

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра систем управления

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Конспект лекций

В 2-х частях

В. П. Кузнецов, С. В. Лукьянец, М. А. Крупская

Часть 1

Линейные непрерывные системы

*Рекомендовано УМО вузов Республики Беларусь
по образованию в области информатики и радиоэлектроники
в качестве учебно-методического пособия для студентов учреждений,
обеспечивающих получение высшего образования по специальности
I-53 01 07 «Информационные технологии и управление
в технических системах»*

Минск БГУИР 2007

УДК 681.5
ББК 32.965
Т 11

Рецензенты:

зав. кафедрой автоматизации технологических процессов и электротехники
БГТУ, канд. техн. наук, доц. И. Ф. Кузьмицкий; начальник кафедры систем
автоматического управления Военной академии Республики Беларусь,
д-р техн. наук, проф. В. А. Куренёв

Теория автоматического управления. Конспект лекций. В 2 ч. Ч. 1 :
Т 11 **Линейные непрерывные системы** : учеб.-метод. пособие / В. П. Кузнецов,
С. В. Лукьянец, М. А. Крупская. – Минск : БГУИР, 2007. – 132 с. : ил.
ISBN 978-985-488-070-9 (ч.1)

В конспекте лекций рассматриваются модели и основные характеристики элементов и систем автоматического управления, а также методы анализа и синтеза наиболее распространенных классов линейных непрерывных систем. Теоретические положения всех разделов подкрепляются примерами расчетов.

Конспект лекций предназначен для студентов всех форм обучения, изучающих системы автоматического управления. Полезен при выполнении курсовых и дипломных проектов.

УДК 681.5
ББК 32.965

ISBN 978-985-488-070-9 (ч.1)
ISBN 978-985-488-048-8

© Кузнецов В. П., Лукьянец С. В.,
Крупская М. А., 2007
© УО «Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники», 2007

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Теория автоматического управления» (ТАУ) рассматривает принципы построения систем автоматического управления, закономерности протекающих в них процессов, методы анализа и синтеза наиболее распространенных классов систем.

В ТАУ важным понятием является модель. Под моделью понимают отображение свойств реальной системы в другой системе, реализованной в виде макета или абстрактного описания на каком-либо языке (с помощью дифференциальных уравнений, графов, сетей и т.п.). В своей деятельности люди с помощью моделей изучают различные объекты, которые изначально не удовлетворяют их по своим количественным и качественным характеристикам. Приходится вырабатывать управляющие воздействия на объект, чтобы добиться определенных целей. Так возникает процесс управления. Поскольку управление протекает во времени, то системы управления являются динамическими.

Классическая цепочка в динамической системе управления такова: определение программы управления (планирование) – оценка состояния объекта (контроль) – определение управляющих воздействий (принятие решения) – реализация управления (непосредственное воздействие на объект).

В зависимости от степени автоматизации этих этапов различают автоматизированные системы управления и автоматические системы управления.

В автоматизированных системах управления (АСУ) процесс управления осуществляется частично человеком (принятие решения, контроль, иногда – реализация управления), а частично – автоматическими устройствами.

В системах автоматического управления (САУ) процесс управления осуществляется автоматическими устройствами без непосредственного участия человека на всех этапах рассматриваемой цепочки. Эти системы и будут изучаться в данной дисциплине.

История развития ТАУ связана с созданием высокоточных механизмов, к которым относятся: часы с маятниковым регулятором хода (Х. Гюйгенс, 1675); поплавковый регулятор питания котла паровой машины (И. И. Ползунов, 1765); центробежный регулятор скорости паровой машины (Дж. Уатт, 1784); первое программное устройство управления ткацким станком от перфокарты (Ж. Жаккар, 1808) и другие.

Теоретическое осмысление особенностей применения регуляторов было изложено в трудах «О регуляторах» Д. Максвелла (1866) и И. А. Вышнеградского (1876–1877). В этот период Раус и Гурвиц разработали математические критерии устойчивости систем.

Двадцатый век явился периодом развития ТАУ. В 1932 г. Х. Найквист предложил критерий устойчивости усилителей с обратной связью, а в 1938 г. А. В. Михайлов – критерий устойчивости систем на базе частотных методов.

В 50-е годы XX века В. В. Солодовников завершил формирование частотных методов анализа и синтеза САУ; в трудах А. А. Ляпунова, А. И. Лурье, А. М. Летова, М. А. Айзермана, В. М. Попова разработана теория нелинейных систем.

В 60-е годы прошлого века Я. З. Цыпкин разработал основы теории дискретных систем; в трудах Г. В. Шипанова, В. С. Кулебакина, Б. Н. Петрова создана теория инвариантных систем; Л. С. Понтрягин, А. А. Фельдбаум, А. А. Красовский разработали принципы экстремального управления и теорию оптимальных систем.

С конца XX века началось внедрение в управление микропроцессоров и микроЭВМ. Появились сложные системы управления производственными процессами, развиваются новые разделы ТАУ, такие как динамика сложных систем, моделирование сложных систем и т.п. В качестве математического аппарата широко используется пространство состояния.

При написании данного пособия авторами использован опыт чтения лекций студентам различных форм обучения. В основу конспекта положены работы [1, 7]. При изложении отдельных вопросов использованы источники [2–6].

Конспект лекций по дисциплине «Теория автоматического управления» состоит из двух частей. Настоящая первая часть включает материал, описывающий линейные непрерывные системы. Во второй части будут рассмотрены дискретные, нелинейные, адаптивные и оптимальные системы.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Основные понятия и определения

Основными частями системы автоматического управления являются объект управления и управляющее устройство. *Объект управления* (ОУ) (рис. 1.1, а) – это устройство, в котором протекает процесс, подлежащий управлению.

Координаты y_1, \dots, y_p , которыми в объекте управления необходимо управлять, будем называть *управляемыми* (*регулируемыми*) координатами (выходные величины). Требуемый режим функционирования объекта управления нарушается из-за воздействия на него возмущений (колебания нагрузки, воздействия внешней среды и т.п.). Сигналы f_1, \dots, f_r , характеризующие действующие на объект возмущения, будем называть *возмущающими* воздействиями, или просто *возмущениями*.

Группа величин u_1, \dots, u_m носит название *управляющих* воздействий (сигналов), с помощью которых можно изменять выходные координаты.

На схемах те или иные скалярные сигналы будем обозначать в виде одиночных стрелок, которые указывают направление действия сигнала. Координаты u_i, f_i, y_i можно объединить в соответствующие векторы: U – *вектор управления*, F – *вектор возмущения*; Y – *вектор выхода*. В этом случае векторные сигналы изображены в виде двойных стрелок (рис. 1.1, б).

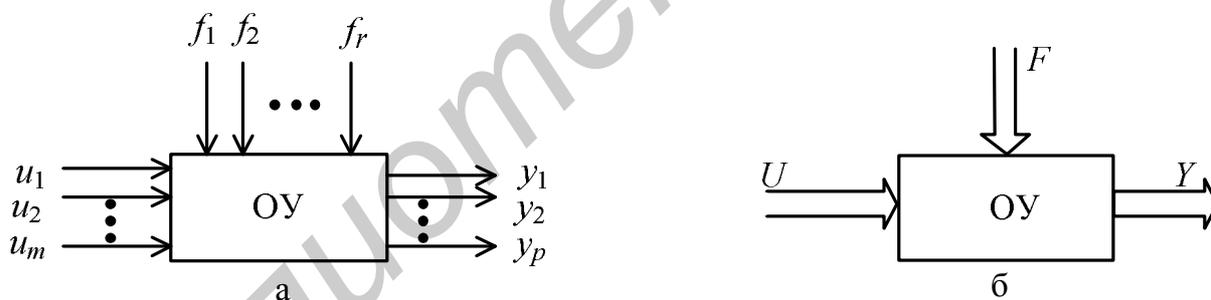


Рис. 1.1

На рис. 1.2 схематично изображено *управляющее устройство* (УУ), где сигналы представляют собой соответствующие векторы V и U .

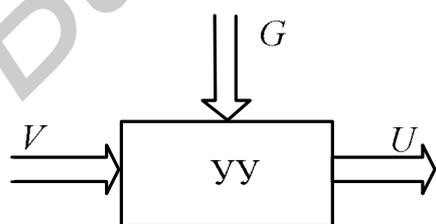


Рис. 1.2

На управляющее устройство также могут действовать некоторые возмущения, характеризуемые вектором G . Роль управляющего устройства – переработка информации, содержащейся в сигналах V и G , и в соответствии с некоторым алгоритмом, зависящим от внутренней структуры управляющего устройства, – выработка управляющих сигналов U .

Систему автоматического управления можно представить как совокупность объекта управления и управляющего устройства (рис. 1.3).

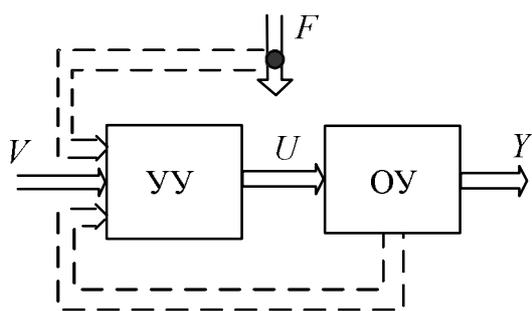


Рис. 1.3

Полагаем, что в векторе F учтены возмущения, действующие как на объект управления, так и на управляющее устройство. Штриховыми линиями показана возможность передачи информации об объекте управления и о величинах возмущений на управляющее устройство.

В основу функционирования систем автоматического управления положены три основных принципа управления.

Принцип разомкнутого управления соответствует структуре, изображенной на рис. 1.4. По этому принципу управляющее устройство формирует сигнал управления без учета информации о возмущениях и о результатах управления. Этот простейший принцип применим только в том случае, если возмущения определены и учтены на предварительной стадии при формировании алгоритма управления и объект управления строго исполняет предписанный алгоритм управления.

Второй принцип управления – это *принцип компенсации* (управление по возмущению). Структура системы управления представлена на рис. 1.5.

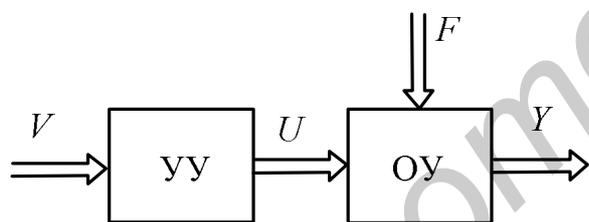


Рис. 1.4

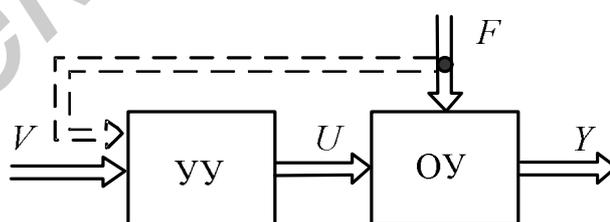


Рис. 1.5

В этом случае вся информация о действующих возмущениях непрерывно поступает на управляющее устройство и учитывается при выработке алгоритма управления. Недостатками этого принципа являются техническая сложность, а иногда невозможность измерить возмущение, а также – отсутствие информации о результатах управления.

