Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

УДК 514.765.1

Трехмерные редуктивные пространства разрешимых групп Ли

Н.П. Можей

Представлена локальная классификация трехмерных редуктивных однородных пространств, допускающих нормальную связность, рассмотрен случай разрешимой группы Ли преобразований. Описаны все инвариантные аффинные связности вместе с их тензорами кривизны и кручения, выписаны канонические связности, а также естественные связности без кручения. Исследованы алгебры голономии однородных пространств и найдено, когда связность нормальна.
Ключевые слова: нормальная связность, редуктивное пространство, группа преобразований, алгебра голономии.

Local classification of three-dimensional reductive homogeneous spaces which admit a normal connection is presented. The case when Lie group of transformations is solvable is considered. All invariant affine connections together with their curvature and torsion tensors, canonical connections and natural torsion-free connections are described. The holonomy algebras of homogeneous spaces are studied and it is found when the connection is normal.
Keywords: normal connection, reductive space, transformation group, holonomy algebra.

Введение. В дифференциальной геометрии и ее приложениях изучаются редуктивные пространства, обобщающие римановы глобально симметрические пространства. Среди редуктивных однородных пространств широкий класс образуют пространства с разрешимой группой преобразований, которые и рассматриваются в работе. Исследование таких пространств существенно затруднено тем, что, в отличие от полупростых групп, не разработана структурированная теория их классификации, а сама классификация является громоздкой и трудоемкой. Инвариантные связности на редуктивных однородных пространствах независимо изучались П.К. Рашевским, М. Куритой, Э.Б. Винбергом, а также Ш. Кобаяси, К. Номидзу [1] и др. Понятие нормальной связности ввел Э. Картан для риманова многообразия (см. [2]). Многообразия с плоской нормальной связностью исследовали Д.И. Перепелкин, Ф. Фабрициус-Бьерре, итоги этих исследований подведены в работе Б. Чена [3].

Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, (M, $\bar{G}$) – однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств (M, $\bar{G}$) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли ($\bar{G}$, G), где $G \subset \bar{G}$, так как M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G} / G$ (см., например, [4]). Изучая однородные пространства, важно рассматривать не саму группу $\bar{G}$, а ее образ в $Diff(M)$, т. е. достаточно рассматривать только эффективные действия группы $\bar{G}$ на многообразии M. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. *Изотропное действие* группы G на касательном пространстве T_xM – это фактордействие присоединенного действия G на $\bar{\mathfrak{g}}$: $s.(x+\mathfrak{g}) = (Ads)(x)+\mathfrak{g}$ для всех $s \in G, x \in \bar{\mathfrak{g}}$. При этом алгебра $\mathfrak{g}$ действует на $T_xM = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$:

$$x.(y+\mathfrak{g}) = [x, y]+\mathfrak{g} \text{ для всех } x \in \mathfrak{g}, y \in \bar{\mathfrak{g}}.$$

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Это означает, что естественное действие стабилизатора $\bar{G}_x$, $x \in M$ на T_xM имеет нулевое ядро. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [1].

Пусть $M = \overline{G}/G$ – однородное пространство, на котором связная группа $\overline{G}$ действует транзитивно и эффективно. Пространство $\overline{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathrm{ad}(G)$-инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$; $\mathrm{ad}(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Второе условие влечет $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и наоборот, если G связна. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Аффинной связностью на паре ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Хорошо известно (например, [5]), что инвариантные аффинные связности на однородном пространстве ($M, \overline{G}$) находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$). Если $\overline{G}/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность и линейное представление изотропии для G точное.

