

электролитах на основе этиленгликоля // Физика и химия обработки материалов. – 2012. - №6. - С. 51-53.

8. Мамина С.П., Одынец Л.Л. Электрохимическое окисление кремния в этиленгликоле. Электрохимия, 1966, т.2, вып.3, с.346-350.

Features of kinetics and mechanisms of Si_3N_4 - Sinostructures anodizing in alloying electrolytes

A.V. Makharinets, L.P. Mileszko, Yu.N. Varzarev

Mechanisms of formation of phosphorus or boron-doped anodic oxide films in galvanostatic mode anodic oxidation of nanometer thickness silicon nitride films are investigated. Expressions, that describe mathematically dependents of AOF growth on the concentration, are proposed. Formulas of chemical reactions explaining these processes are suggested.

Keywords: silicon nitride anodizing, galvanostatic mode, anodic oxide film, anodic oxidation of silicon nitride, alloy electrolytes, phosphate electrolyte, borate electrolyte

Махаринец А.В., Милешко Л.П., Нарзаев Ю.Н., 2015

УДК 514.76

ТЕНЗОРЫ РИЧЧИ ТРЕХМЕРНЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Можей Наталья Павловна

Кандидат физ.-мат. наук, доцент

Институт бизнеса и менеджмента

технологий Белорусского государственного университета

Приведена полная локальная классификация римановых однородных пространств, эквивалентная описанию эффективных пар алгебр Ли, допускающих инвариантную невырожденную билинейную форму на изотропном модуле. Описаны все инвариантные аффинные связности на таких однородных пространствах вместе с их тензорами Риччи. В работе использован алгебраический подход для описания однородных пространств, методы теории групп Ли и алгебр Ли. Предложенная методика также может быть использована для других размерностей.

Ключевые слова: риманово многообразие, однородное пространство, группа Ли, алгебра Ли, тензор Риччи.

Идея многообразия как геометрического объекта, обладающего своей собственной внутренней геометрией, принадлежит Б. Риману. Г. И. Кручкович [1] получил классификацию трехмерных римановых пространств по группам движений. Поток Риччи ввел Р. Гамильтон, он же получил глубокие результаты в теории трехмерных многообразий. Поток Риччи задается через тензор Риччи, который определяет кривизну многообразия.

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа \bar{G} , (M, \bar{G}) – однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств (M, \bar{G}) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли (\bar{G}, G) , где $G \subset \bar{G}$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли \bar{G} , а \mathfrak{g} – подалгебра, соответствующая подгруппе G . Инвариантные римановы метрики \mathfrak{g} на M находятся во взаимно-однозначном соответствии с инвариантными симметрическими невырожденными билинейными формами B на G -модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Каждое риманово однородное пространство $(\bar{G}, M, \mathfrak{g})$, $\text{codim}_{\mathfrak{g}} \bar{\mathfrak{g}} \leq 4$ описывается тройкой $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$, будем называть такую тройку *локально римановым однородным пространством*. Любое локально однородное пространство, допускающее риманову метрику, т.ч. $\text{codim}_{\mathfrak{g}} \bar{\mathfrak{g}} = 3$ и $\mathfrak{g} \neq \{0\}$, эквивалентно одной из троек, приведенных в [2] (e_1, e_2, e_3 – базис \mathfrak{g} , u_1, u_2, u_3 – дополнительный к \mathfrak{g}). Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ будем называть такое отображение $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, где $V = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$, что его ограничение на \mathfrak{g} есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является \mathfrak{g} -инвариантным. Прямыми вычислениями получаем, что инвариантные аффинные связности трехмерных римановых однородных пространств в базисе u_1, u_2, u_3 имеют следующий вид:

3.5.1, 3.5.2, 3.5.3. Связность

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & -p_{2,3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p_{2,3} & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3.1 – 1.3.7. Связность

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 \\ -r_{1,2} & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G , то они однозначно определяются тензорами на

касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензор кручения $T(x,y)=L(x)y-L(y)x-[x,y]$, тензор кривизны $R(x,y)=[L(x),L(y)]-L([x,y])$. Тензорное поле Риччи S - ковариантное тензорное поле степени 2, т.ч. $S(x,y) = \text{tr } v \rightarrow R(v,x)y$ для $x,y,v \in Tx(M)$.

