

3. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
4. Солодов А.В. Системы с переменным запаздыванием / Солодов А.В., Солодова Е.А. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
5. Minorsky N. Nonlinear Oscillations, D.Van Nostrand Company, Inc., Princeton, 1962.
6. Ким А.В. i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений / Ким А.В., Пименов В.Г. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика, 2004. – 256 с.

Наталья Можей
(Минск, Беларусь)

ТЕНЗОРЫ РИЧЧИ ОДНОРОДНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В работах, связанных с доказательством гипотезы Пуанкаре, потоки Риччи римановых многообразий использовались как важное техническое средство, было получено много результатов о существовании и свойствах таких потоков (см., напр., [1], [2]). С другой стороны, представляет интерес изучение геометрических свойств метрик, входящих в поток Риччи. Поток Риччи определяется через тензор Риччи, который определяет кривизну многообразия в одномерном направлении.

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $(M, \bar{G})$ – однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G}, G)$, где $G \subset \bar{G}$. Начнем с локального описания однородных пространств и связностей на них. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G . Инвариантные римановы метрики g на M находятся во взаимно-однозначном соответствии с инвариантными симметрическими невырожденными билинейными формами B на G -модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Каждое риманово однородное пространство $(\bar{G}, M, g)$, $\text{codim}_{\mathfrak{g}} \bar{\mathfrak{g}} \leq 4$ описывается тройкой $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$, будем называть ее *локально римановым однородным пространством*. Ограничимся случаем с ненулевым стабилизатором, т.к. все остальные римановы однородные пространства – только трехмерные группы Ли с инвариантной метрикой. Любое локально однородное пространство, допускающее риманову метрику, т.ч. $\text{codim}_{\mathfrak{g}} \bar{\mathfrak{g}} = 3$ и $\mathfrak{g} \neq \{0\}$, эквивалентно одной и только одной из следующих троек:

Таблица умножения

B

1.3.1	e_1	0	$-u_2$	u_1	0	ε_1 0 0 0 ε_1 0 0 0 ε_2	$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$
	u_1	u_2	0	0	0		
	u_2	$-u_1$	0	0	0		
	u_3	0	0	0	0		
1.3.2	e_1	0	$-u_2$	u_1	0	ε 0 0 0 ε 0 0 0 a	$\varepsilon = \pm 1, a \neq 0$
	u_1	u_2	0	0	u_1		
	u_2	$-u_1$	0	0	u_2		
	u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0		
1.3.3	e_1	0	$-u_2$	u_1	0	a 0 0 0 a 0 0 0 b	$ab \neq 0$
	u_1	u_2	0	$e_1 + u_3$	0		
	u_2	$-u_1$	$-e_1 - u_3$	0	0		
	u_3	0	0	0	0		
1.3.4	e_1	0	$-u_2$	u_1	0	a 0 0 0 a 0 0 0 b	$ab \neq 0$
	u_1	u_2	0	$-e_1 + u_3$	0		
	u_2	$-u_1$	$e_1 - u_3$	0	0		
	u_3	0	0	0	0		
1.3.5	e_1	0	$-u_2$	u_1	0	a 0 0 0 a 0 0 0 ± 1	$a \neq 0$
	u_1	u_2	0	e_1	0		
	u_2	$-u_1$	$-e_1$	0	0		
	u_3	0	0	0	0		
1.3.6	e_1	0	$-u_2$	u_1	0	a 0 0 0 a 0 0 0 ± 1	$a \neq 0$
	u_1	u_2	0	$-e_1$	0		
	u_2	$-u_1$	e_1	0	0		
	u_3	0	0	0	0		

1.3.7		e_1	u_1	u_2	u_3	ε	0	0	$\varepsilon = \pm 1, a \neq 0$
	e_1	0	$-u_2$	u_1	0	0	ε	0	
	u_1	u_2	0	u_3	0	0	0	a	
	u_2	$-u_1$	$-u_3$	0	0				
	u_3	0	0	0	0				
3.5.1		e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3		$\pm$
	e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1	1	
	e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0	0	
	e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2	0	
	u_1	u_3	u_2	0	0	0	0	0	
	u_2	0	$-u_1$	u_3	0	0	0	0	
	u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	
3.5.2		e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3		$a \neq 0$
	e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1	a	
	e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0	0	
	e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2	0	
	u_1	u_3	u_2	0	0	e_2	e_1	0	
	u_2	0	$-u_1$	u_3	$-e_2$	0	e_3	0	
	u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	$-e_1$	$-e_3$	0	a	
3.5.3		e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3		
	e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1	a	
	e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0	0	
	e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2	0	
	u_1	u_3	u_2	0	0	$-e_2$	$-e_1$	0	
	u_2	0	$-u_1$	u_3	e_2	0	$-e_3$	0	
	u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	e_1	e_3	0	a	

Здесь e_1, e_2, e_3 – базис $\mathfrak{g}$, u_1, u_2, u_3 – дополнительный к $\mathfrak{g}$.