Третий принцип управления – *принцип обратной связи* (управление по отклонению). Структура системы автоматического управления в данном случае представлена на рис. 1.6. В системе существует канал передачи информации о результатах управления – канал обратной связи. При этом косвенно через объект управления учитывается и влияние возмущений на вектор выхода. В этом случае алгоритм управления непрерывно учитывает результаты управления.

Возможно создание систем автоматического управления, использующих второй и третий принципы управления одновременно, – так называемых систем с *комбинированным* управлением.

На рис. 1.3, 1.5 и 1.6 место разветвления сигналов, обозначенное в виде точки, будем называть *узлом*.

В большинстве случаев управляющее устройство структурно можно разделить на две части: *устройство сравнения* (Σ) и *регулятор* (P), как показано на рис. 1.7.

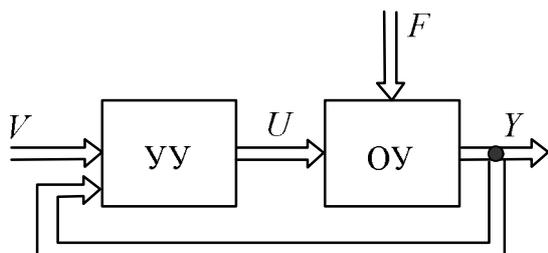


Рис. 1.6

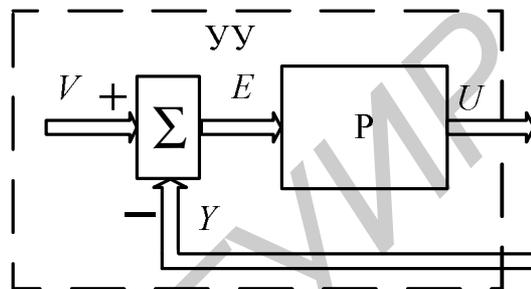


Рис. 1.7

Схематично устройство сравнения (сумматор) будем обозначать в виде прямоугольника со знаком суммирования внутри и при помощи знаков «+» и «-» указывать знак поступающей величины. Тогда на рис. 1.7 алгоритм работы устройства сравнения будет иметь вид $E = V - Y$, а сигнал E , характеризующий отклонение выходного сигнала Y от входного сигнала V , будем называть *сигналом ошибки* (сигнал рассогласования, ошибка).

При таком представлении управляющего устройства система управления, построенная по принципу обратной связи, будет иметь вид, изображенный на рис. 1.8.

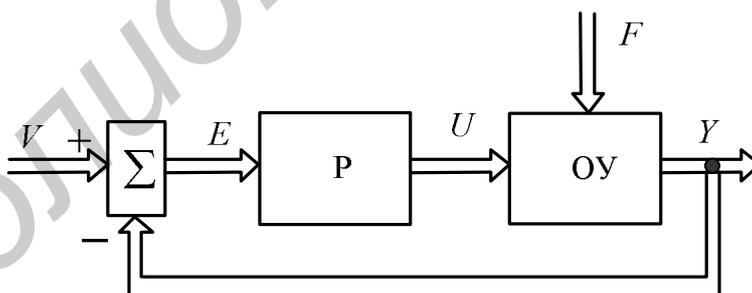


Рис. 1.8

Канал передачи сигнала Y с выхода объекта управления на вход системы будем называть *главной обратной связью* системы.

Если $E = V - Y$, обратная связь отрицательная, если $E = V + Y$ – положительная.

1.2. Классификация систем автоматического управления

Классификацию систем автоматического управления осуществляют в зависимости от признаков, в качестве которых могут быть принципы работы, алгоритмы функционирования, структуры систем, вид представления отдельных элементов, вид математических моделей, области применения и др.

По виду *алгоритмов функционирования* системы автоматического управления делятся на *системы стабилизации* ($V = \text{const}$, поддерживается некоторое постоянное значение выхода Y , рис. 1.8), *системы программного управления* (вход V должен изменяться по заданной программе), *следающие системы* – закон изменения входного сигнала V неизвестен заранее. Примерами таких систем соответственно являются системы стабилизации скорости вращения и частоты; система автоматического управления промышленного робота, работающая в режиме отработки заданных (программных) движений; радиолокационные следающие системы измерения координат движущегося объекта. С развитием практики и теории автоматического управления появляются новые классы систем: *системы с поиском экстремума показателя качества*, *системы оптимального управления*, *адаптивные системы*.

Приведем классификацию систем по виду *законов управления*. Под законом управления будем понимать зависимость выходного сигнала регулятора U от сигнала ошибки E . Для простоты примем, что U и E – скалярные величины, которые обозначим малыми буквами; тогда в общем случае закон управления будет иметь вид: $u = f(e, e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, \int edt, \int \int edtdt, \dots)$.

Простейшими случаями этого соотношения являются:

– *пропорциональный закон* (П-закон): $u = Ke$;

– *интегральный закон* (И-закон): $u = K/T \int edt$;

– *пропорционально-интегральный закон* (ПИ-закон): $u = K \left[e + \frac{1}{T} \int edt \right]$;

– *пропорционально-интегрально-дифференциальный закон* (ПИД-закон):

$$u = K \left[e + \frac{1}{T_1} \int edt + T_2 \frac{de}{dt} \right],$$

где K – коэффициент передачи; а T, T_1, T_2 – постоянные времени.

По *количеству управляемых координат* системы делятся на *одномерные* ($p = 1$) и *многомерные*, или *многосвязные* ($p \geq 2$) (см. рис. 1.1).

По *характеру протекающих процессов* системы делятся на *непрерывные* (все сигналы непрерывны во времени) и *импульсные* (хотя бы один из сигналов дискретизирован (квантован) во времени). Если хотя бы один из сигналов в системе является квантованным по уровню, то она относится к *релейным* системам. При одновременном квантовании сигнала по уровню и времени систему относят к *цифровым*. Релейные, импульсные и цифровые системы составляют класс *дискретных* систем автоматического управления.

По зависимости выходных сигналов отдельных элементов от входных системы делятся на *линейные* и *нелинейные*.

По виду параметров, характеризующих отдельные элементы и устройства, системы делятся на системы с *сосредоточенными* или *распределенными* параметрами, *стационарные* (все параметры постоянны во времени), *нестационарные* (параметры изменяются во времени), системы с *детерминированными* параметрами (закон изменения параметров известен), со *случайными (стохастическими)* параметрами (заданы их вероятностные характеристики), с *неопределенными* параметрами (может, например, задаваться только область их изменения).

Приведенная классификация не охватывает всех классов существующих систем. Например, можно выделять еще системы с *запаздыванием*, системы с *перестраиваемой структурой*. Адаптивные системы делятся на *самонастраивающиеся* и *самоорганизующиеся*.

1.3. Примеры систем автоматического управления

Отметим, что первыми промышленными системами автоматического управления считаются регулятор уровня воды в котле паровой машины и центробежный регулятор скорости вращения вала паровой машины.

На рис. 1.9 представлена простейшая структура системы регулирования скорости вращения двигателя постоянного тока, которая содержит объект управления – двигатель (Дв), скорость вращения которого u является управляемой координатой (возмущение f характеризует влияние момента нагрузки на скорость вращения); управляющее устройство включает тахогенератор (Тг), напряжение на выходе которого пропорционально скорости вращения u ; устройство сравнения $e = v - x$, в качестве которого может применяться суммирующий операционный усилитель или потенциометрический мостик; УП – усилительно-преобразовательные устройства, включающие предварительные усилительные каскады и корректирующие устройства, которые придают системе определенные свойства; УМ – усилитель мощности. Входной сигнал v в виде напряжения задает режим работы системы. Если $v = \text{const}$, то система будет системой стабилизации. Изменяя v во времени, можно изменять скорость вращения, и систему можно рассматривать как систему программного управления или следящую.

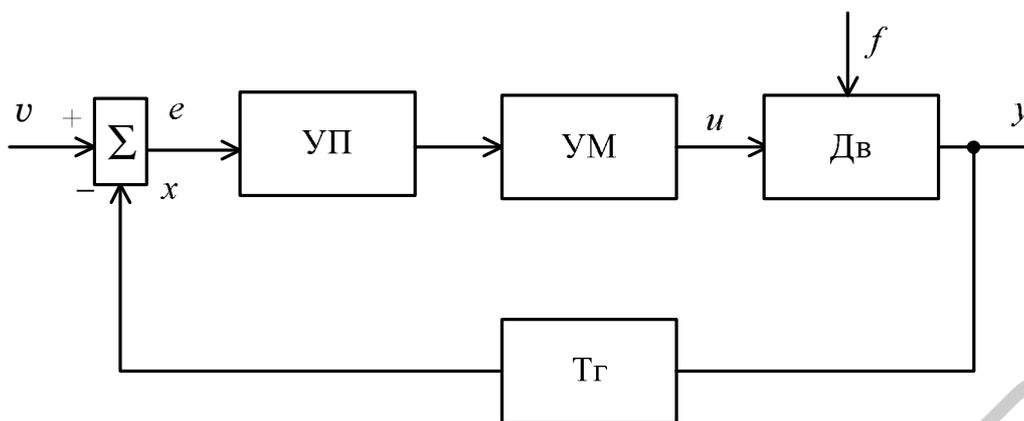


Рис. 1.9

Если $v = \text{const}$ при заданной величине f , то на выходе имеем некоторую номинальную скорость y_H , которой будут соответствовать номинальное значение напряжения тахогенератора x_H , ошибка e_H и соответственно напряжение управления u_H , поддерживающее номинальную скорость вращения. Увеличение момента нагрузки f приведет к уменьшению величин y и x , возрастанию сигнала ошибки e , что обусловит увеличение подаваемого напряжения u на двигатель. Таким образом, скорость возрастет до номинальной (или близкой к номинальной). Если f уменьшить, то процесс регулирования будет идти в обратном направлении. Таким образом, происходит автоматическая компенсация влияния нагрузки на скорость двигателя и поддержание скорости в заданных пределах.

В качестве следующего примера рассмотрим цифровой электропривод, структура которого представлена на рис. 1.10.