Инвариантная связность, определяемая равенством $\Lambda|_{\mathfrak{m}} = 0$, называется *канонической связностью* (относительно разложения $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$), ее также называют *канонической связностью второго рода*. Для канонической связности каждая геодезическая, исходящая из *o*, имеет вид $f_t(o)$, где $f_t = \exp(tx)$, $x \in \mathfrak{m}$. Каждое редуктивное однородное пространство допускает единственную инвариантную аффинную связность без кручения, имеющую те же геодезические, что и каноническая связность: $\Lambda_{\mathfrak{m}}(x)y = 1/2[x, y]_{\mathfrak{m}}$, $x, y \in \mathfrak{m}$. Такая связность называется *естественной связностью без кручения* (относительно разложения $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$), ее также называют *канонической связностью первого рода*.

Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензор кручения $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}, \quad R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \text{ для всех } x, y \in \bar{\mathfrak{g}}.$$

Переформулируем теорему Вана об алгебре группы голономии инвариантной связности: алгебра Ли группы голономии инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Положим $\mathfrak{a}$ равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, порожденной $\{\Lambda(x) \mid x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Первоначально $\mathfrak{a}$ была введена в римановом случае Б. Костантом и использовалась А. Лихнеровичем и Г. Ваном в более общей ситуации. Если $\mathfrak{h}^*$ – алгебра Ли группы голономии, то $\mathfrak{h}^* \subset \mathfrak{a} \subset \mathbb{N}(\mathfrak{h}^*)$, где $N(\mathfrak{h}^*)$ – нормализатор $\mathfrak{h}^*$ в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$. Будем говорить, что связность *нормальна*, если $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}$.

Классификация редуктивных однородных пространств. Будем описывать пару ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, ..., e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, ..., e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [6], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$). Будем описывать аффинную связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R через $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T через $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$.

Теорема. Все трехмерные редуктивные однородные пространства, допускающие нормальную связность, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ разрешимы, а $\dim \mathfrak{g} > 1$, локально имеют следующий вид:

2.9.1.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-2e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0

,

2.20.18, $\alpha = 0.$	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	0
e_2	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	u_1
u_2	$-u_1$	0	0	0	u_2
u_3	0	$-u_1$	$-u_1$	$-u_2$	0

,

2.21.1.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	$-u_1$	0	0	0
u_3	u_3	$-u_2$	0	0	0

,

2.9.2 совпадает с 2.9.1, за исключением $[u_1, u_3] = u_2$,

2.9.4, $\mu = 0, -1.$	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-\mu)e_2$	u_1	0	μu_3
e_2	$(\mu-1)e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	u_1	0
u_2	0	0	$-u_1$	0	$-u_3$
u_3	$-\mu u_3$	$-u_1$	0	u_3	0

,

2.9.5, *2.9.6.*	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	$\pm e_2$
u_2	0	0	0	0	αu_2
u_3	0	$-u_1$	$\mp e_2$	$-\alpha u_2$	0

, $\alpha \geq 0$,

2.9.7.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	u_2
u_3	0	$-u_1$	0	$-u_2$	0

,

2.17.2, *2.17.3.*	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	0	u_1
e_2	0	0	0	0	u_2
u_1	0	0	0	0	$\pm e_1$
u_2	0	0	0	0	αe_2
u_3	$-u_1$	$-u_2$	$\mp e_1$	$-\alpha e_2$	0

