

УДК 004.02

СИНТЕЗ ПАРАУНИТАРНЫХ БАНКОВ ФИЛЬТРОВ В АЛГЕБРЕ КВАТЕРНИОНОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СТРУКТУР С ФИКСИРОВАННОЙ ЗАПЯТОЙ

Е.В. РЫБЕНКОВ, Н.А. ПЕТРОВСКИЙ

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь*

Поступила в редакцию 6 сентября 2016

Предлагается метод синтеза параунитарных банков фильтров на основе алгебры кватернионов (Q-ПУБФ) для вычислительных структур с фиксированной запятой. Задача синтеза решается с помощью метода множителей Лагранжа. Показано, что Q-ПУБФ представляет собой целочисленное преобразование и может быть использовано для кодирования изображений по схеме L2L (lossless-to-lossy).

Ключевые слова: банк фильтров, метод множителей Лагранжа, кватернион.

Введение

Многие современные стандарты сжатия изображений на основе банка фильтров (БФ), например JPEG2000, способны работать в режимах как без потерь, так и с потерями, однако для этого необходимо применять различные типы фильтров. Фильтр 5/3 имеет целочисленные коэффициенты и позволяет сжимать изображения без потерь, однако обладает низким ослаблением в полосе задержки. Режим с потерями подразумевает устранение избыточности, содержащейся в изображении. При этом, в БФ используется фильтр 9/7. Однако в таких приложениях, как обработка снимков с космического аппарата, медицинских изображений, требующих максимального сохранения оригинала, внесение искажений неприемлемо. В настоящее время представляют интерес схемы, работающие по принципу L2L (lossless-to-lossy), осуществляющие сжатие и восстановление изображений как без потерь, так и с контролируемым внесением искажений [1]. В работе [2] представлен новый класс БФ – параунитарные банки фильтров на основе алгебры кватернионов (Q-ПУБФ), которые обладают свойствами полного восстановления; максимально децимированные и равнополосные, имеют линейную фазочастотную характеристику (ФЧХ), для которых выполняется условие регулярности 1-го порядка (отсутствие в БФ эффекта «DC leakage»). Q-ПУБФ являются структурами без потерь, даже при выполнении вычислений с конечной точностью. Точное соотношение между энергиями во всем частотном диапазоне и в субполосах сильно упрощает теоретические выкладки и делает Q-ПУБФ полезными в применении к компрессии изображений [2].

Алгебра кватернионов \mathbb{H} является ассоциативной некоммутативной четырехмерной алгеброй $\mathbb{H} = \{Q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k \mid q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}\}$, где ортогональные мнимые части подчиняются следующим законам умножения $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1; ij = -ji = k; jk = -kj = i; ki = -ik = j$ [3]. Операция умножения кватернионов некоммутативна и в матричной форме описывается матрицами размера 4×4 умножения «слева» $P \cdot Q = \mathbf{M}^+(P) \cdot Q$ и «справа» $P \cdot Q = \mathbf{M}^-(Q) \cdot P$, которые связаны между собой следующим образом [4]:

$\mathbf{M}^\mp(Q) = \mathbf{D}_c \cdot \mathbf{M}^\pm(\bar{Q}) \cdot \mathbf{D}_c$, где \bar{Q} – сопряженный кватернион: $\bar{Q} = \mathbf{D}_c \cdot Q$ и $\mathbf{D}_c = \text{diag}(1, \mathbf{I}_3)$ – оператор гиперкомплексного сопряжения.

Реализация Q-ПУБФ в арифметике с фиксированной запятой требует квантования коэффициентов БФ, что в свою очередь предполагает учет следующих особенностей: вырождение параметров БФ; аппроксимация операции умножения сдвигами и сложениями. Последнее напрямую влияет на эффективность аппаратной реализации и вычислительную сложность БФ. Комбинация минимального искажения параметров Q-ПУБФ и эффективной аппаратной реализации – ключевой приоритет данной статьи. Учесть данные ограничения можно только на этапе синтеза коэффициентов.