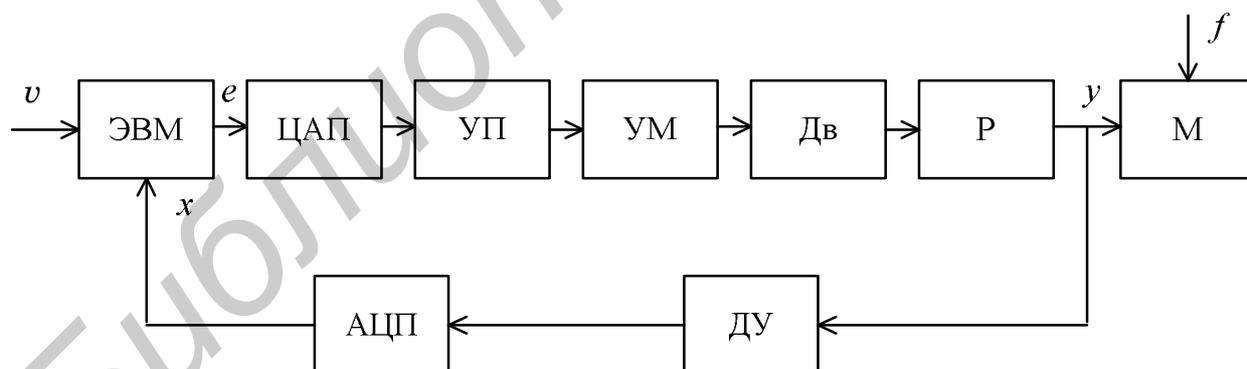


Рис. 1.10

Управляемой координатой является угол поворота y некоторого механизма (М), подсоединенного к двигателю (Дв) через редуктор (Р) (например одна из степеней подвижности промышленного робота). ДУ – датчик угла, выходом которого является напряжение, пропорциональное углу поворота. Это напряжение поступает на аналого-цифровой преобразователь (АЦП). Сигнал x представляет собой цифровой код угла и поступает на микроЭВМ (или

микропроцессор). На микроЭВМ поступает (например от ЭВМ более высокого уровня) требуемый код угла поворота. В простейшем случае микроЭВМ производит сравнение сигналов v и x , т. е. выступает в роли устройства сравнения. В более общем случае микроЭВМ реализует некоторый закон управления (например ПИД-закон) в цифровой форме. Далее сигнал e в цифровом коде поступает на цифроаналоговый преобразователь (ЦАП), после которого через элементы УП и УМ воздействует на двигатель. Такая система может работать в режиме позиционирования, отработывая заданный угол $v = \text{const}$, либо в режиме непрерывной отработки угла, изменяющегося по определенной программе.

Существенным отличием этой системы является наличие элементов цифровой техники (ЦАП, АЦП, микроЭВМ), для которых характерно квантование сигналов по уровню и по времени.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЗВЕНЬЕВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Уравнения звеньев

Система автоматического управления (САУ) – это совокупность соединенных в определенной последовательности элементов и устройств, которые будем называть *звеньями*. Примерами звеньев могут служить объекты управления, усилительно-преобразовательные устройства, исполнительные двигатели, тахогенераторы, различного рода датчики, цифровые устройства, в том числе микропроцессоры и управляющие ЭВМ и т.п.

Под линейной непрерывной стационарной системой с сосредоточенными параметрами будем понимать систему, которая в целом так же, как и отдельные звенья, описывается линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

На рис. 2.1 изображено звено САУ, имеющее один входной x_1 и один выходной x_2 сигналы, являющиеся скалярными величинами ($x_1, x_2 \in R$, где R – множество действительных или комплексных чисел). В дальнейшем будем интерпретировать все сигналы в системе как функции текущего времени t , т.е. $x_1(t)$, $x_2(t)$, где $t \in [0, \infty)$.



Рис. 2.1

Получение уравнений, описывающих поведение отдельных звеньев в каждом конкретном случае, является задачей той или иной

отрасли науки, например, электротехники, электроники, механики и т.п. и не является предметом данного курса. Поэтому будем по-

лагать, что звено в общем случае описывается дифференциальным уравнением следующего вида:

$$a_0 x_2^{(n)} + a_1 x_2^{(n-1)} + \dots + a_n x_2 = b_0 x_1^{(m)} + b_1 x_1^{(m-1)} + \dots + b_m x_1, \quad (2.1)$$

где $x^{(i)} = \frac{d^i x(t)}{dt^i}$; $a_i, b_i = \text{const}$.

Коэффициенты a_i, b_i зависят от конструктивных параметров и, возможно, от режима работы звена. Порядок n дифференциального уравнения (2.1) будет определять также и соответствующий *порядок звена*. На практике звенья описываются дифференциальными уравнениями низкого порядка, обычно $n \leq 2$.

Для полного математического описания процессов в звене следует задавать начальные условия $x_2(0), x_2^{(1)}(0), \dots, x_2^{(n-1)}(0)$, которые чаще всего будем полагать нулевыми.

В теории автоматического управления наряду с (2.1) уравнения звеньев записывают в стандартной форме, когда коэффициенты при переменных x_2 и x_1 равны единице. Вынося за скобки a_n и b_m , имеем

$$a_n \left[\frac{a_0}{a_n} x_2^{(n)} + \frac{a_1}{a_n} x_2^{(n-1)} + \dots + x_2 \right] = b_m \left[\frac{b_0}{b_m} x_1^{(m)} + \frac{b_1}{b_m} x_1^{(m-1)} + \dots + x_1 \right],$$

или, вводя обозначения $K = \frac{b_m}{a_n}$, $\frac{a_0}{a_n} = T_n^n$, $\frac{a_1}{a_n} = T_n^{n-1} \dots$; $\frac{b_0}{b_m} = \tau_m^m$, $\frac{b_1}{b_m} = \tau_m^{m-1}, \dots$,

получим следующий вид дифференциального уравнения:

$$T_n^n x_2^{(n)} + T_n^{n-1} x_2^{(n-1)} + \dots + x_2 = K [\tau_m^m x_1^{(m)} + \dots + x_1], \quad (2.2)$$

где T_i, τ_i – *постоянные времени*, имеющие размерность [с], а K – *коэффициент передачи (усиления)* имеет размерность [разм. x_2 / разм. x_1].

Уравнения (2.1) и (2.2) можно записать также в операторном (символическом) виде, вводя дифференциальный оператор $p = \frac{d}{dt}$ такой, что

$p^i x(t) = \frac{d^i x(t)}{dt^i}$. Тогда уравнение (2.1) может быть записано в операторной форме: $[a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n] x_2(t) = [b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m] x_1(t)$. Обозначая $A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$, $B(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m$, будем иметь

$$A(p)x_2(t) = B(p)x_1(t). \quad (2.3)$$

По виду дифференциального уравнения (2.1) звенья делятся на три типа. Если $a_n \neq 0$ и $b_m \neq 0$, то такие звенья относятся к *позиционным*; если $a_n \neq 0$, а $b_m = 0$, то к *дифференцирующим*; если $b_m \neq 0$, $a_n = 0$, то к *интегрирующим*.

Позиционные звенья имеют *статическую характеристику*. Пусть $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$, тогда $p^i x_1(t) = 0$, $p^i x_2(t) = 0$ и $a_n x_2 = b_m x_1$, $x_2 = Kx_1$.

Уравнения (2.1)–(2.3) описывают поведение звеньев в динамических режимах, поэтому в дальнейшем будем называть их *уравнениями динамики*.

Пример 2.1. Рассмотрим дифференциальные уравнения часто встречающихся звеньев САУ. В качестве исполнительного устройства в системах управления широко применяются *двигатели*. Дифференциальное уравнение динамики двигателя постоянного тока при якорном управлении при определенных условиях имеет вид

$$T_M T_\Delta x_2^{(2)} + T_M x_2^{(1)} + x_2 = Kx_1,$$

где T_M , T_Δ – электромеханическая и электромагнитная постоянные времени; K – коэффициент передачи; x_2 – угловая скорость вращения; x_1 – напряжение, приложенное к якорю.

Обозначая $T_M = T_1$, $T_M T_\Delta = T_2^2$, можно получить уравнение в форме (2.2).

Дифференциальное уравнение двигателя относительно угла поворота будет $T_M T_\Delta x_2^{(3)} + T_M x_2^{(2)} + x_2^{(1)} = Kx_1$, где x_2 – угол поворота.

Величины T_Δ , T_M , K зависят от конструктивных параметров двигателя.

Дифференциальное уравнение *тахогенератора* может быть записано в виде $x_2 = Kx_1^{(1)}$, где x_1 – угол поворота вала тахогенератора; x_2 – напряжение на его выходе; K – коэффициент передачи, определяемый конструктивными параметрами.

2.2. Линеаризация уравнений динамики звеньев

Реальные устройства САУ обычно являются нелинейными. Однако при определенных условиях их можно заменить линейными моделями, что значительно упрощает исследование САУ. Операция замены нелинейных уравнений линейными носит название *линеаризации*. Существуют различные способы линеаризации уравнений динамики. Наиболее распространенным является способ, базирующийся на разложении нелинейных функций в ряд Тейлора.

Пусть звено САУ описывается нелинейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}_2 = f(x_1, x_2), \quad (2.4)$$

где x_1 – входной, а x_2 – выходной сигналы.

Рассмотрим установившийся режим работы звена, когда на входе действует постоянный сигнал $x_1^* = \text{const}$. Тогда существует постоянное значение выходного сигнала $x_2^* = \text{const}$, которое можно найти из уравнения (2.4), полагая $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$ (очевидно, $\dot{x}_2 = 0$). Связь установившихся значений сигналов x_1 и x_2 будет задаваться уравнением установившегося режима

$$f(x_1, x_2) = 0, \quad (2.5)$$

из которого при заданном x_1^* , можно найти величину x_2^* .

Введем отклонения от установившегося режима $\Delta x_2 = x_2 - x_2^*$, $\Delta x_1 = x_1 - x_1^*$ и разложим функцию f в (2.4) в ряд Тейлора относительно координат x_1^*, x_2^* :

$$\mathfrak{f}_2 = f(x_1^*, x_2^*) + a_1(x_2 - x_2^*) + b_1(x_1 - x_1^*) + \frac{a_2}{2!}(x_2 - x_2^*)^2 + \frac{b_2}{2!}(x_1 - x_1^*)^2 + \dots,$$

где

$$a_1 = \left. \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1 = x_1^* \\ x_2 = x_2^*}}, \quad b_1 = \left. \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1 = x_1^* \\ x_2 = x_2^*}} \quad \text{и т.д.}$$

Учитывая, что $f(x_1^*, x_2^*) = 0$, $\Delta \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_2$, и ограничиваясь в ряде Тейлора только линейным членом, получим

$$\Delta \mathfrak{f}_2 = a_1 \Delta x_2 + b_1 \Delta x_1. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами и носит название *линеаризованного уравнения*.

Приведенной процедуре линеаризации можно дать геометрическую интерпретацию. Уравнение установившегося режима (2.5) определяет нелинейную статическую характеристику звена (рис. 2.2).