Для указанных однородных пространств находим инвариантные аффинные связности. Аффинной связностью на паре $(\bar{g}, g)$ называется такое отображение $\Lambda: \bar{g} \rightarrow gl(V)$, где $V = \bar{g} / g$, что его ограничение на g есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является g -инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре $(\bar{g}, g)$.

Инвариантные аффинные связности трехмерных римановых однородных пространств в базисе u_1, u_2, u_3 имеют следующий вид:

3.5.1, 3.5.2, 3.5.3. Связность

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & -p_{2,3} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{2,3} & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3.1 – 1.3.7. Связность

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 \\ -r_{1,2} & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Тензорное поле Риччи S – ковариантное тензорное поле степени 2, т.ч.

$$S(X, Y) = \text{tr } V \rightarrow R(V, X)Y \text{ для } X, Y, V \in T_x(M).$$

Теорема. Тензоры Риччи римановых однородных пространств имеют вид:

3.5.1.

$$\begin{pmatrix} -2p_{2,3}^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{2,3}^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{2,3}^2 \end{pmatrix}$$

3.5.2.

$$\begin{pmatrix} -2p_{2,3}^2 - 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{2,3}^2 - 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{2,3}^2 - 2 \end{pmatrix}$$

3.5.3.

$$\begin{pmatrix} -2p_{2,3}^2 + 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{2,3}^2 + 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{2,3}^2 + 2 \end{pmatrix}$$

1.3.1.

A	$p_{1,3}p_{3,2} - p_{2,3}p_{3,1} - p_{3,1}r_{1,2} - p_{3,2}r_{1,1} + r_{3,3}p_{3,2}$	0
B	$p_{2,3}p_{3,2} + p_{1,3}p_{3,1} - p_{3,1}r_{1,1} + p_{3,2}r_{1,2} + r_{3,3}p_{3,1}$	0
0	0	$2p_{1,3}r_{3,3} - 2r_{1,1}p_{1,3} - 2r_{1,2}p_{2,3}$

где

$$A = p_{2,3} p_{3,2} + p_{1,3} p_{3,1} - p_{3,1} r_{1,1} + p_{3,2} r_{1,2} + r_{3,3} p_{3,1},$$

$$B = -p_{1,3} p_{3,2} + p_{2,3} p_{3,1} + p_{3,2} r_{1,1} + p_{3,1} r_{1,2} - r_{3,3} p_{3,2}.$$

1.3.2.

A	$p_{1,3}p_{3,2}-p_{2,3}p_{3,1}-p_{3,1}r_{1,2}-p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2}+p_{3,2}$	0
B	$p_{2,3}p_{3,2}+p_{1,3}p_{3,1}-p_{3,1}r_{1,1}+p_{3,2}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,1}+p_{3,1}$	0
0	0	$2p_{1,3}r_{3,3}-2r_{1,1}p_{1,3}-2r_{1,2}p_{2,3}-2p_{1,3}$

где

$$A = p_{2,3} p_{3,2} + p_{1,3} p_{3,1} - p_{3,1} r_{1,1} + p_{3,2} r_{1,2} + r_{3,3} p_{3,1} + p_{3,1},$$

$$B = -p_{1,3} p_{3,2} + p_{2,3} p_{3,1} + p_{3,2} r_{1,1} + p_{3,1} r_{1,2} - r_{3,3} p_{3,2} - p_{3,2}.$$

1.3.3.

A	$p_{1,3}p_{3,2}-p_{2,3}p_{3,1}+r_{1,1}-p_{3,1}r_{1,2}-p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2}$	0
B	$p_{2,3}p_{3,2}+p_{1,3}p_{3,1}-r_{1,2}-p_{3,1}r_{1,1}+p_{3,2}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,1}$	0
0	0	$2p_{1,3}r_{3,3}-2r_{1,1}p_{1,3}-2r_{1,2}p_{2,3}$

где

$$A = p_{2,3} p_{3,2} + p_{1,3} p_{3,1} - 1 - r_{1,2} - p_{3,1} r_{1,1} + p_{3,2} r_{1,2} + r_{3,3} p_{3,1},$$

$$B = -p_{1,3} p_{3,2} + p_{2,3} p_{3,1} - r_{1,1} + p_{3,2} r_{1,1} + p_{3,1} r_{1,2} - r_{3,3} p_{3,2}.$$

1.3.4.

A	$p_{1,3}p_{3,2}-p_{2,3}p_{3,1}+r_{1,1}-p_{3,1}r_{1,2}-p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2}$	0
B	$p_{2,3}p_{3,2}+p_{1,3}p_{3,1}+1-r_{1,2}-p_{3,1}r_{1,1}+p_{3,2}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,1}$	0
0	0	$2p_{1,3}r_{3,3}-2r_{1,1}p_{1,3}-2r_{1,2}p_{2,3}$

где

$$A = p_{2,3} p_{3,2} + p_{1,3} p_{3,1} + 1 - r_{1,2} - p_{3,1} r_{1,1} + p_{3,2} r_{1,2} + r_{3,3} p_{3,1},$$

$$B = -p_{1,3} p_{3,2} + p_{2,3} p_{3,1} - r_{1,1} + p_{3,2} r_{1,1} + p_{3,1} r_{1,2} - r_{3,3} p_{3,2}.$$

1.3.5.