Таким образом, целью данной работы является разработка метода синтеза Q-ПУБФ для вычислительных структур с фиксированной запятой.

Параунитарный банк фильтров на основе алгебры кватернионов

В работе [4] утверждается, что для каждой ортогональной матрицы размерностью 4×4 существует уникальная (с точностью до знака) пара единичных кватернионов P и Q ($|P|=1$, $|Q|=1$) таких, что $\mathbf{M}^+(P) \cdot \mathbf{M}^-(Q) = \mathbf{M}^-(Q) \cdot \mathbf{M}^+(P)$. Факторизация полифазных передаточных матриц анализа $\mathbf{E}(z)$ для 8-ми канального Q-ПУБФ с линейной ФЧХ и попарно зеркальной симметрией частотных характеристик фильтров может быть описана следующим образом [4]:

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{G}_{N-1}(z) \mathbf{G}_{N-2}(z) \dots \mathbf{G}_1(z) \mathbf{E}_0; \mathbf{E}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_0 \mathbf{W} \text{diag}(\mathbf{I}_4, \mathbf{J}_4),$$

$$\mathbf{G}_i = \frac{1}{2} \Phi_i \mathbf{W} \Lambda(z) \mathbf{W}, i = (1, \dots, N-1); \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{I}_4 & -\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}; \Lambda(z) = \text{diag}(\mathbf{I}_4, z^{-1} \mathbf{I}_4), \quad (1)$$

$$\Phi_i = \text{diag}(\Gamma, \mathbf{I}_4) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^-(Q_i), \mathbf{M}^-(Q_i)) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^+(P_i), \mathbf{M}^+(P_i)) \cdot \text{diag}(\Gamma, \mathbf{I}_4),$$

$$\Phi_{N-1} = \text{diag}(\mathbf{J}_4, \mathbf{I}_4) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^-(Q_i), \mathbf{M}^-(Q_i)) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^+(P_i), \mathbf{M}^+(P_i)) \cdot \text{diag}(\Gamma, \mathbf{I}_4),$$

где N – порядок факторизации; \mathbf{J}_4 – обратная единичная матрица; Γ – диагональная матрица, элементы которой определяются как $\gamma_{mm} = (-1)^{m-1}$, $m = 1, \dots, 8$; \mathbf{I}_4 – единичная матрица. При этом, для Q-ПУБФ условие регулярности 1-го порядка выполняется, если кватернион

$$Q_{N-1} = \pm \frac{1}{2} \overline{Q_{N-2}} \dots \overline{Q_0} \cdot c_1 \cdot \overline{P_0} \dots \overline{P_{N-1}} \cdot c_2, \quad (2)$$

где c_1 и c_2 – кватернионы вида: $c_1 = 1 + i - j + k$; $c_2 = k$.

Лестничная схемная параметризация множителя кватернионов

В работе [5] показано, что, например, «левый» оператор умножения кватерниона Q может быть представлен следующей структурой:

$$\mathbf{M}^+(Q) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}(Q) & -\mathbf{S}(Q) \\ \mathbf{S}(Q) & \mathbf{C}(Q) \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{F}(Q) \\ 0 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 \\ \mathbf{G}(Q) & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{H}(Q) \\ 0 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\text{где } \mathbf{C}(Q) = \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 \\ q_2 & q_1 \end{bmatrix}; \mathbf{S}(Q) = \begin{bmatrix} q_3 & q_4 \\ q_4 & -q_3 \end{bmatrix}.$$

