Доклады Национальной академии наук Беларуси
2007 март–апрель Том 51 № 4

УДК 620.179:621.9

О. С. КИСЕЛЕВСКИЙ, В. П. КАЗАЧЕНКО

# ФУРЬЕ-АНАЛИЗ ПРОФИЛЕЙ СВЕРХГЛАДКИХ ФРАКТАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

*(Представлено членом-корреспондентом Н. К. Мышкиным)*

*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель* *Поступило 31.01.2007*

**Введение.** Известно, что существует связь между физическими свойствами фрактальных структур и их размерностью [1]. Как правило, формирование фрактальных структур является результатом неравновесных физико-химических процессов, таких как, например, адсорбция, диффузия [2], электрофизические процессы при формировании многокомпонентных плазменно-вакуумных покрытий [3]. Наиболее часто встречаются поверхности, размерность которых близка к $D = 2{,}5$ [4]. Для их фрактального анализа применяется метод анализа Фурье-спектра мощности профиля шероховатости. Как показано в [5], в области значений размерности близких к 2,5 показатель крутизны спектра мощности шероховатости α, связан с размерностью самого профиля линейной функцией $D = 2 - (\alpha - 1)/2$. Известно, что показатель α, определяется как тангенс угла наклона прямой, аппроксимирующей спектр мощности шероховатости, построенный в логарифмических координатах [6]. Размерность профиля может принимать значения в интервале от 1 до 2, при этом линейная зависимость справедлива в области значений α от 1 до 3.

С развитием технологий получения прецизионных сверхгладких поверхностей увеличился спектр наномасштабных поверхностных структур с фрактальной размерностью близкой к 2. Анализ Фурье-спектров мощности шероховатости таких поверхностей показывает возможность существования профилей с крутизной спектра мощности шероховатости $\alpha > 3$ [7, 8]. В связи с этим возникает необходимость уточнения зависимости $D$ от α в области значений α больше 3.

**Экспериментальная часть.** Отметим, что метод Фурье-анализа профилей относится к непрямым геометрическим методам фрактального анализа. Они основаны на эмпирических и аналитических гипотезах о взаимосвязи статистических свойств характерных кривых [5, 9], принадлежащих численному отображению реальной поверхности [6], с размерностью самой поверхности. В данном случае гипотезой является предположение о линейной взаимосвязи показателя α крутизны частотного спектра мощности $G(f)$ функции профиля шероховатости и фрактальной коразмерности (параметра Херста) $H$ [10]:

$$G(f) = k / f^{\alpha} = k / f^{2H+1}. \tag{1}$$

Параметр Херста $H$ в (1), определяется как $R/S = (\Delta L)^H$, где $R$ – интервал между максимальным и минимальным значением функции профиля на участке длиной $\Delta L$; $S$ – среднее квадратичное отклонение профиля на том же участке [10]. Параметр $H$ может принимать значения в открытом интервале$H \in (0; 1)$ [11] и связан с фрактальной размерностью профиля $D_p$ вертикального сечения выражением

$$D_p = 2 - H. \tag{2}$$

В работе [4] показано, что формула (1) позволяет получать корректные значения параметра Херста только в том случае, если значения показателя α лежат в пределах от 1 до 3, а в [5] также отмечается, что формула (1) требует критической проверки. Детальное исследование зависимости размерности $D_p$ профиля фрактальной поверхности от показателя α крутизны частотного спектра мощности его шероховатости $G(f)$ проводилось на основании математическое моделирование профилей с заданной крутизной спектра по методике предложенной в [5]. Согласно этой методике, для построения функции профиля в комплексном виде $I(x)$ использовался алгоритм быстрого преобразования Фурье в пределах пространственных частот от значения $f_{\min} = 2\pi/L$, ограниченного полной длиной профиля $L$, до значения $f_{\max} = 2\pi/d$, которая определяется шагом дискретизации математической модели $d$:

$$I(x) = \sum_j G(f) \cdot \exp(2\pi \cdot i \cdot f_j \cdot x) \qquad (3)$$

Вид функции спектра мощности $G(f)$ задан показателем $\alpha$ в выражении

$$G(f) = k / f^{\alpha}, \qquad (4)$$

где $k$ – коэффициент амплитудной нормировки профиля.

По комплексному профилю $I$, строились профили

$$z(x) = \mathrm{Re}I \cdot \cos\psi + \mathrm{Im}I \cdot \sin\psi, \qquad (5)$$

где $\mathrm{Re}I$ и $\mathrm{Im}I$ – действительная и мнимая составляющие функции профиля в комплексном виде; $\psi$ – сдвиг фазы, выбранный случайным образом.