Теорема. Тензоры Риччи римановых однородных пространств имеют вид:

$\lambda \neq 0$	$-2\mu\lambda^2$	0	0	$\lambda \neq 0$	$-2\mu\lambda^2$	0	0
0	$-2\mu\lambda^2$	0	0	$\lambda \neq 0$	0	$-2\mu\lambda^2$	0
0	0	$-2\mu\lambda^2$	0	0	0	0	$-2\mu\lambda^2$
1.3.1.	A— $\mu\lambda^2\mu_1 + \mu\lambda^2\mu_2 + \mu\lambda^2\mu_3 + \mu\lambda^2\mu_4 + \mu\lambda^2\mu_5 + \mu\lambda^2\mu_6$, B— $-\mu\lambda^2\mu_1 + \mu\lambda^2\mu_2 + \mu\lambda^2\mu_3 + \mu\lambda^2\mu_4 + \mu\lambda^2\mu_5 + \mu\lambda^2\mu_6$						
A	$\mu\lambda^2\mu_1$	$\mu\lambda^2\mu_2$	$\mu\lambda^2\mu_3$	$\mu\lambda^2\mu_4$	$\mu\lambda^2\mu_5$	$\mu\lambda^2\mu_6$	0
B	$-\mu\lambda^2\mu_1$	$\mu\lambda^2\mu_2$	$\mu\lambda^2\mu_3$	$\mu\lambda^2\mu_4$	$\mu\lambda^2\mu_5$	$\mu\lambda^2\mu_6$	0
0	0	0	0	0	$2\mu\lambda^2\mu_1$	$-2\mu\lambda^2\mu_2$	$-2\mu\lambda^2\mu_3$
1.3.2.	A— $\mu\lambda^2\mu_1 + \mu\lambda^2\mu_2 + \mu\lambda^2\mu_3 + \mu\lambda^2\mu_4 + \mu\lambda^2\mu_5 + \mu\lambda^2\mu_6$, B— $-\mu\lambda^2\mu_1 + \mu\lambda^2\mu_2 + \mu\lambda^2\mu_3 + \mu\lambda^2\mu_4 + \mu\lambda^2\mu_5 + \mu\lambda^2\mu_6$						
A	$\mu\lambda^2\mu_1$	$\mu\lambda^2\mu_2$	$\mu\lambda^2\mu_3$	$\mu\lambda^2\mu_4$	$\mu\lambda^2\mu_5$	$\mu\lambda^2\mu_6$	0
B	$-\mu\lambda^2\mu_1$	$\mu\lambda^2\mu_2$	$\mu\lambda^2\mu_3$	$\mu\lambda^2\mu_4$	$\mu\lambda^2\mu_5$	$\mu\lambda^2\mu_6$	0
0	0	0	0	0	$2\mu\lambda^2\mu_1$	$-2\mu\lambda^2\mu_2$	$-2\mu\lambda^2\mu_3$
1.3.3.	A— $\mu\lambda^2\mu_1 + \mu\lambda^2\mu_2 + \mu\lambda^2\mu_3 + \mu\lambda^2\mu_4 + \mu\lambda^2\mu_5 + \mu\lambda^2\mu_6$, B— $\mu\lambda^2\mu_1 + \mu\lambda^2\mu_2 + \mu\lambda^2\mu_3 + \mu\lambda^2\mu_4 + \mu\lambda^2\mu_5 + \mu\lambda^2\mu_6$						
A	$\mu\lambda^2\mu_1$	$\mu\lambda^2\mu_2$	$\mu\lambda^2\mu_3$	$\mu\lambda^2\mu_4$	$\mu\lambda^2\mu_5$	$\mu\lambda^2\mu_6$	0
B	$\mu\lambda^2\mu_1$	$\mu\lambda^2\mu_2$	$\mu\lambda^2\mu_3$	$\mu\lambda^2\mu_4$	$\mu\lambda^2\mu_5$	$\mu\lambda^2\mu_6$	0