Выражение (3) может рассматриваться как расширение 2D вращения на случай 4D. Для заданного кватерниона Q и матрицы умножения $\mathbf{M}^+(Q)$ определяется набор матричных выражений, которые могут быть решены однозначно для $\mathbf{F}(Q)$, $\mathbf{G}(Q)$, и $\mathbf{H}(Q)$, при условии, что матрица $\mathbf{S}(Q)$ является несингулярной, или более определенно, ненулевой:

$$\mathbf{F}(Q) = (\mathbf{C}(Q) \mp \mathbf{I}_2) \mathbf{S}(Q)^{-1}; \mathbf{G}(Q) = \mathbf{S}(Q); \mathbf{H}(Q) = \mathbf{S}(Q)^{-1} (\mathbf{C}(Q) \mp \mathbf{I}_2). \quad (4)$$

Элементы данных матриц представляют собой вещественные коэффициенты лестничной схемной параметризации «левого» оператора умножения кватерниона Q .

К достоинствам лестничной схемной параметризации (3) и (4) матриц умножения кватернионов следует отнести: уменьшение вычислительной сложности операции умножения кватернионов; ошибки округления лестничных коэффициентов или соответствующих результатов умножений взаимно компенсируются секциями анализа и синтеза, что приводит к совершенному восстановлению сигнала. Однако применение лестничной схемной параметризации приводит к увеличению динамического диапазона коэффициентов матриц $\mathbf{F}(Q)$, $\mathbf{G}(Q)$, и $\mathbf{H}(Q)$, что неприемлемо для арифметики с фиксированной запятой. Приведение параметров множителя к требуемому динамическому диапазону может быть достигнуто, если оператор умножения кватерниона Q выбирать согласно следующему выражению [5]:

$$\mathbf{M}^+(Q) = \begin{cases} \mathbf{P}_{post} \cdot \mathbf{M}^+(\tilde{Q}) \cdot \mathbf{P}_{pre}, & \text{если } \det(\mathbf{P}) = 1 \\ \mathbf{P}_{post} \cdot \mathbf{M}^-(\tilde{Q}) \cdot \mathbf{P}_{pre}, & \text{если } \det(\mathbf{P}) = -1 \end{cases} \quad (5)$$

где \tilde{Q} – кватернионы, коэффициенты которого переставлены некоторым образом, например: $Q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$ и $\tilde{Q} = q_4 + q_2i + q_1j + q_3k$; \mathbf{P} – матрица перестановки ($\tilde{Q} = \mathbf{P} \cdot Q$); \mathbf{P}_{post} , \mathbf{P}_{pre} – матрицы перестановок (пре- и постобработки): $Qx = \mathbf{M}^\pm(Q) \mathbf{x} = \mathbf{P}_{post} \mathbf{M}^\pm(\tilde{Q}) \mathbf{P}_{pre} \mathbf{x}$.

Постановка задачи оптимизации

Задача синтеза Q-ПУБФ может быть задана следующим образом: найти набор кватернионов P_i и Q_i для Q-ПУБФ и разрядность слова B лестничных коэффициентов (4), при которых обеспечивается высокое значение показателя эффективности кодирования CG (coding gain) для следующих ограничений:

1) максимальная степень ослабления в полосе задержки каналов ε_{SBE} , выраженная в терминах энергии: $\varepsilon_{SBE} = \sum_{k=0}^{M-1} \int_{\omega \in \Omega_k} |H_k(e^{j\omega})|^2 d\omega$, где Ω_k – полоса задержки k -ого фильтра БФ;

2) минимальная ошибка восстановления сигнала ε_q в результате квантования лестничных коэффициентов: $\varepsilon_q = \max(|y(n) - x(n)|)$, где $y(n)$ – данные на выходе БФ синтеза; $x(n)$ – данные на входе БФ анализа;

3) минимальное число K бит равных единице в двоичном коде лестничных коэффициентов Q-ПУБФ.