,

Пара	*Совпадает с 2.17.2, за исключением*
2.17.4	$[u_1,u_3] = \alpha e_1 - e_2, [u_2,u_3] = e_1 + \alpha e_2, \alpha \geqslant 0$
2.17.6, 2.17.7	$[u_1,u_3] = \pm e_1, [u_2,u_3] = e_1 + e_2$
2.17.8	$[u_1,u_3] = \delta e_1 + u_1, [u_2,u_3] = \beta e_2 + \alpha u_2, -1 < \alpha < 1$
2.17.9	$[u_1,u_3] = \delta e_1 + e_2 + u_1, [u_2,u_3] = \gamma e_1 + \beta e_2 + \alpha u_1, -1 < \alpha < 1$
2.17.10	$[u_1,u_3] = \delta e_1 + u_1, [u_2,u_3] = e_1 + \beta e_2 + \alpha u_2, -1 < \alpha < 1$
2.17.13, 2.17.14	$[u_1,u_3] = \alpha e_1 - e_2, [u_2,u_3] = \alpha e_2 + u_1$
2.17.15	$[u_1,u_3] = \alpha e_1, [u_2,u_3] = e_1 + \alpha e_2 + u_1$
2.17.17	$[u_1,u_3] = e_2, [u_2,u_3] = \alpha e_1 + \beta e_2 + u_1$
2.17.18	$[u_1,u_3] = \gamma e_2 + u_1, [u_2,u_3] = \alpha e_1 + \beta e_2 + u_1 + u_2$
2.17.19	$[u_1,u_3] = \alpha e_1 + u_1, [u_2,u_3] = \beta e_2 + u_1 + u_2$
2.17.20	$[u_1,u_3] = \alpha e_1 + u_1, [u_2,u_3] = \beta e_1 + \alpha e_2 + u_1 + u_2$
2.17.21	$[u_1,u_3] = \alpha e_1 + u_1, [u_2,u_3] = e_1 + \alpha e_2 + u_2$
2.17.22	$[u_1,u_3] = \alpha e_1 - \beta e_2 + u_1, [u_2,u_3] = \beta e_1 + \alpha e_2 + u_2, \beta > 0$
2.17.23	$[u_1,u_3] = \alpha e_1 + u_1, [u_2,u_3] = \beta e_2 + u_2, \lvert\alpha\rvert \leqslant \lvert\beta\rvert$
2.17.24	$[u_1,u_3] = \delta e_1 + \gamma e_2 + \alpha u_1 - u_2, [u_2,u_3] = -\beta e_1 + \delta e_2 + u_1 + \alpha u_2, \lvert\beta\rvert \leqslant \lvert\gamma\rvert$
2.17.25	$[u_1,u_3] = -\alpha e_1 + u_1, [u_2,u_3] = -\beta e_2 - u_2, \lvert\alpha\rvert \leqslant \lvert\beta\rvert$
2.17.26	$[u_1,u_3] = \alpha e_1 + \beta e_2 + u_1, [u_2,u_3] = e_1 + \gamma e_2 - u_2, -1 \leqslant \beta \leqslant 1$

Для получения этого результата из пар, указанных в [7], находим редуктивные, т. е. для которых существует разложение $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. В теореме выписаны именно такие пары, причем с каноническим разложением.

Для найденных пар выписываем аффинные связности, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии, находим канонические связности, а также естественные связности без кручения. Рассмотрим, например, пару 2.9.1 при $\lambda = 0$, $\mu = -1$. Тогда аффинная связность

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}q_{2,2} - q_{1,1}p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1} - q_{2,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}q_{1,1} - q_{2,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2} - p_{1,2}q_{2,2} & 0 \end{pmatrix},$$

а тензор кручения – $(p_{1,2} - q_{1,1}, 0, 0), (0, 2p_{2,3}, 0), (0, 0, q_{1,1} - p_{1,2})$, связность является нормальной при $p_{1,2} \neq 0$, $p_{2,3} \neq 0$, $q_{2,2} = -2q_{1,1}$, тогда алгебра голономии – $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$.

У пары 2.9.2 (μ = -1) связность совпадает с выписанной для 2.9.1, тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}q_{2,2} - q_{1,1}p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1} - q_{2,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3} - q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3} - q_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3} - q_{1,1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}q_{1,1} - q_{2,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2} - p_{1,2}q_{2,2} & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения – $(p_{1,2} - q_{1,1}, 0, 0), (0, 2p_{2,3} - 1, 0), (0, 0, q_{1,1} - p_{1,2})$. Связность является нормальной при $p_{1,2} \neq 0$, $p_{2,3} \neq 0$, $2q_{1,1} + q_{2,2} \neq 0$, тогда алгебра голономии – $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, либо при $p_{1,2} \neq 0$, $p_{2,3} \neq 0$, $2q_{1,1} + q_{2,2} = 0$, тогда алгебра голономии – $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$.