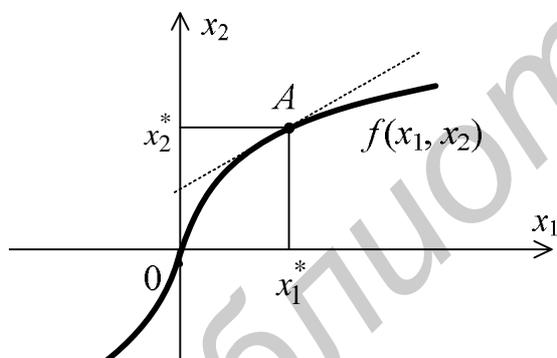


Рис. 2.2

Нелинейная функция $f(x_1, x_2)$ в точке разложения с координатами x_1^*, x_2^* аппроксимируется линейной: касательной в точке разложения.

Отметим ряд существенных моментов в процедуре линеаризации.

1. Линеаризация допустима, если нелинейная функция $f(x_1, x_2)$ в точке разложения является аналитической (т.е. дифференцируема бесконечное число раз). Для звена, имеющего статическую характеристику с разрывом, линеаризация недопустима. САУ, содержащие такие звенья, должны рассматриваться как нелинейные.

2. Коэффициенты a_1, b_1 линеаризованного уравнения (2.6) зависят от координат точки разложения x_1^*, x_2^* . Изменение координат дает уравнение с другими коэффициентами.

3. Линеаризованное уравнение (2.6) и исходное (2.4) будут близки между собой только в окрестности точки разложения. Это соответствие будет тем лучше, чем меньше отклонения Δx_i координат от установившегося режима

и чем ближе нелинейная функция $f(x_1, x_2)$ в точке разложения к своей касательной. Дать определенные количественные оценки такой близости затруднительно.

Рассматриваемые далее САУ будем полагать линейными, считая, что их звенья, если это необходимо, на предварительном этапе подверглись процедуре линеаризации.

Пример 2.2. Пусть звено описывается нелинейным дифференциальным уравнением $5x_2^{(1)} + x_2 = 10e^{2x_1}$.

Уравнение статики имеет вид $x_2 = 10e^{2x_1}$. Положим входной сигнал $x_1^* = 0,5$, тогда очевидно, что $x_2^* \cong 27$. Линеаризация исходного уравнения дает

$$5\Delta x_2^{(1)} + \Delta x_2 = \left. \frac{\partial}{\partial x_1} 10e^{2x_1} \right|_{x_1 = 0,5} \cdot \Delta x_1 = 54\Delta x_1.$$

Если $x_1^* = 1$, то получим уравнение $5\Delta x_2^{(1)} + \Delta x_2 = 148\Delta x_1$.

Таким образом, в зависимости от координат точки разложения будем иметь уравнения с различными коэффициентами.

2.3. Передаточная функция и временные характеристики звеньев

Основной характеристикой звена САУ является его дифференциальное уравнение. Однако наряду с ним в теории управления нашли применение и другие характеристики. Важнейшей из них является передаточная функция, получаемая на основе применения преобразования Лапласа к исходному дифференциальному уравнению звена. Прямое и обратное преобразования

Лапласа определяются следующими выражениями: $Y(s) = L\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt$;

$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s)e^{st} ds$, где $y(t)$ – оригинал; $Y(s)$ – изображение

функции $y(t)$; s – комплексная переменная; $c = \text{Re } s$; L и L^{-1} – символы прямого и обратного преобразования Лапласа.

Наиболее важные свойства преобразования Лапласа, а также соответствие между рядом оригиналов и изображений приведены в приложении.

Если в дифференциальном уравнении звена (2.1) положить $x_2(0) = x_2^{(1)}(0) = \dots = x_2^{(n-1)}(0) = 0$; $x_1(0) = x_1^{(1)}(0) = \dots = x_1^{(m-1)}(0) = 0$, то после применения прямого преобразования Лапласа получим алгебраическое уравнение относительно изображений: $a_0 s^n X_2(s) + a_1 s^{n-1} X_2(s) + \dots + a_n X_2(s) = b_0 s^m X_1(s) + b_1 s^{m-1} X_1(s) + \dots + b_m X_1(s)$, откуда

$$W(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (2.7)$$

Передачная функция звена $W(s)$ есть отношение изображения выходного сигнала к изображению входного сигнала при нулевых начальных условиях.

Если взять дифференциальное уравнение звена в операторной форме (2.3), то формально $W(s)$ получим делением оператора $B(p)$ на оператор $A(p)$ с заменой p на s : $W(s) = \frac{B(p)}{A(p)} \Big|_{p=s} = \frac{B(s)}{A(s)}$.

Из (2.7) следует связь изображений входа и выхода через передачную функцию:

$$X_2(s) = W(s)X_1(s). \quad (2.8)$$

Звено САУ на структурных схемах изображают так, как показано на рис. 2.3.

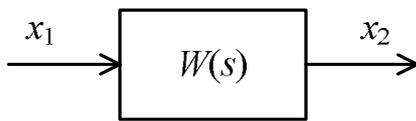


Рис. 2.3

При использовании уравнения (2.2) передачную функцию звена будем записывать в виде

$$W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)}, \quad (2.9)$$

где $N(s)$ и $L(s)$ – многочлены с единичными коэффициентами в младших членах.

Полином $L(s)$ будем называть *характеристическим полиномом*, а уравнение $L(\lambda) = 0$ – *характеристическим уравнением* звена.

Следующий класс характеристик звена – это *временные характеристики*: *весовая* и *переходная функции* звена.

Если рассматривать $W(s)$ как изображение, то приходим к понятию *весовой* (импульсной) функции звена $w(t)$, формально определяемой как обратное преобразование Лапласа от передачной функции

$$w(t) = L^{-1}\{W(s)\}. \quad (2.10)$$

Весовая функция звена $w(t)$ есть реакция звена на входной сигнал в виде дельта-функции, которая определяется соотношением

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}, \text{ причем } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Дельта-функция обладает фильтрующим свойством: $\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = y(t)$.

Если положить $x_1(t) = \delta(t)$, то $X_1(s) = L\{\delta(t)\} = 1$ и $X_2(t) = W(s)$, откуда $X_2(s) = L^{-1}\{\delta(t)\} = w(t)$, т.е. $w(t)$ – реакция звена на входной сигнал $\delta(t)$.

К такому же результату можно прийти следующим образом. Правой части (2.8) соответствует в области оригиналов свертка функций $w(t)$ и $x_1(t)$:

$$x_2(t) = L^{-1}\{W(s)X_1(s)\} = \int_0^t w(t-\tau)x_1(\tau)d\tau. \quad (2.11)$$

Если в (2.11) положить $x_1(t) = \delta(t)$, то на основании фильтрующего свойства дельта-функции будем иметь $x_2(t) = w(t)$.

Переходной функцией звена $h(t)$ называется реакция звена на единичное ступенчатое воздействие $1[t] = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Так как $L\{1[t]\} = \frac{1}{s}$, то $w(t) = \frac{dh(t)}{dt}$ и по определению

$$h(t) = x_2(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}. \quad (2.12)$$

Так как $\delta(t) = \frac{d}{dt}1[t]$, то $w(t) = \frac{dh(t)}{dt}$, а $h(t) = \int_0^t w(\tau)d\tau$.

Пример 2.3. Дифференциальное уравнение двигателя постоянного тока (пример 2.1) по углу поворота в предположении, что $T_M \gg T_\Delta$, можно записать в виде $Tx_2^{(2)} + x_2^{(1)} = Kx_1$, где принято $T = T_M$.

Передаточная функция и временные характеристики будут иметь вид

$$W(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}, \quad w(t) = L^{-1}\{W(s)\} = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right),$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\} = K\left[t - T\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\right].$$

2.4. Частотные характеристики звеньев

Частотные характеристики определяют динамические свойства звеньев при воздействии на них гармонических сигналов. Формально частотные характеристики получаются из передаточной функции $W(s)$ при $s = j\omega$, где ω – угловая частота, имеющая размерность [рад/с]. Сделав такую замену, получим

$$W(j\omega) = W(s)\Big|_{s=j\omega} = \int_0^\infty w(t)e^{-j\omega t}dt, \quad (2.13)$$

т.е. частотная передаточная функция $W(j\omega)$ есть прямое преобразование Фурье от весовой функции $w(t)$.

Комплекснозначную функцию $W(j\omega)$ частоты ω будем называть *амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ)* звена.

Как любое комплексное число АФЧХ можно представить в виде

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.14)$$

где

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \quad (2.15)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \quad (2.16)$$

Если передаточная функция звена представлена в виде $W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)}$, то

$$W(j\omega) = \frac{KN(j\omega)}{L(j\omega)}. \text{ При этом, очевидно, } A(\omega) = \frac{K|N(j\omega)|}{|L(j\omega)|} \text{ (считаем } K > 0) \text{ и}$$

$$\varphi(\omega) = \arg N(j\omega) - \arg L(j\omega).$$

В соответствии с (2.14)–(2.16) имеем еще ряд частотных характеристик: $A(\omega) = |W(j\omega)|$ – *амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)*; $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$ – *фазово-частотная характеристика (ФЧХ)*; $U(\omega)$, $V(\omega)$ – соответственно *вещественная* и *мнимая частотные характеристики*.

Рассмотрим физический смысл частотных характеристик. Если на вход звена с передаточной функцией $W(s)$ поступает гармонический сигнал $x_1 = A_1 \sin \omega_1 t$, то в установившемся режиме после затухания переходной составляющей выходной сигнал $x_{2y}(t)$ будет также гармоническим: $x_{2y}(t) = A_1 |W(j\omega_1)| \sin(\omega_1 t + \arg W(j\omega_1))$, т.е. той же частоты, но измененных амплитуды и фазы.

Изменение амплитуды определяется модулем $W(j\omega)$, а фазы – аргументом $W(j\omega)$ на соответствующей частоте ω_1 .

На практике для наглядности частотные характеристики изображают в виде графиков при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$.

Частотные характеристики обладают следующими свойствами: $U(-\omega) = U(\omega)$, $V(-\omega) = -V(\omega)$, $A(\omega) = A(-\omega)$, $\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$, которые непосредственно следуют из (2.14)–(2.16). Другими словами: характеристики $U(\omega)$, $A(\omega)$ являются четными, $V(\omega)$, $\varphi(\omega)$ – нечетными. В силу этого графики при изменении частоты от $-\infty$ до 0 не строятся. АФЧХ $W(j\omega)$ представляет собой годограф на комплексной плоскости с координатами U , V или A , φ при изменении ω от 0 до ∞ .

На рис. 2.4 и 2.5 представлены иллюстративные графики частотных характеристик некоторого звена.