Показатель эффективности кодирования – важный параметр, используемый в приложениях сжатия информации: $CG = 10 \lg \left(\left(\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sigma_{xk}^2 \right) / \left(\prod_{k=0}^{M-1} \sigma_{xk}^2 \right)^{\frac{1}{M}} \right)$, где σ_{xk}^2 – дисперсия сигнала в k -ом канале банка фильтров. Чем выше CG , тем преобразование концентрирует больше энергии в меньшем числе коэффициентов преобразования [6]. Квантование лестничных коэффициентов приводит к изменению характеристик Q-ПУБФ и изменению норм строк и столбцов матриц $\mathbf{M}^\pm(Q)$. Полярная форма представления кватерниона позволяет сократить число степеней свободы до трех. Задание углов в пределах

$-\pi \leq \varphi < \pi$, $-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$, и $-\pi/2 \leq \chi \leq \pi/2$ достаточно, чтобы описать любой кватернион заданного модуля $|Q|$ и трех углов φ , ψ , χ в полярной форме:

$$Q = |Q| \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{j\psi} \cdot e^{k\chi}. \quad (6)$$

Значение ошибки восстановления сигнала ε_q зависит от выбора начальной точки x_0 вектора параметров Q-ПУБФ $x^* = [\varphi_1, \psi_1, \chi_1, \dots, \varphi_i, \psi_i, \chi_i]^T \in X$; $i = (0, \dots, 2N-1)$. Значения K и B напрямую влияют на аппаратную реализацию Q-ПУБФ. Малое число K позволяет эффективно аппроксимировать операцию умножения на кватернион-константу операциями сложения и сдвига.

Таким образом, задача синтеза может быть сформулирована как задача поиска условного экстремума:

найти такую точку $x^* = [\varphi_1^*, \psi_1^*, \chi_1^*, \dots, \varphi_i^*, \psi_i^*, \chi_i^*]^T \in X$; $i = (0, \dots, 2N-1)$, в которой целевая функция $f(x^*) = \min_{x \in X} f(x)$, $f(x) = -CG(x)$ имеет локальный минимум при заданных ограничениях $X = \{x \mid g_j(x) \leq 0, j = (1, \dots, p)\}$:

$$g_1(x) = \varepsilon_{SBE}(x) - \varepsilon_{\min SBE} \leq 0; \quad g_2(x) = \varepsilon_q(x) - \varepsilon_{\max q} \leq 0; \quad g_3(x) = K(x) - K_{\max} \leq 0,$$

где $\varepsilon_{\min SBE}$ – минимально допустимое ослабление в полосе пропускания во всех каналах; $\varepsilon_{\max q}$ – максимально допустимый уровень ошибки восстановления сигнала; K_{\max} – максимально допустимое число бит равных единице в лестничных коэффициентах, представленных в прямом двоичном коде; ограничения на углы φ, ψ, χ для всех кватернионов в полярной форме (6).

В качестве метода оптимизации выбран модифицированный метод множителей Лагранжа [7]. Модифицированная функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x, \mu^k, r^k) = f(x) + P(x, \mu^k, r^k), \quad (7)$$

$$P(x, \mu^k, r^k) = \frac{1}{2r^k} \sum_{j=1}^p \left\{ \left[\max(0, \mu_j^k + r^k g_j(x)) \right]^2 - (\mu_j^k)^2 \right\}, \quad (8)$$

где $P(x, \mu^k, r^k)$ – штрафная функция; $\mu^k = (\mu_1^k, \dots, \mu_p^k)^T$ – вектор множителей Лагранжа; r^k – параметр штрафа; k – номер итерации.

Алгоритм расчета коэффициентов Q-ПУБФ.

1. Задать начальные значения следующих параметров: начальную точку $x = x_0$; начальное значение штрафа $r = [0.1; 1]$; шаг приращения параметра штрафа $C = [4; 10]$; погрешность решения $\varepsilon > 0$ (остановка алгоритма); начальное значение вектора множителей Лагранжа μ ; разрядность слова B лестничных коэффициентов; порядок факторизации N ; $\varepsilon_{\min SBE}$; $\varepsilon_{\max q}$; K_{\max} ; $k = 0$.