Рассмотрим пару 2.9.4 при μ = -1 связность совпадает с 2.9.1. Тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}q_{2,2} - q_{1,1}p_{1,2} - p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1} - q_{2,2}p_{2,3} - p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}q_{1,1} - q_{2,2}p_{2,3} - p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2} - p_{1,2}q_{2,2} + p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения – $(p_{1,2} - q_{1,1} - 1, 0, 0), (0, 2p_{2,3}, 0), (0, 0, q_{1,1} - p_{1,2} + 1)$. Связность является нормальной при $p_{1,2} \neq 0$, $p_{2,3} \neq 0$, $2q_{1,1} + q_{2,2} = 0$, тогда алгебра голономии – $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$.

2.21.1. При $\lambda = 0$ аффинная связность и тензор кривизны соответственно:

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^{\;2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^{\;2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}^{\;2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^{\;2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2}^{\;2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2}^{\;2} & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения – $(2p_{1,2},0,0),(0,2p_{1,2},0),(0,0,2p_{1,2})$, связность нормальна при $p_{1,2}\neq 0$, тогда алгебра голономии

$$\begin{pmatrix} p_3 & p_1 & 0\\ p_2 & 0 & p_1\\ 0 & p_2 & -p_3\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим пару 2.17.2. Связность

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}\\ 0 & 0 & p_{2,3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3}\\ 0 & 0 & q_{2,3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & r_{1,3}\\ -p_{2,3} & r_{1,1}+p_{1,3}-q_{2,3} & r_{2,3}\\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix},$$

связность нормальна при $a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$, алгебра голономии

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1\\ 0 & 0 & p_2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

У перечисленных ниже пар связность такая же, как в случае 2.17.2.

Пара	Аффинная связность нормальна при
2.17.3.	$a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.4.	$p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.6.	$p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.7.	$p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.8.	$b\neq 0$, $\delta\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.9.	$b\delta\neq\gamma$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.10.	$b\delta\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.13.	$a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.14.	$a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.15.	$a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$,
2.17.17.	$a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.18.	$a\delta\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.19.	$ab\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.20.	$a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.21.	$a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.22.	$a^2+b^2\neq 0$ (всегда, т. к. $b>0$), $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.23.	$ab\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.24.	$\delta^2\neq bc$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.25.	$ab\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.26.	$b\neq ac$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$

Аналогично, у указанных пар алгебра голономии совпадает с выписанной в случае 2.17.2. Аффинные связности на остальных пространствах имеют вид:

Пара	Аффинная связность
2.20.18 при α=0.	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ 0 & q_{11}+p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & q_{11} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{11} & 0 \\ 0 & p_{12} & r_{11}+p_{13} \end{pmatrix}$
2.9.5, 2.9.6, 2.9.7	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & q_{11} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & p_{12} & r_{11}+p_{13} \end{pmatrix}$

Тензоры кривизны и кручения на этих редуктивных пространствах:

Пара	Тензор кривизны
2.20.18 при a = 0.	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12}^2 & p_{12}p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & p_{12}p_{13}-p_{12} & p_{13}^2-p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -q_{11} & q_{13}p_{12}-r_{12}p_{12}-q_{12} & q_{13}p_{13}-r_{12}p_{13}-q_{13} \\ 0 & p_{12}p_{13}-q_{11}-p_{12} & p_{13}^2-p_{13} \\ 0 & -p_{12}^2 & -p_{12}p_{13}-q_{11} \end{pmatrix}$,
2.9.5.	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12}q_{22}-q_{11}p_{12} & p_{12}q_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & p_{12}r_{22}+p_{13}p_{12}-r_{11}p_{12} & p_{12}r_{23}+p_{13}^2-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -aq_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{12}q_{23}-aq_{22} & q_{22}r_{23}+q_{23}r_{11}+q_{23}p_{13}-r_{22}q_{23}-r_{23}q_{11}-aq_{23} \\ 0 & q_{11}p_{12}-p_{12}q_{22} & -p_{12}q_{23}-aq_{11} \end{pmatrix}$,
2.9.6	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12}q_{22}-q_{11}p_{12} & p_{12}q_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & p_{12}r_{22}+p_{13}p_{12}-r_{11}p_{12} & p_{12}r_{23}+p_{13}^2+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -aq_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{12}q_{23}-aq_{22} & q_{22}r_{23}+q_{23}r_{11}+q_{23}p_{13}-r_{22}q_{23}-r_{23}q_{11}-aq_{23} \\ 0 & q_{11}p_{12}-p_{12}q_{22} & -p_{12}q_{23}-aq_{11} \end{pmatrix}$
2.9.7	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12}q_{22}-q_{11}p_{12} & p_{12}q_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & p_{12}r_{22}+p_{13}p_{12}-r_{11}p_{12} & p_{12}r_{23}+p_{13}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{12}q_{23}-q_{22} & q_{22}r_{23}+q_{23}r_{11}+q_{23}p_{13}-r_{22}q_{23}-r_{23}q_{11}-q_{23} \\ 0 & q_{11}p_{12}-p_{12}q_{22} & -p_{12}q_{23}-q_{11} \end{pmatrix}$
Пара	**Тензор кручения**
2.20.18 при α = 0.	$(p_{12}-q_{11},0,0)$, $(p_{13}-r_{11}-1,0,0)$, $(q_{13}-r_{12},p_{13}-r_{11}-1,q_{11}-p_{12})$
2.9.5, 2.9.6.	$(p_{12}-q_{11},0,0)$, $(p_{13}-r_{11},0,0)$, $(0,q_{23}-r_{22}-a,q_{11}-p_{12})$
2.9.7.	$(p_{12}-q_{11},0,0)$, $(p_{13}-r_{11},0,0)$, $(0,q_{23}-r_{22}-1,q_{11}-p_{12})$

Связность является канонической, если $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$. Выпишем, при каких условиях связность имеет те же геодезические, что и каноническая, а также, когда связность является естественной связностью без кручения:

	Связность имеет те же геодезические, что и каноническая	Естественная связность без кручения
2.9.1	$q_{11} = -p_{12}$, $q_{22} = 0$	$p_{12} = 0$, $p_{23} = 0$, $q_{11} = 0$, $q_{22} = 0$
2.9.2	$q_{11} = -p_{12}$, $q_{22} = 0$	$p_{12} = 0$, $p_{23} = 1/2$, $q_{11} = 0$, $q_{22} = 0$
2.9.4 при μ = 0	$q_{11} = -p_{12}$, $q_{22} = 0$, $r_{22} = -q_{23}$, $r_{11} = -p_{13}$, $r_{23} = 0$	$p_{12} = 1/2$, $q_{11} = -1/2$, $p_{13} = r_{23} = q_{22} = q_{23} = r_{11} = r_{22} = 0$
2.9.4 при μ = -1	$q_{11} = -p_{12}$, $q_{22} = 0$	$p_{12} = 1/2$, $p_{23} = 0$, $q_{11} = -1/2$, $q_{22} = 0$
2.9.5–2.9.6	$q_{11} = -p_{12}$, $r_{11} = -p_{13}$, $r_{22} = -q_{23}$, $q_{22} = r_{23} = 0$	$p_{12} = p_{13} = q_{11} = q_{22} = 0$, $q_{23} = a/2$, $r_{11} = 0$, $r_{22} = -a/2$, $r_{23} = 0$
2.9.7	$q_{11} = -p_{12}$, $r_{11} = -p_{13}$, $r_{22} = -q_{23}$, $q_{22} = r_{23} = 0$	$p_{12} = p_{13} = q_{11} = q_{22} = 0$, $q_{23} = 1/2$, $r_{11} = 0$, $r_{22} = -1/2$, $r_{23} = 0$
2.17.2–2.17.4	$r_{11} = -p_{13}$, $r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = p_{23} = q_{13} = q_{23} = r_{11} = r_{13} = r_{23} = 0$

