магнитного момента (в отсутствие электрического заряда у частицы; например, это может быть нейтрон) в разделенных дифференциальных уравнениях: решения имеют вид плоских волн, простым образом модифицированных наличием параметра $\Gamma \neq 0$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кисель, В. В. Теория Петраша для частицы со спином ½ в искривленном пространстве-времени / В. В. Кисель, Н. Г. Токаревская, В. М. Редьков. – Минск : Ин-т физики НАНБ, 2002. – 25 с. – (Препринт / Ин-т физики НАНБ ; № 737).
2. Богуш, А. А. Теория Петраша для частицы со спином ½ в искривленном пространстве-времени / А. А. Богуш [и др.] // Вес. НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук. – 2002. – № 1. – С. 63–68.
3. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Белорус. наука, 2009. – 496 с.
4. Petras, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin 3/2 / M. Petras // Czech. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.04.2016

***Ovsiyuk E.M., Veko O.V., Voynova Y.A., Kisel V.V., Red'kov V.M.* Spin ½ Particle with Anomalous Magnetic Moment in Uniform Electric Field**

The Dirac equation for spin ½ particle with anomalous magnetic moment is solved in presence of the uniform electric field. Exact solutions of the equation are constructed. Comparison with the case of vanishing magnetic moment is performed. A special case of vanishing electric charge and non-zero magnetic moment – it may be the neutron – is studied. At this, solutions of plane wave type are found, which are characterized by modified relationship between energy and linear momentum: $\varepsilon^2 = m^2 + p_3^2 + (p_1^2 + p_2^2 \pm \Gamma)^2$*, electric field is oriented along the axes* x_3*;* $\Gamma \neq 0$ *corresponds to non-vanishing magnetic moment.*

Авторы признательны сотрудникам лаборатории теоретической физики Института физики НАН Беларуси за полезное обсуждение результатов работы.