2. Составить модифицированную функцию Лагранжа $L(x, \mu^k, r^k)$ (7).

3. Найти точку $x^*(\mu^k, r^k)$ безусловного минимума функции $L(x, \mu^k, r^k)$ по x :

$$L(x^*, \mu^k, r^k) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} L(x, \mu^k, r^k),$$

при этом для определения параметров $CG(x)$, $\varepsilon_{SBE}(x)$, $\varepsilon_q(x)$, $K(x)$, функций ограничений $g_j(x)$, выполнить:

- преобразование вектора $x = [\varphi_1, \psi_1, \chi_1, \dots, \varphi_i, \psi_i, \chi_i]^T$ в кватернионы P_i, Q_i (6);
 - вычислить кватернион Q_{N-1} согласно (2);
 - вычислить значения коэффициентов лестничных структур $F_i(\tilde{Q}), G_i(\tilde{Q}), H_i(\tilde{Q})$ и матрицы перестановок P_{post}, P_{pre} для каждого кватерниона P_i и Q_i ;
 - вычислить для вектора параметров $x = [\varphi_1, \psi_1, \chi_1, \dots, \varphi_i, \psi_i, \chi_i]^T$ выход $y(n)$ Q-ПУБФ системы анализ-синтез;
 - определить параметры $CG(x), \varepsilon_{SBE}(x), \varepsilon_q(x), K(x)$.
4. Вычислить значение функции $P(x^*, \mu^k, r^k)$ согласно (8):
- если $|P(x^*(\mu^k, r^k), \mu^k, r^k)| \leq \varepsilon$ тогда
- вернуть минимум функции Лагранжа $x^*(\mu^k, r^k)$ и переход к пункту 6,
- иначе
- пересчет параметров штрафа r^{k+1} , множителей μ_j^{k+1} для ограничений-неравенств:
- $$r^{k+1} = C \cdot r^k; \mu_j^{k+1} = \max \left\{ 0, \mu_j^k + r^k g_j \left(x^*(\mu^k, r^k) \right) \right\}.$$
5. Положить $x^{k+1} = x^*(\mu^k, r^k); k = k + 1$ и переход к пункту 2.
6. **Конец алгоритма**

Значения коэффициентов лестничных структур $F_i(\tilde{Q}), G_i(\tilde{Q}), H_i(\tilde{Q})$ вычисляются и квантуются для 24 возможных комбинаций кватерниона \tilde{Q} и матриц P_{post}, P_{pre} , из которых выбирается одна комбинация, удовлетворяющая следующим условиям: 1) значения коэффициентов должны располагаться в диапазоне от -1 до 1 ; 2) ошибка факторизации матрицы $M^\pm(Q)$ в виде лестничной структуры должна быть минимальной; 3) число бит равных единице K в лестничных коэффициентах, представленных в прямом двоичном коде, должно быть минимальным.

Пример расчета Q-ПУБФ

Коэффициенты лестничной структуры синтезированного 8-канального Q-ПУБФ с линейной ФЧХ и попарно зеркальной симметрией частных характеристик фильтра приведены в таблице, а на рис. 1 показаны частотные и импульсные характеристики $8 \times 24Q$ -ПУБФ.