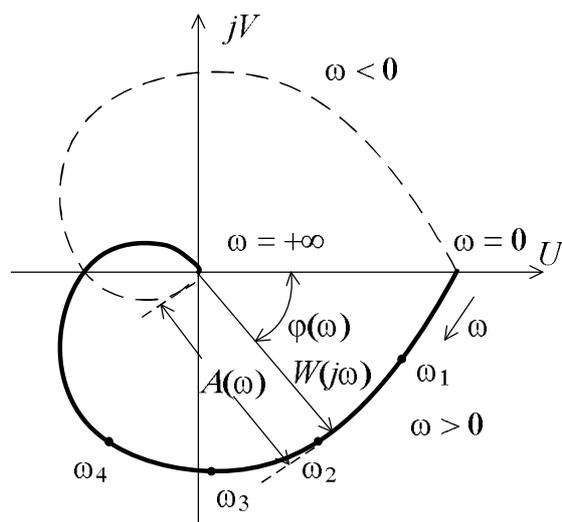


Рис. 2.4

Штриховой линией показаны части графиков, соответствующие $\omega < 0$. Вполне понятно, что из графика (см. рис. 2.4) нетрудно получить графики а, б или соответственно в, г (см. рис. 2.5) и наоборот.

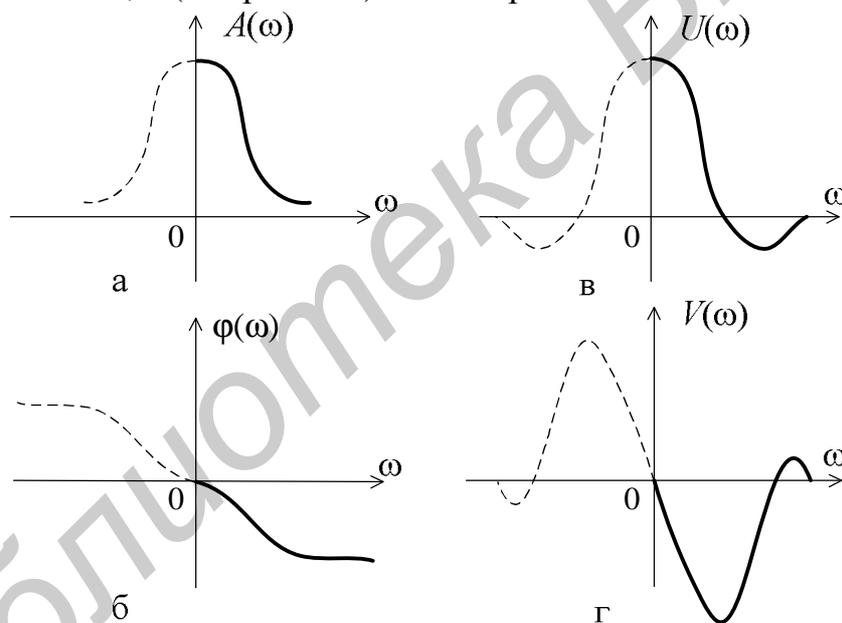


Рис. 2.5

На практике часто применяются соответствующие логарифмические частотные характеристики: *логарифмическая амплитудная частотная характеристика* (ЛАЧХ) $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ и *логарифмическая фазовая частотная характеристика* (ЛФЧХ) $\varphi(\omega)$, графики которых строятся в логарифмическом масштабе. При построении $L(\omega)$ по оси ординат откладывается величина $20 \lg A(\omega)$, единицей измерения которой является децибел, а по оси абсцисс – частота ω [1/с] в логарифмическом масштабе, т.е. величина $\lg \omega$. Увеличение $A(\omega)$ в 10 раз соответствует приращению $L(\omega)$ вдоль оси ординат на 20 дБ. При построении ЛФЧХ величину φ откладывают

по оси ординат в обычном масштабе (в градусах или радианах), а ω – в логарифмическом масштабе.

На рис. 2.6 приведены иллюстративные графики ЛАЧХ и ЛФЧХ для некоторого звена. Частота ω_c , при которой $A(\omega) = 1$, носит название *частоты среза*. Левее ω_c значения $A(\omega) > 1$ (усиление), правее – < 1 (ослабление амплитуды гармонического сигнала).

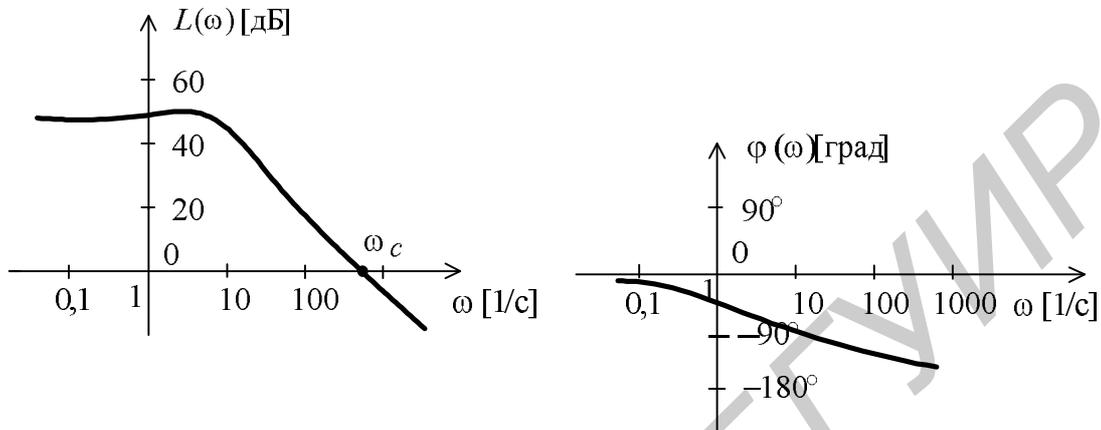


Рис. 2.6

2.5. Элементарные звенья и их характеристики

В общем случае звено САУ описывается линейным дифференциальным уравнением произвольного порядка вида (2.1)–(2.3) или соответствующей передаточной функцией (2.7). Введем понятие элементарного звена и покажем, что любое звено может быть представлено в виде совокупности элементарных звеньев.

Передаточная функция (2.7) есть отношение двух полиномов порядка m и n соответственно. Каждый из полиномов всегда можно представить в виде произведения простых сомножителей вида $d_0s, (d_1s + d_2), (d_3s^2 + d_4s + d_5)$, где сомножитель d_0s соответствует нулевому корню уравнений $B(s) = 0$ или $A(s) = 0$, $d_1s + d_2$ – действительному корню, $d_3s^2 + d_4s + d_5$ – паре комплексно-сопряженных корней.

Исходя из этого, введем в рассмотрение *элементарные звенья* со следующими передаточными функциями: $W(s) = K$; $W(s) = Ks$;

$$W(s) = K(Ts + 1); \quad W(s) = K(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1); \quad W(s) = \frac{K}{s}; \quad W(s) = \frac{K}{Ts + 1};$$

$$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}.$$

Обозначим произвольную передаточную функцию элементарного звена через $W_i(s)$. Нетрудно показать, что звено с передаточной функцией $W(s)$ можно представить в виде

$$W(s) = \prod_i W_i(s) \text{ или } W(s) = \sum_i W_i(s). \quad (2.17)$$

Представление $W(s)$ в виде (2.17) оказывается удобным при вычислении и построении соответствующих характеристик звена, если известны характеристики элементарных звеньев. Действительно, из (2.17) нетрудно получить полезные соотношения:

$$\text{если } W(s) = \prod_i W_i(s), \text{ то } A(\omega) = \prod_i A_i(\omega), \varphi(\omega) = \sum_i \varphi_i(\omega), L(\omega) = \sum_i L_i(\omega);$$

$$\text{если } W(s) = \sum_i W_i(s), \text{ то } h(t) = \sum_i h_i(t), w(t) = \sum_i w_i(t).$$

Перейдем к рассмотрению характеристик элементарных звеньев.

Идеальное усилительное (безынерционное или пропорциональное) звено.

Его уравнение и передаточная функция имеют вид $x_2(t) = Kx_1(t)$, $W(s) = K$, (полагаем $K > 0$), а частотные характеристики – $W(j\omega) = K$, $A(\omega) = K$, $\varphi(\omega) = 0$, $L(\omega) = 20 \lg K$.

Временные характеристики звена таковы: $w(t) = K\delta(t)$, $h(t) = K1[t]$.

Графики частотных и временных характеристик вполне очевидны.

Идеальное интегрирующее звено. Дифференциальное уравнение и

передаточная функция имеют вид $px_2(t) = Kx_1(t)$, $x_2 = K \int x_1(t) dt$, $W(s) = \frac{K}{s}$.

Характеристики звена определяются следующими выражениями:

$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega}, \quad A(\omega) = \frac{K}{\omega}, \quad \varphi(\omega) = -90^\circ, \quad L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega, \quad h(t) = Kt,$$

$w(t) = K \cdot 1[t]$, графики которых, за исключением последней, представлены на рис. 2.7.

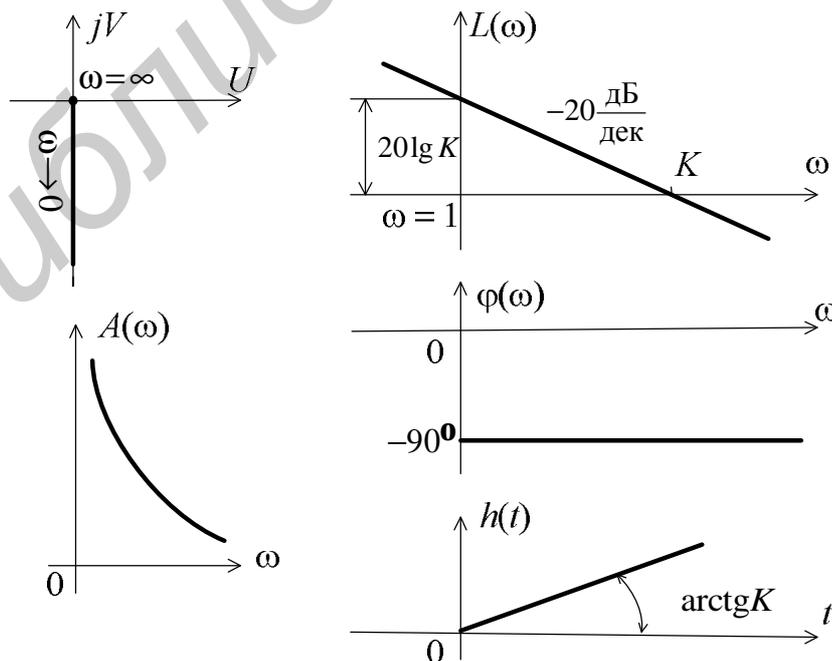


Рис. 2.7

Идеальное дифференцирующее звено. Звено имеет следующие дифференциальное уравнение и передаточную функцию: $x_2(t) = Kp x_1(t)$, $W(s) = Ks$ и соответственно характеристики: $W(j\omega) = Kj\omega$, $A(\omega) = K\omega$, $\varphi(\omega) = +90^\circ$, $L(\omega) = 20 \lg K + 20 \lg \omega$, графики которых представлены на рис. 2.8. Временные характеристики определяются выражениями $h(t) = K\delta(t)$, $w(t) = K\delta^{(1)}(t)$.