0	0	0	0	0	$2\mu\lambda^2\mu_1$	$2\mu\lambda^2\mu_2$	$2\mu\lambda^2\mu_3$
1.3.4.	A— $\mu\lambda^2\mu_1 + \mu\lambda^2\mu_2 + \mu\lambda^2\mu_3 + \mu\lambda^2\mu_4 + \mu\lambda^2\mu_5 + \mu\lambda^2\mu_6$, B— $\mu\lambda^2\mu_1 + \mu\lambda^2\mu_2 + \mu\lambda^2\mu_3 + \mu\lambda^2\mu_4 + \mu\lambda^2\mu_5 + \mu\lambda^2\mu_6$						
A	$\mu\lambda^2\mu_1$	$\mu\lambda^2\mu_2$	$\mu\lambda^2\mu_3$	$\mu\lambda^2\mu_4$	$\mu\lambda^2\mu_5$	$\mu\lambda^2\mu_6$	0
B	$\mu\lambda^2\mu_1$	$\mu\lambda^2\mu_2$	$\mu\lambda^2\mu_3$	$\mu\lambda^2\mu_4$	$\mu\lambda^2\mu_5$	$\mu\lambda^2\mu_6$	0
0	0	0	0	0	$2\mu\lambda^2\mu_1$	$2\mu\lambda^2\mu_2$	$2\mu\lambda^2\mu_3$
1.3.5.	A— $\mu\lambda^2\mu_1 + \mu\lambda^2\mu_2 + \mu\lambda^2\mu_3 + \mu\lambda^2\mu_4 + \mu\lambda^2\mu_5 + \mu\lambda^2\mu_6$, B— $\mu\lambda^2\mu_1 + \mu\lambda^2\mu_2 + \mu\lambda^2\mu_3 + \mu\lambda^2\mu_4 + \mu\lambda^2\mu_5 + \mu\lambda^2\mu_6$						
A	$\mu\lambda^2\mu_1$	$\mu\lambda^2\mu_2$	$\mu\lambda^2\mu_3$	$\mu\lambda^2\mu_4$	$\mu\lambda^2\mu_5$	$\mu\lambda^2\mu_6$	0
B	$\mu\lambda^2\mu_1$	$\mu\lambda^2\mu_2$	$\mu\lambda^2\mu_3$	$\mu\lambda^2\mu_4$	$\mu\lambda^2\mu_5$	$\mu\lambda^2\mu_6$	0
0	0	0	0	0	$2\mu\lambda^2\mu_1$	$-2\mu\lambda^2\mu_2$	$-2\mu\lambda^2\mu_3$
1.3.6.	A— $\mu\lambda^2\mu_1 + \mu\lambda^2\mu_2 + \mu\lambda^2\mu_3 + \mu\lambda^2\mu_4 + \mu\lambda^2\mu_5 + \mu\lambda^2\mu_6$, B— $\mu\lambda^2\mu_1 + \mu\lambda^2\mu_2 + \mu\lambda^2\mu_3 + \mu\lambda^2\mu_4 + \mu\lambda^2\mu_5 + \mu\lambda^2\mu_6$						
A	$\mu\lambda^2\mu_1$	$\mu\lambda^2\mu_2$	$\mu\lambda^2\mu_3$	$\mu\lambda^2\mu_4$	$\mu\lambda^2\mu_5$	$\mu\lambda^2\mu_6$	0
B	$\mu\lambda^2\mu_1$	$\mu\lambda^2\mu_2$	$\mu\lambda^2\mu_3$	$\mu\lambda^2\mu_4$	$\mu\lambda^2\mu_5$	$\mu\lambda^2\mu_6$	0
0	0	0	0	0	$2\mu\lambda^2\mu_1$	$2\mu\lambda^2\mu_2$	$2\mu\lambda^2\mu_3$