Коэффициенты лестничной структуры 8-канального Q-ПУБФ анализа

q	f_{11}	f_{12}	g_{11}	g_{12}	h_{11}	h_{12}	M^\pm
P_0	$+0,11_2$	$+0,1_2$	$+0,0001_2$	$+0,00011_2$	$-0,101_2$	$-0,101_2$	M^+
P_1	$+0,0101_2$	$-0,0101_2$	$-0,00111_2$	$-0,00011_2$	$-0,00001_2$	$-0,01101_2$	M^-
P_2	$-0,10011_2$	$+0,00111_2$	$+0,1101_2$	$-0,01101_2$	$-0,10001_2$	$+0,01011_2$	M^+
Q_0	$+0,00101_2$	$+0,001_2$	$-0,01011_2$	$-0,00011_2$	$+0,0011_2$	$-0,00001_2$	M^-
Q_1	$+0,00001_2$	$-0,0001_2$	$-0,0001_2$	$+0,00011_2$	$+0,0_2$	$-0,0001_2$	M^+
Q_2	$+0,01001_2$	$-0,0011_2$	$-0,00001_2$	$+0,011_2$	$-0,01_2$	$-0,00111_2$	M^-

Для разрядности слова $B = 8$ бит $8 \times 24Q$ -ПУБФ характеризуется следующими параметрами: коэффициент эффективности кодирования $CG = 9,59$ дБ, максимальная степень ослабления в полосе задержки каналов $\varepsilon_{SBE} = -23,5$ дБ, максимальное число бит в двоичном коде равных единице лестничных коэффициентов $K = 3$. При этом, ошибка восстановления сигнала в результате квантования лестничных коэффициентов $\varepsilon_q = 1,33 \cdot 10^{-15}$, т. е. ввиду

малости ошибки ε_q Q-ПУБФ – идеально реконструированный БФ. Данный результат синтеза был получен для следующих значений параметров: $\varepsilon_{\min SBE} = -13$ дБ; $\varepsilon_{\max q} = 10^{-4}$; $K_{\max} = 3$; $B = 8$ бит. Задача поиска безусловного минимума решалась с помощью программы `fminsearch` из пакета MATLAB. Точки $x^*(\mu^k, r^k)$ безусловного минимума функции $L(x, \mu^k, r^k)$ находились путем решения задачи оптимизации для Q-ПУБФ при ограничениях $\varepsilon_{SBE} < -12$ дБ и $CG > 9,2$ дБ. Число итераций расчета лестничных коэффициентов Q-ПУБФ не превышает десяти.

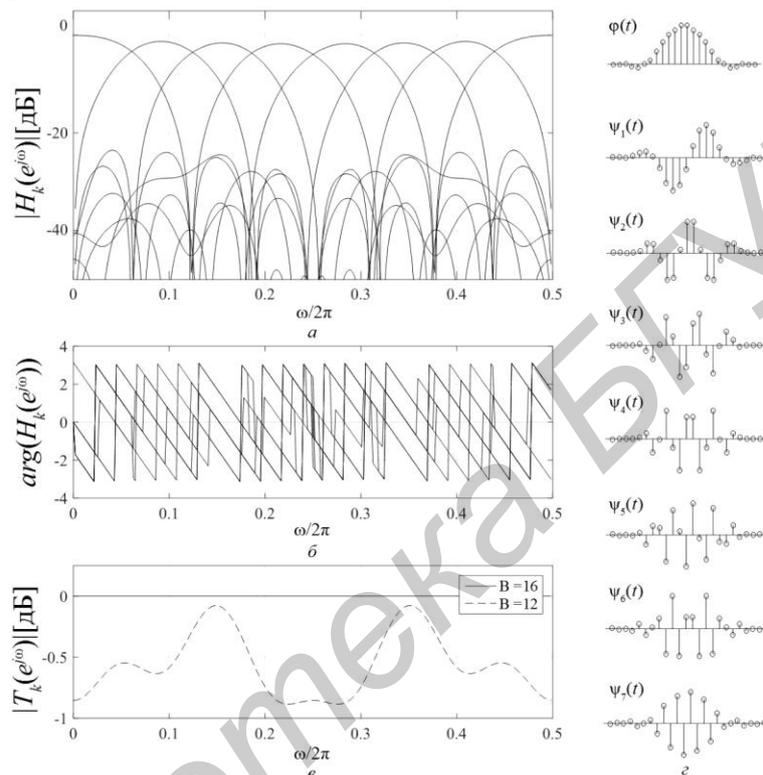


Рис. 1. Характеристики 8-канального Q-ПУБФ анализа (8x24Q-ПУБФ): a – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ); b – фазо-частотная характеристика (ФЧХ); c – АЧХ системы анализ-синтез; d – импульсные характеристики (24 отсчета) каналов 8x24Q-ПУБФ