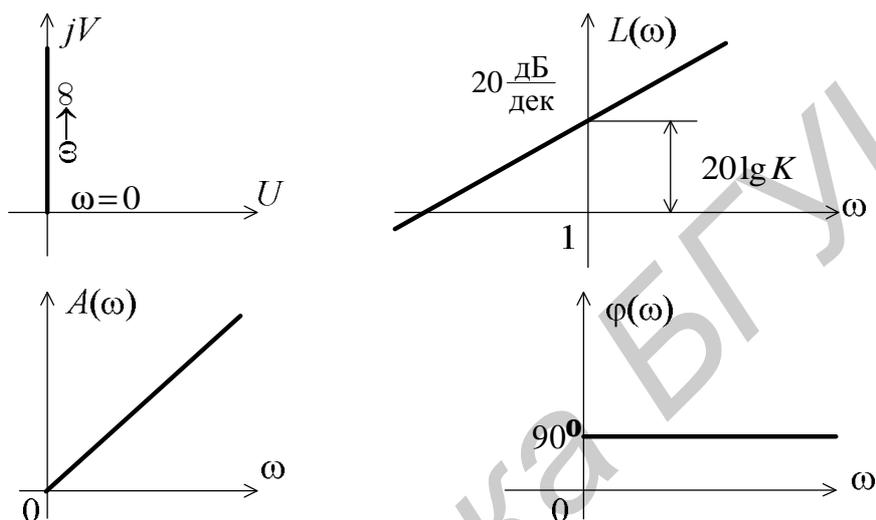


Рис. 2.8

Апериодическое (инерционное) звено первого порядка. Дифференциальное уравнение звена имеет вид $(Tp + 1)x_2(t) = Kx_1(t)$.

Передаточная функция и частотные характеристики имеют вид

$$W(s) = \frac{K}{Ts + 1}, \quad W(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega + 1}, \quad A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}},$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg T\omega, \quad L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{T^2\omega^2 + 1}.$$

Весовая и переходная функции звена определяются выражениями

$$w(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \quad h(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right),$$

графики которых представлены на рис. 2.9.

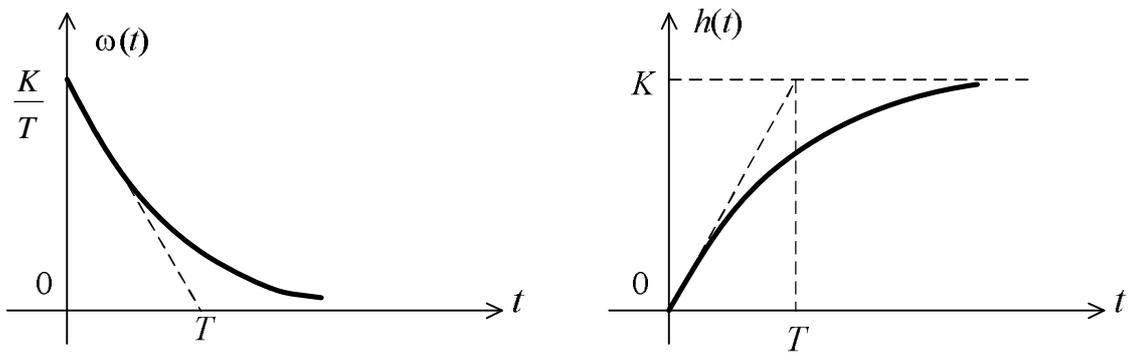


Рис. 2.9

На рис. 2.10 изображены частотные характеристики звена $W(j\omega)$, $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$. При этом годограф вектора $W(j\omega)$ представляет собой полуокружность.

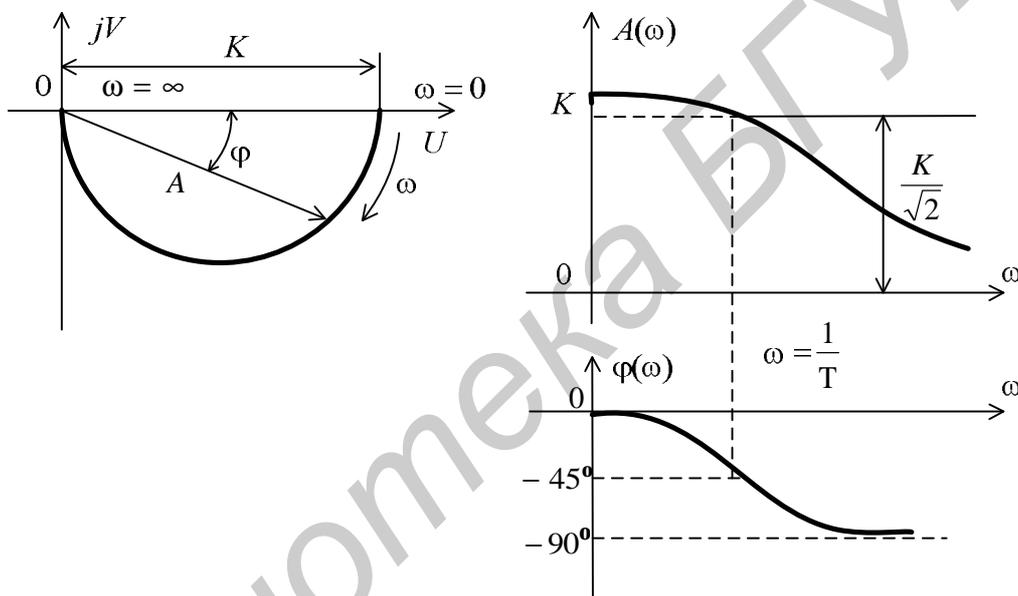


Рис. 2.10

ЛАЧХ $L(\omega)$ может быть построена по приведенному выше выражению по точкам. Однако возможен более простой способ построения приближенной или асимптотической ЛАЧХ в виде отрезков прямых линий с наклонами: 0 до частоты $\omega < 1/T$ и -20 дБ на декаду после частоты $\omega = 1/T$. Соответствующий график приближенной (асимптотической) ЛАЧХ приведен на рис. 2.11, там же представлена и ЛФЧХ.

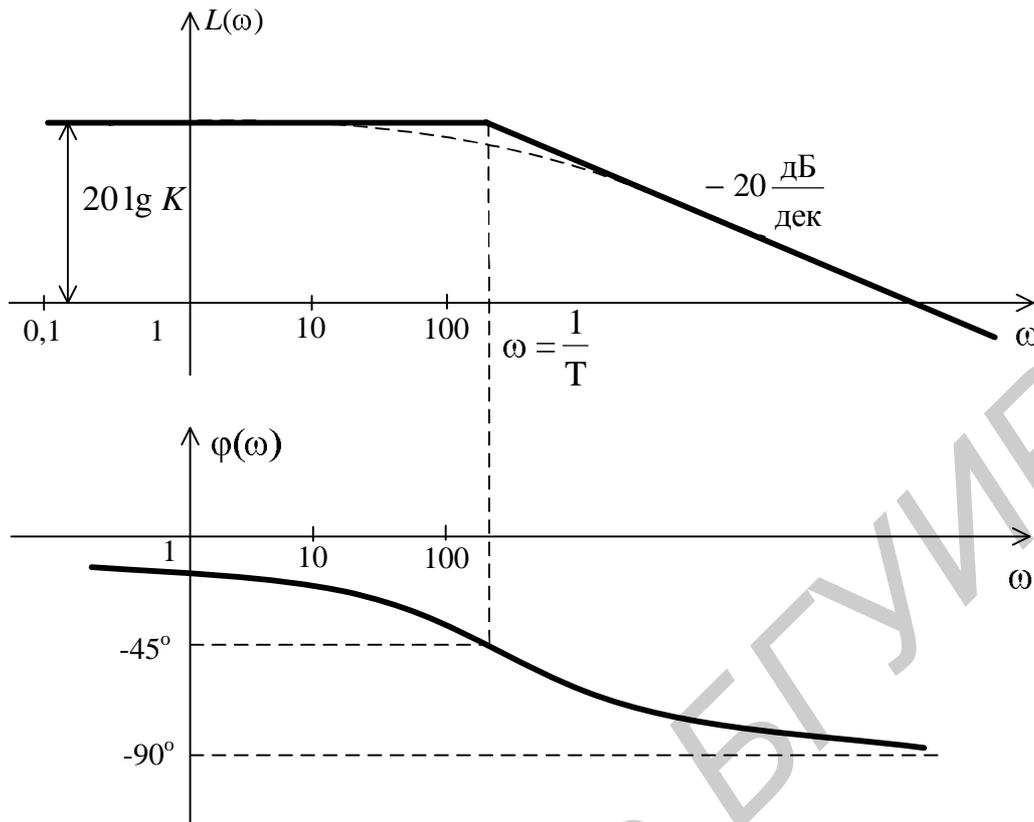


Рис. 2.11

Штриховой линией показан точный график $L(\omega)$. Максимальная ошибка Δ между точным графиком $L(\omega)$ и асимптотическим будет при $\omega = \frac{1}{T}$ и составит

$$\Delta = 20 \lg K - \left[20 \lg K - 20 \lg \sqrt{T^2 \omega^2 + 1} \right] \Big|_{\omega = \frac{1}{T}} = 20 \lg \sqrt{2} \cong 3,03 \text{ дБ},$$

что вполне допустимо.

Колебательное звено. Дифференциальное уравнение колебательного звена имеет вид

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)x_2(t) = Kx_1(t).$$

Будем полагать, что $T_1 < 2T_2$, тогда корни характеристического уравнения $T_2^2 \lambda^2 + T_1 \lambda + 1 = 0$ будут комплексными. Чаще передаточную функцию звена записывают в виде $W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$, где $T = T_2$, $\xi = \frac{T_1}{2T_2}$, $0 < \xi < 1$.

Частотные и временные характеристики звена имеют следующий вид:

$$W(j\omega) = \frac{K}{T^2 (j\omega)^2 + 2\xi T j\omega + 1}; \quad A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2}, & \omega \leq \frac{1}{T}, \\ -180^\circ - \operatorname{arctg} \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2}, & \omega \geq \frac{1}{T}, \end{cases}$$

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2},$$

$$w(t) = \frac{K(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t, \quad h(t) = K \left[1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) \right],$$

где $\alpha = \frac{\xi}{T}$, $\beta = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$.

Анализ АЧХ показывает, что $A(\omega) \leq K$ для любого ω , если $0,707 < \xi < 1$. При $\xi < 0,707$ на графике $A(\omega)$ появляется «горб», который уходит в бесконечность при $\xi \rightarrow 0$. Величину ξ называют параметром затухания. Чем меньше ξ , тем медленнее затухает колебательная составляющая в выражениях $w(t)$ и $h(t)$.