Примеры профилей, построенных по описанной методике со значениями спектрального показателя $\alpha = 2,5$ и $\alpha = 8$, что свидетельствует о возможности существования профилей с $\alpha > 3$, представлены на рис. 1. Увеличение значения параметра $\alpha$ приводит к более гладким профилям (рис. 1, *б*). Очевидно, что при $\alpha \to \infty$ профиль вырождается в прямую линию с фрактальной размерностью $D \to 1$.

Соответствие спектра мощности шероховатости симулированных профилей заданному показателю крутизны $\alpha$ было проверено методом обратного разложения функций профилей в ряд Фурье и линейной аппроксимации спектров мощности, построенных в логарифмических осях. Установлено, что параметр крутизны спектра мощности шероховатости полученных профилей соответствует заданному значению $\alpha$ с абсолютной погрешностью не более 0,2.

Фрактальная размерность профилей вычислялась клеточным методом, заключающимся в разбиении плоскости размерами $L \times L$, включающей профиль, на клеточное поле с размером клеток равным $d$. Варьируя параметр разбиения $L/d$, подсчитывали число клеток $N$, занятых линией профиля. За значение фрактальной размерности $D_p$ принимался тангенс угла наклона графика зависимости логарифма числа занятых клеток $\lg N$ от логарифма параметра разбиения $\lg(L/d)$ [1, 12]. Погрешность вычислений определялась как среднее квадратичное отклонение графика линейной регрессии от табличных значений функции $\lg N(\lg(L/d))$. Данный метод был протестирован с использованием фрактальных кривых с известной фрактальной размерностью, а именно триадной [6] и квадратной [13] кривыми Коха ($D_p = 1,26$ и $D_p = 1,5$ соответственно), а также прямой линией ($D_p = 1$). Во всех случаях абсолютная погрешность вычисления фрактальной размерности клеточным методом составляла не более 0,01.

Клеточным методом рассчитаны фрактальные размерности $D_p$ моделей профилей, построенных при различных значениях спектрального показателя $\alpha$ от 1 до 10. Для каждого из профилей, с учетом формулы (2), были вычислены значения параметра Херста $H$. Характер полученной зависимости $H$ от $\alpha$ представлен на рис. 2 точками *а*. Экспериментальные значения параметра Херста принадлежат промежутку (0; 1), и при увеличении $\alpha$ асимптотически стремятся к $H \to 1$. Такую зависимость $H$ от $\alpha$ в диапазоне значений $\alpha \in (1; \infty)$ можно описать выражением

$$H = 1 - 2\exp(-2\alpha/3), \qquad (6)$$

которое получено на основании корреляционного анализа экспериментальных данных (рис. 2, кривая *в*).

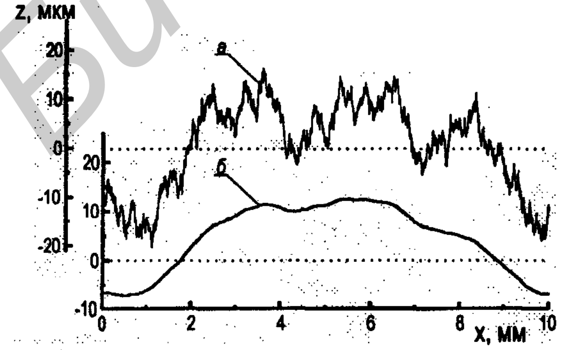


Рис. 1. Профили, симулированные по методу Фурье-преобразования: *а* – $\alpha = 2,5$; *б* – $\alpha = 8$

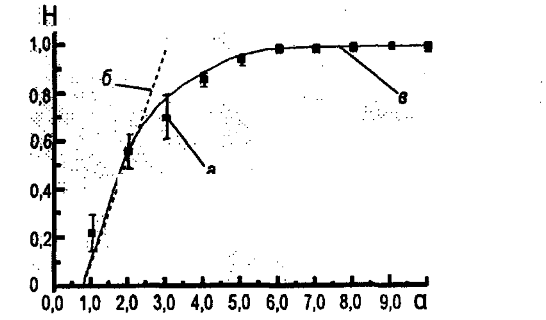


Рис. 2. Зависимости коразмерности Фурье-симулированных профилей от показателя $\alpha$: *а* – метод фрактального анализа; *б* – по формуле (1); *в* – по эмпирической формуле (6)

Для сравнения, на рис. 2 линией *б* показана зависимость $H = (\alpha - 1)/2$, соответствующая формуле (1). Это выражение согласуется с полученной зависимости $H$ от $\alpha$ только в пределах изменения $\alpha$ от 1 до 3. Для $\alpha > 3$ значение параметра Херста становится $H > 1$, что для реальных исследуемых объектов не имеет физического смысла.