A	$p_{1,3}p_{3,2}-p_{2,3}p_{3,1}-p_{3,1}r_{1,2}-p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2}$	0
B	$p_{2,3}p_{3,2}+p_{1,3}p_{3,1}-1-p_{3,1}r_{1,1}+p_{3,2}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,1}$	0
0	0	$2p_{1,3}r_{3,3}-2r_{1,1}p_{1,3}-2r_{1,2}p_{2,3}$

где

$$A = p_{2,3} p_{3,2} + p_{1,3} p_{3,1} - 1 - p_{3,1} r_{1,1} + p_{3,2} r_{1,2} + r_{3,3} p_{3,1},$$

$$B = -p_{1,3} p_{3,2} + p_{2,3} p_{3,1} + p_{3,2} r_{1,1} + p_{3,1} r_{1,2} - r_{3,3} p_{3,2}.$$

1.3.6.

A	$p_{1,3}p_{3,2}-p_{2,3}p_{3,1}-p_{3,1}r_{1,2}-p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2}$	0
B	$p_{2,3}p_{3,2}+p_{1,3}p_{3,1}+1-p_{3,1}r_{1,1}+p_{3,2}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,1}$	0
0	0	$2p_{1,3}r_{3,3}-2r_{1,1}p_{1,3}-2r_{1,2}p_{2,3}$

где

$$A = p_{2,3} p_{3,2} + p_{1,3} p_{3,1} + 1 - p_{3,1} r_{1,1} + p_{3,2} r_{1,2} + r_{3,3} p_{3,1},$$

$$B = -p_{1,3} p_{3,2} + p_{2,3} p_{3,1} + p_{3,2} r_{1,1} + p_{3,1} r_{1,2} - r_{3,3} p_{3,2}.$$

1.3.7.

A	$p_{1,3}p_{3,2}-p_{2,3}p_{3,1}+r_{1,1}-p_{3,1}r_{1,2}-p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2}$	0
B	$p_{2,3}p_{3,2}+p_{1,3}p_{3,1}-r_{1,2}-p_{3,1}r_{1,1}+p_{3,2}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,1}$	0
0	0	$2p_{1,3}r_{3,3}-2r_{1,1}p_{1,3}-2r_{1,2}p_{2,3}$

где

$$A = p_{2,3} p_{3,2} + p_{1,3} p_{3,1} - r_{1,2} - p_{3,1} r_{1,1} + p_{3,2} r_{1,2} + r_{3,3} p_{3,1},$$

$$B = -p_{1,3} p_{3,2} + p_{2,3} p_{3,1} - r_{1,1} + p_{3,2} r_{1,1} + p_{3,1} r_{1,2} - r_{3,3} p_{3,2}.$$

Доказательство. Пусть $(\bar{g}, \bar{g}, B)$ – локально однородное пространство 3.5.2, тогда тензор Риччи

$0-R(u_1, u_2)_{2,1}-R(u_1, u_3)_{3,1}$	$0-R(u_1, u_2)_{2,2}-R(u_1, u_3)_{3,2}$	A
$R(u_1, u_2)_{1,1}-R(u_2, u_3)_{3,1}$	$R(u_1, u_2)_{1,2}-R(u_2, u_3)_{3,2}$	B
$R(u_1, u_3)_{1,1}+R(u_2, u_3)_{2,1}$	$R(u_1, u_3)_{1,2}+R(u_2, u_3)_{2,2}$	C

где

$$A=0-R(u_1, u_2)_{2,3}-R(u_1, u_3)_{3,3}, \quad B=R(u_1, u_2)_{1,3}-R(u_2, u_3)_{3,3},$$

$$C=R(u_1, u_3)_{1,3}+R(u_2, u_3)_{2,3}$$

имеет вид, приведенный в теореме.

Для остальных однородных пространств рассуждения аналогичны.

Алгебраический подход позволяет обобщить различные результаты дифференциальной геометрии и упростить их доказательство, а также применить идеи дифференциальной геометрии к другим математическим теориям и, наоборот, использовать различные алгебраические результаты в дифференциальной геометрии.

Литература:

1. Chow B., Knopf D. The Ricci ow: an introduction. Mathematical Surveys and Monographs, V. 110. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
2. Bennett Chow, Sun-Chin Chu, Chia-Yi, David Glickenstein, Christine Guenther, James Isenberg, Tom Ivey, Dan Knopf, Peng Lu, Feng Luo, and Lei Ni, The Ricci ow: techniques and applications. Part I: Geometric aspects. Mathematical Surveys and Monographs, V. 135. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.