Асимптотическая ЛАЧХ в виде ломаной может быть получена только при $\xi = 1$ и имеет следующий вид: $L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg(1 + T^2 \omega^2)$.

Переход от прямой с наклоном 0 дБ/дек на прямую с наклоном -40 дБ/дек происходит на частоте излома $\omega = \frac{1}{T}$. Считается, что такую аппроксимацию

можно использовать при $0,5 < \xi < 1$. При $\xi < 0,5$ в окрестностях точки $\omega = \frac{1}{T}$ на ЛАЧХ также появляется «горб». В этом случае при построении $L(\omega)$ в диапазоне ω , близких к $\omega = \frac{1}{T}$, следует использовать точное выражение для

$L(\omega)$ или воспользоваться специальными номограммами.

Графики частотных характеристик колебательного звена приведены на рис. 2.12, а временных характеристик – на рис. 2.13.

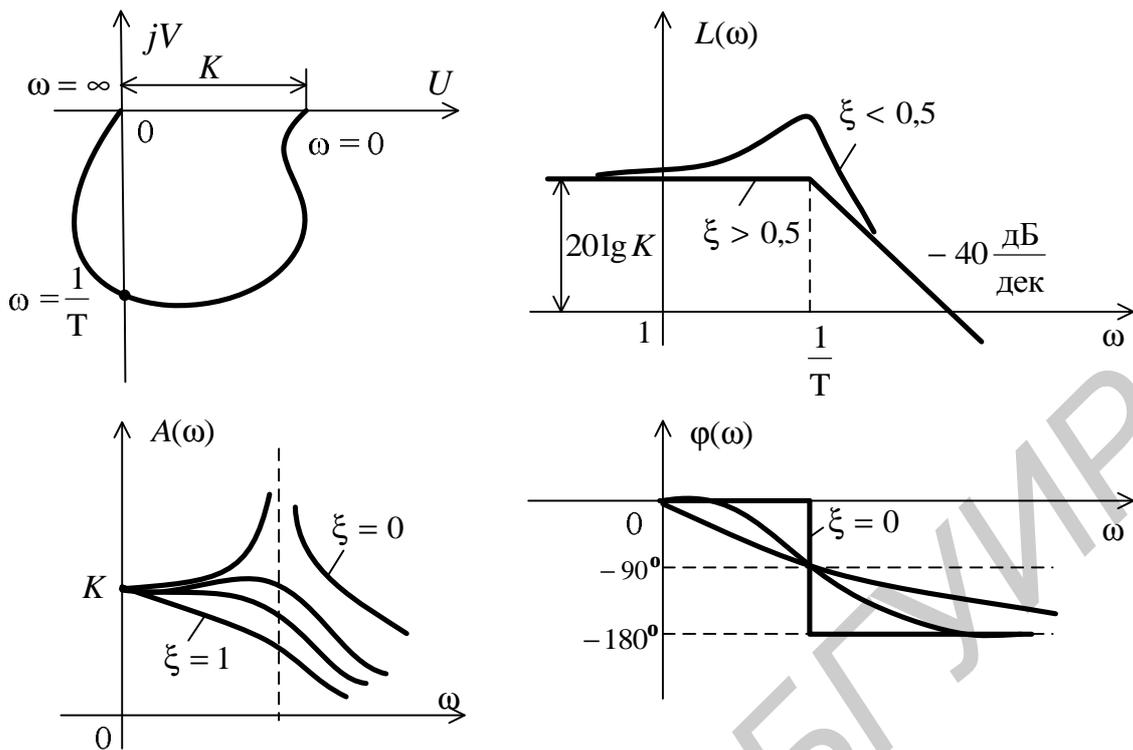


Рис. 2.12

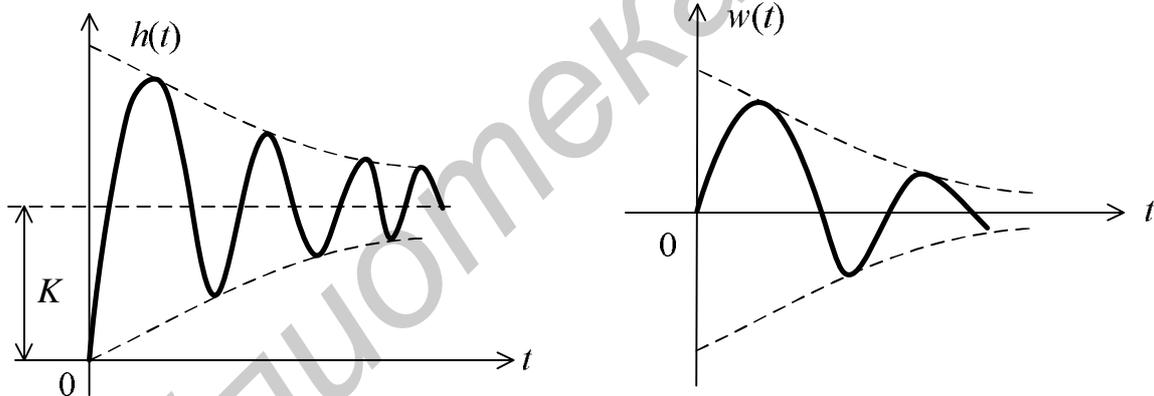


Рис. 2.13

Частные случаи колебательного звена: *консервативное звено* при $\xi = 0$, имеющее передаточную функцию $W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 1}$, и *апериодическое звено второго порядка* при $\xi \geq 1$, передаточная функция которого равна

$$W(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad T_{1,2} = \frac{T}{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}.$$

Форсирующее звено первого порядка. Дифференциальное уравнение и передаточная функция звена имеют вид $x_2(t) = K(Tp + 1)x_1(t)$, $W(s) = K(Ts + 1)$, а частотные и временные характеристики определяются выражениями

$$W(j\omega) = K(Tj\omega + 1), \quad A(\omega) = K\sqrt{T^2\omega^2 + 1}, \quad \varphi(\omega) = \arctg T\omega,$$

$$L(\omega) = 20 \lg K + 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2}, \quad h(t) = K[T\delta(t) + 1[t]], \quad w(t) = K[T\delta^{(1)}(t) + \delta(t)].$$

Графики частотных характеристик представлены на рис. 2.14.

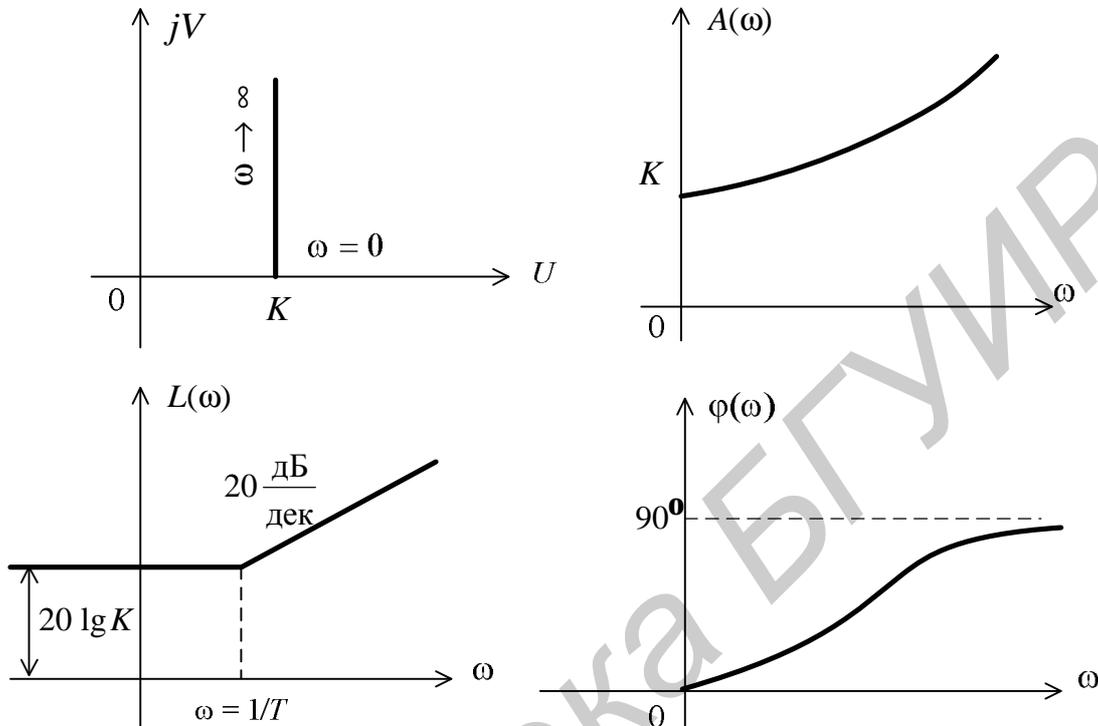


Рис. 2.14

Форсирующее звено второго порядка. Дифференциальное уравнение и передаточная функция равны соответственно $x_2(t) = K(T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1)x_1(t)$, $W(s) = K(T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1)$ при условии $0 \leq \xi < 1$. При $\xi \geq 1$ это звено можно представить как произведение двух элементарных форсирующих звеньев первого порядка.

2.6. Особенности и физическая реализуемость звеньев

Пусть звено имеет передаточную функцию $W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)}$.

Если нули передаточной функции (корни уравнения $N(s) = 0$) и полюса передаточной функции (корни уравнения $L(s) = 0$) имеют действительные части, отрицательные или равные нулю, то такое звено будем называть звеном *минимально-фазового типа*. При наличии хотя бы одного нуля или полюса с положительной вещественной частью звено будет относиться к *неминимально-фазовому типу*.

Рассмотрим эти звенья на простейшем примере. Для звена с передаточной функцией $W(s) = \frac{K}{Ts + 1}$, которое является минимально-фазовым,

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg T\omega. \quad \text{Звено с передаточной функцией}$$

$W(s) = \frac{K}{Ts - 1}$, являющееся неминимально-фазовым, имеет частотные

$$\text{характеристики } A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}, \quad \varphi(\omega) = -180^\circ + \arctg T\omega.$$

Таким образом, при одинаковых АЧХ неминимально-фазовое звено имеет больший по модулю фазовый сдвиг.

Указанное свойство справедливо и в общем случае.

Рассмотрим еще одно важное свойство звеньев – свойство физической реализуемости.

Для любого реального устройства АЧХ с увеличением частоты должна уменьшаться и стремиться к нулю, а фазовые сдвиги на высоких частотах должны быть отрицательными. Пусть полином числителя $KN(s)$ передаточной функции $W(s)$ имеет порядок m , а полином знаменателя $L(s)$ – порядок n . Тогда для минимально-фазового звена справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{KN(j\omega)}{L(j\omega)} \right| = \begin{cases} 0, & m < n, \\ \text{const}, & m = n, \\ \infty, & m > n; \end{cases} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = m \frac{p}{2} - n \frac{p}{2} \quad \text{и} \quad \begin{cases} < 0, & m < n, \\ 0, & m = n, \\ > 0, & m > n. \end{cases}$$

Из приведенных соотношений следует, что звено является *физически реализуемым*, если будет выполняться соотношение $n > m$.