С учетом формулы (2) и теоремы Мандельброта о том, что размерность профиля фрактальной поверхности всегда на единицу меньше размерности самой поверхности [11], зависимость фрактальная размерности поверхности $D_s$ от показателя $\alpha$ крутизны спектра ее профиля в диапазоне значений $\alpha \in (1; \infty)$ можно выразить как

$$D_s = 2\exp(-2\alpha/3) + 2. \qquad (7)$$

Экспоненциальная зависимость фрактальной размерности поверхности от спектрального показателя $\alpha$ функции ее профиля подтверждена численными экспериментами. В этих экспериментах модели поверхностей с заданной размерностью, симулированные методом Фосса [5], подвергались фрактальному анализу различными методами. Так, например, для модели поверхности с заданной размерностью $D = 2{,}25$, результаты фрактального анализа основанного на исследовании Фурье-спектров профиля при использовании линейной зависимости (1) $H$ от $\alpha$ составили $D = 2{,}01 \pm 0{,}06$, а для экспоненциальных зависимостей (6), (7) $D = 2{,}23 \pm 0{,}03$. Величина фрактальной размерности этих же моделей, полученная методом горизонтальных сечений (площадь – периметр), составила $D = 2{,}20 \pm 0{,}1$, а методом подсчета фактической площади (клеточным методом) $D = 2{,}24 \pm 0{,}02$. Аналогичные эксперименты были проведены для реальных поверхностей алмазоподобных покрытий (АПП) [8]. Фрактальная размерность АПП, вычисленная методом Фурье анализа профилограмм, составила $D = 2{,}47 \pm 0{,}05$, а вычисленная методом горизонтальных сечений – $D = 2{,}47$–$2{,}49$.

**Заключение.** Предложенная экспоненциальная зависимость размерности поверхности $D$ от параметра крутизны Фурье-спектра функции ее профиля $\alpha$ обладает существенными преимуществами перед известной линейной зависимостью. Во-первых, она учитывает возможность существования поверхностей, показатель крутизны спектра профиля которых $\alpha$ имеет значения больше 3 и дает возможность проводить их фрактальный анализ. Во-вторых, не противоречит результатам существующей линейной зависимости в области значений размерности поверхности $D$ от 2.5 до 3 и позволяет более точно вычислять фрактальную размерность в области от 2 до 2,5.

## Литература


1. Иванова В. С., Балаикин А. С., Бунин И. Ж., Оксогоев А. А. Синергетика и фракталы в материаловедении. М., 1994.
2. Суханов А. Д., Тимашев С. Ф. // Журн. физ. хим., 1998. № 11. С. 132–135.
3. Витязь П. А., Гордиенко А. И., Мрочек Ж. А. и др. // Докл. НАН Беларуси. 2006. Т. 50, № 5. С. 98–100.
4. Sayles R. S., Thomas T. R. // Nature. 1978. Vol. 271. P. 431–434
5. Feder J. Fractals.– N. Y., 1988.
6. Шрсдср М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск, 2001.
7. Lin C. W., Du Y. C. // Materials Chem. and Phys., 1999. Vol. 58. P. 268–275.
8. Киселевский О. С., Казаченко В. П. // Трение и износ. 2006. № 3. С. 304–308.
9. Mandelbrot B. B., Passoja D. E., Pullax A. J. // Nature. 1984. Vol. 308. P. 721.
10. Mecholsky J. J., Passoja D. E., Feinberg–Rigel K. S. // J. Amer. Ceram. Soc. 1988. Vol. 72, N 1. P. 60.
11. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature, updated and augmented. N. Y., 1984.
12. Киселевский О. С., Казаченко В. П., Мамуня Е. П. // Сб. науч. тр. Низкоразмерные системы-2, Гродно, 2004. С. 47–53.
13. Иванова В. С., Встовский Г. В., Колмаков А. Г., Пименов В. Н. Мультифрактальный метод тестирования устойчивости структур в материалах. М., 2000.



*KISELEVSKY O. S., KAZACHENKO V. P.*

kvp@belsut.gomel.by


**FOURIER ANALYSIS OF ULTRASMOOTH FRACTAL SURFACE PROFILES**

## Summary


Numerical simulation of surface profiles with stated fractal dimension was carried out. The dependence of the fourier-spectrum profile behavior on fractal dimension $D$ and codimension $H$ of the surface was investigated. An empirical exponential formula of the dependence of Hurst-parameters on the power-spectrum steepness the profiles was proposed.