Окончание таблицы

2.17.6, 2.17.7	$r_{11} = -p_{13},\ r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = p_{23} = q_{13} = q_{23} = r_{11} = r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.8, 2.17.10	$r_{11} = -p_{13},\ r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = 1/2, p_{23} = q_{13} = 0, q_{23} = a/2, r_{11} = -1/2, r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.9	$r_{11} = -p_{13},\ r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = 1/2, p_{23} = 0, q_{13} = a/2, q_{23} = 0, r_{11} = -1/2, r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.13–2.17.15	$r_{11} = -p_{13},\ r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = p_{23} = 0,\ q_{13} = 1/2,\ q_{23} = r_{11} = r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.17	$r_{11} = -p_{13},\ r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = p_{23} = 0,\ q_{13} = 1/2,\ q_{23} = r_{11} = r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.18–2.17.20	$r_{11} = -p_{13},\ r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = 1/2,\ p_{23} = 0,\ q_{13} = 1/2,\ q_{23} = 1/2,\ r_{11} = -1/2,\ r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.21–2.17.23	$r_{11} = -p_{13},\ r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = 1/2, p_{23} = q_{13} = 0, q_{23} = 1/2, r_{11} = -1/2, r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.24	$r_{11} = -p_{13},\ r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = a/2,\ p_{23} = -1/2,\ q_{13} = 1/2,\ q_{23} = a/2,\ r_{11} = -a/2,\ r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.25–2.17.26	$r_{11} = -p_{13},\ r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = 1/2,\ p_{23} = q_{13} = 0,\ q_{23} = -1/2,\ r_{11} = -1/2,\ r_{13} = r_{23} = 0$
2.20.18 при $\alpha = 0$	$q_{11} = -p_{12},\ r_{11} = -p_{13},\ r_{12} = -q_{13},\ q_{12} = r_{13} = 0$	$p_{12} = 0, p_{13} = 1/2, q_{11} = q_{12} = q_{13} = 0, r_{11} = -1/2, r_{12} = r_{13} = 0$
2.21.1	p_{12} – любое	$p_{12} = 0$

Заключение. Таким образом, найдены трехмерные редуктивные однородные пространства с разрешимой группой преобразований, инвариантные аффинные связности на таких однородных пространствах вместе с их тензорами кривизны и кручения, алгебрами голономии, выписаны канонические связности, а также естественные связности без кручения. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, при изучении пространств с аффинной связностью, а также могут иметь приложения в общей теории относительности, которая, с математической точки зрения, базируется на геометрии искривленных пространств, в ядерной физике, физике элементарных частиц и др.

Литература

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – 2 т.
2. Картан, Э. Риманова геометрия в ортогональном репере / Э. Картан. – М. : Моск. ун-т, 1960. – 307 с.
3. Chen, B.Y. Geometry of submanifoids / B.Y. Chen // Pure and Appl. Math. – 1973. – Vol. 10, № 22. – 308 p.
4. Онищик, А.Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А.Л. Онищик. – М. : Физ.-мат. лит., 1995. – 344 с.
5. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. Journ. Math. – 1954. – Vol. 76, № 1. – P. 33–65.
6. Можей, Н.П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них / Н.П. Можей. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 394 с.
7. Mozhey, N.P. Normal connections on three-dimensional manifolds with solvable transformation group / N.P. Mozhey // Lobachevskii Journal of Mathematics – 2016. – Vol. 37, № 2. – P. 160–177.

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Поступила в редакцию 05.10.2016