Моделирование Q-ПУБФ проводилось в арифметике с фиксированной запятой с помощью инструментального модуля Fixed Point пакета MATLAB: разрядность входных данных – 8-бит, разрядность внутренних магистральных шин Q-ПУБФ анализа/синтеза – 16-бит. Анализ АЧХ (рис. 1, a) системы анализ/синтез Q-ПУБФ с лестничной схемой параметризацией (3), (4) представляет собой прямую линию, что соответствует системе со свойством идеального восстановления. С другой стороны, Q-ПУБФ также рассматриваются как многополосные вейвлет преобразования, эффективность которых в сжатии изображений высокая [8]. Данный 8x24Q-ПУБФ представляет собой целочисленное обратимое 8-полосное вейвлет преобразование, масштабная и вейвлет функции которого приведены на рис. 2.

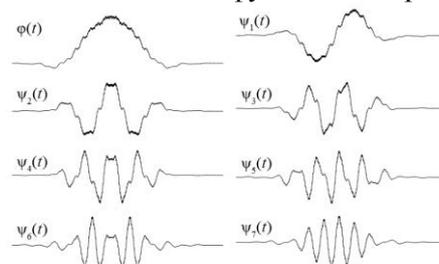


Рис. 2. Вейвлет функции 8-канального Q-ПУБФ анализа

Сравнение по показателю CG с известными преобразователями [9], такими как 8×8 DCT ($CG = 8,83$ дБ), 8×16 LOT ($CG = 9,22$ дБ) и 8×24 GenLOT ($CG = 9,35$ дБ), показывает, что предложенный метод синтеза Q-ПУБФ с лестничной схемной параметризацией позволяет получать БФ для вычислительных структур с фиксированной запятой с высоким показателем эффективности кодирования 8×24 Q-ПУБФ ($CG = 9,59$ дБ). Таким образом, 8×24 Q-ПУБФ представляет собой целочисленное преобразование и может быть использовано для кодирования изображений по схеме L2L.

PARAUNITARY FILTER BANKS BASED ON THE QUATERNIONIC ALGEBRA SYNTHESIS FOR COMPUTING STRUCTURES WITH FIXED POINT ARITHMETIC

E. V. RYBENKOV, N. A. PETROVSKY

Abstract

The synthesis method of paraunitary filter banks based on the quaternion algebra (Q-PUBF) for computing structures constrained by fixed point arithmetic is proposed. Synthesis problem using method of Lagrange multipliers is solved. It is shown that the Q-PUBF represents integer transform and can be used for image coding by scheme L2L (lossless-to-lossy).

Keywords: filter bank, method of Lagrange multipliers, quaternion.

Список литературы

1. Rao K.R., Hwang J.J. Techniques and Standards for Image, Video, and Audio Coding, P. Hall, 1996.
2. Парфенюк М., Петровский А.А. // Цифровая обработка сигналов. 2008. №1. С. 22–36.
3. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М., 1973.
4. Parfieniuk M., Petrovsky A. // Signal Processing, 2010. Vol. 90. P. 1755–1767.
5. Parfieniuk M., Petrovsky A. // IEEE Trans. Circuits Syst. 2010. Vol. 57. P. 2708–2717.
6. Vaidyanathan P.P. Multirate Systems and Filter Banks, Prentice Hall, 1993.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1974.
8. Дворкович В.П., Гильманишин А.В. // Цифровая обработка сигналов. 2008. №1. С. 37–42.
9. Jain A., Goel A. // Engineering, 2015. Vol. 7, P. 93–100.