С этой точки зрения, например, идеальное дифференцирующее звено с передаточной функцией $W(s) = Ks$ не является физически реализуемым. Реальное звено, осуществляющее операции дифференцирования, может быть аппроксимировано передаточной функцией $W(s) = Ks$ в некотором ограниченном диапазоне частот.

3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

3.1. Структурные схемы и структурные преобразования

Графически системы автоматического управления представляют в виде *структурных схем*, которые разделяют на конструктивные, функциональные и алгоритмические. В случае конструктивных схем блок является

законченным техническим устройством (двигатель, усилитель, тахогенератор и т.п.). В функциональных схемах блок представляет собой один или несколько

элементов, осуществляющих какую-либо функцию (усиления, преобразования, сбора информации и т.п.). Часто конструктивные блоки могут совпадать с функциональными.

При математическом описании систем управления распространение получили *алгоритмические структурные схемы*, составной частью которых являются звенья систем. Характеристикой звена является его математическое описание в виде дифференциального уравнения, передаточной функции или другой характеристики. Наиболее часто такой характеристикой является передаточная функция, которая записывается внутри прямоугольника, изображающего звено на структурной схеме.

Таким образом, алгоритмические структурные схемы, которые в основном в дальнейшем будем использовать и называть просто структурными схемами, являются графической интерпретацией математической модели системы управления.

В процессе исследования структурные схемы подвергаются преобразованию: некоторые звенья могут объединяться в одно звено, другие, наоборот, подвергаются расчленению. Такие преобразования носят название *структурных преобразований*, которые фактически соответствуют преобразованиям математических моделей. В результате таких преобразований конечная структурная схема может сильно отличаться от исходной, а тем более от функциональной или конструктивной схемы.

Одним из результирующих итогов структурных преобразований является приведение произвольной структуры системы к некоторому стандартному виду. Структурная схема такой *стандартной системы* автоматического управления представлена на рис. 3.1, где $W_2(s)$ – передаточная функция объекта управления, $W_1(s)$ – передаточная функция регулятора, v – входной сигнал, f – возмущающий, y – выходной сигнал, e – сигнал рассогласования. Единичная обратная связь в такой системе называется *главной обратной связью*.

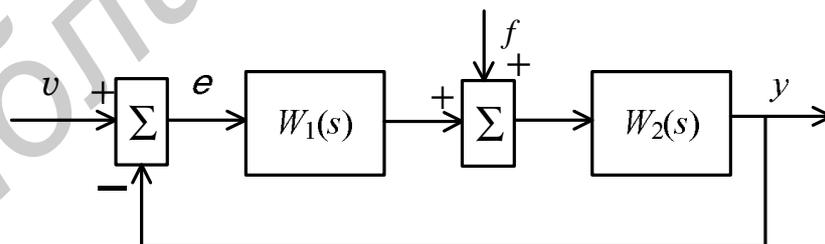


Рис. 3.1

На структурных схемах сигналы следует рассматривать как изображения по Лапласу соответствующих переменных.

Рассмотрим преобразование произвольной структуры к стандартному виду, которое осуществляется на основании правил структурных преобразований. Анализ структур систем автоматического управления

показывает, что существует три основных вида соединения звеньев: *последовательное, параллельное и соединение с помощью обратной связи.*

Структурные схемы, соответствующие указанным типам соединений, представлены на рис. 3.2, а, б, в.

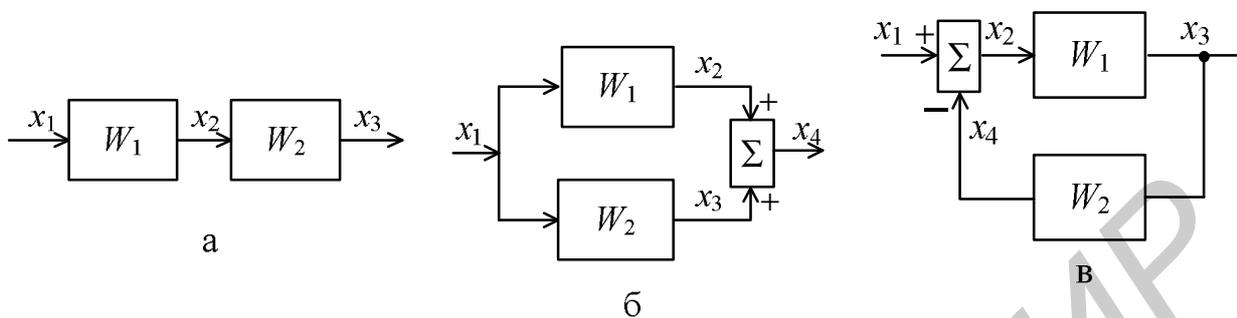


Рис. 3.2

Отметим, что в дальнейшем, если это ясно из контекста, символ s в записи передаточных функций будем иногда опускать.

Рассмотрим задачу объединения звеньев в одно звено, связывающее непосредственно вход и выход соответствующего соединения.

Для последовательного соединения (см. рис. 3.2, а) можно записать: $X_2(s) = W_1(s)X_1(s)$, $X_3(s) = W_2(s)X_2(s)$. Исключая промежуточную величину $X_2(s)$, получим $X_3(s) = W_1(s)W_2(s)X_1(s)$, $X_3(s) = W(s)X_1(s)$. Итак, при последовательном соединении общая передаточная функция соединения будет равна произведению передаточных функций звеньев: $W(s) = W_1(s)W_2(s)$. Если последовательно соединено i звеньев, то аналогично $W(s) = \prod_i W_i(s)$.

Для параллельного соединения (см. рис. 3.2, б) уравнения, связывающие координаты, имеют вид $X_2(s) = W_1(s)X_1(s)$, $X_3(s) = W_2(s)X_1(s)$, $X_4(s) = X_2(s) + X_3(s)$. Исключая величины $X_2(s)$ и $X_3(s)$ из этих уравнений, получим $X_4(s) = [W_1(s) + W_2(s)]X_1(s) = W(s)X_1(s)$, т.е. общая передаточная функция соединения будет равна сумме передаточных функций звеньев. В случае последовательного соединения i звеньев получим $W(s) = \sum_i W_i(s)$.

Уравнения, связывающие переменные при соединении звеньев с помощью обратной связи (см. рис. 3.2, в), имеют вид $X_3(s) = W_1(s)X_2(s)$, $X_4(s) = W_2(s)X_3(s)$, $X_2(s) = X_1(s) - X_4(s)$, откуда, исключая переменные $X_2(s)$, $X_4(s)$, получим

$$X_3(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} X_1(s) = W(s)X_1(s), \text{ т.е. общая передаточная функция}$$

$$\text{соединения будет равна } W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}.$$

Если звенья соединены с помощью положительной обратной связи, то

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 - W_1(s)W_2(s)}.$$

Наряду с объединением звеньев при структурных преобразованиях приходится прибегать к переносу отдельных узлов или сумматоров из одних участков структурной схемы в другие. Такие переносы изображены на рис. 3.3, где слева – исходная схема, а справа – структурная схема после соответствующего переноса узла или сумматора. Нетрудно видеть, что по отношению к сигналам входа и выхода исходная и преобразованная структурные схемы эквивалентны.

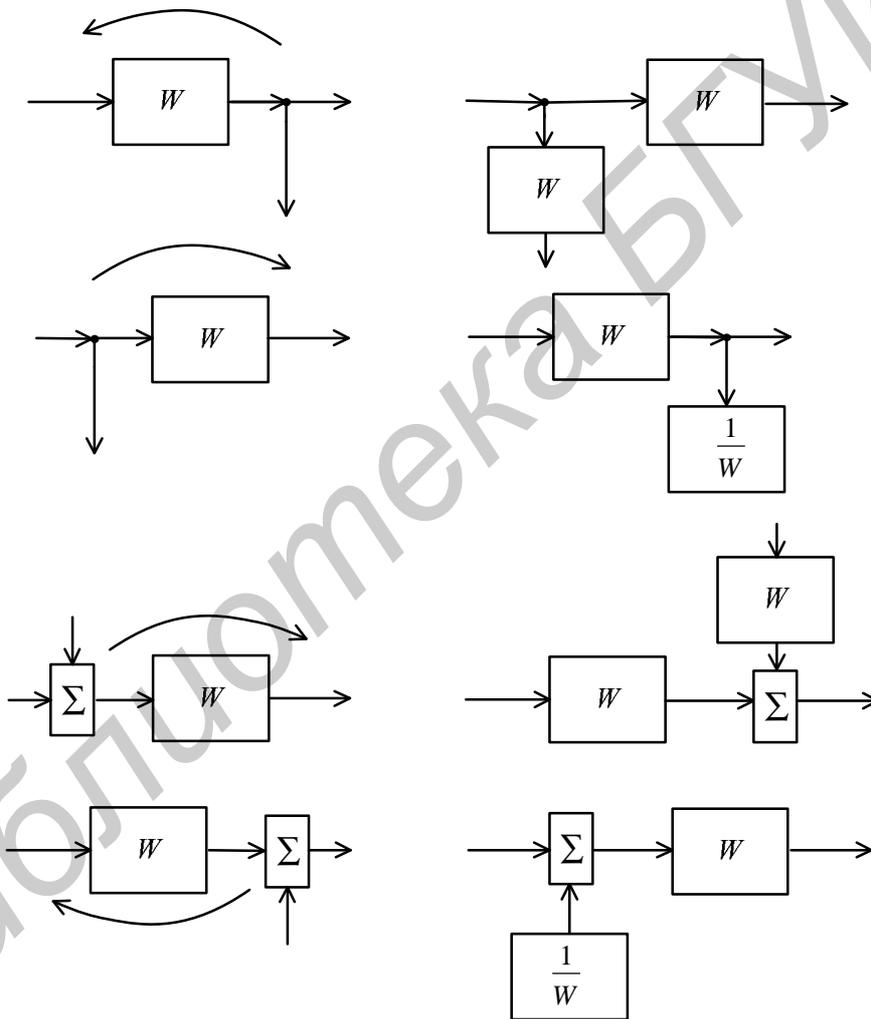


Рис. 3.3

На практике существует и другая задача – расчленения отдельного звена на более простые. Примером решения такой задачи может служить представление передаточной функции звена в виде суммы или произведения передаточных функций элементарных звеньев.

Пример 3.1. Рассмотрим систему управления, структурная схема которой представлена на рис. 3.4, а. Последовательность преобразования структуры следующая: переносим сумматор d через звено W_4 и через сумматор c . Далее объединим звенья до точки приложения воздействия f и после нее. В результате будем иметь структуру, представленную на рис. 3.4, б.

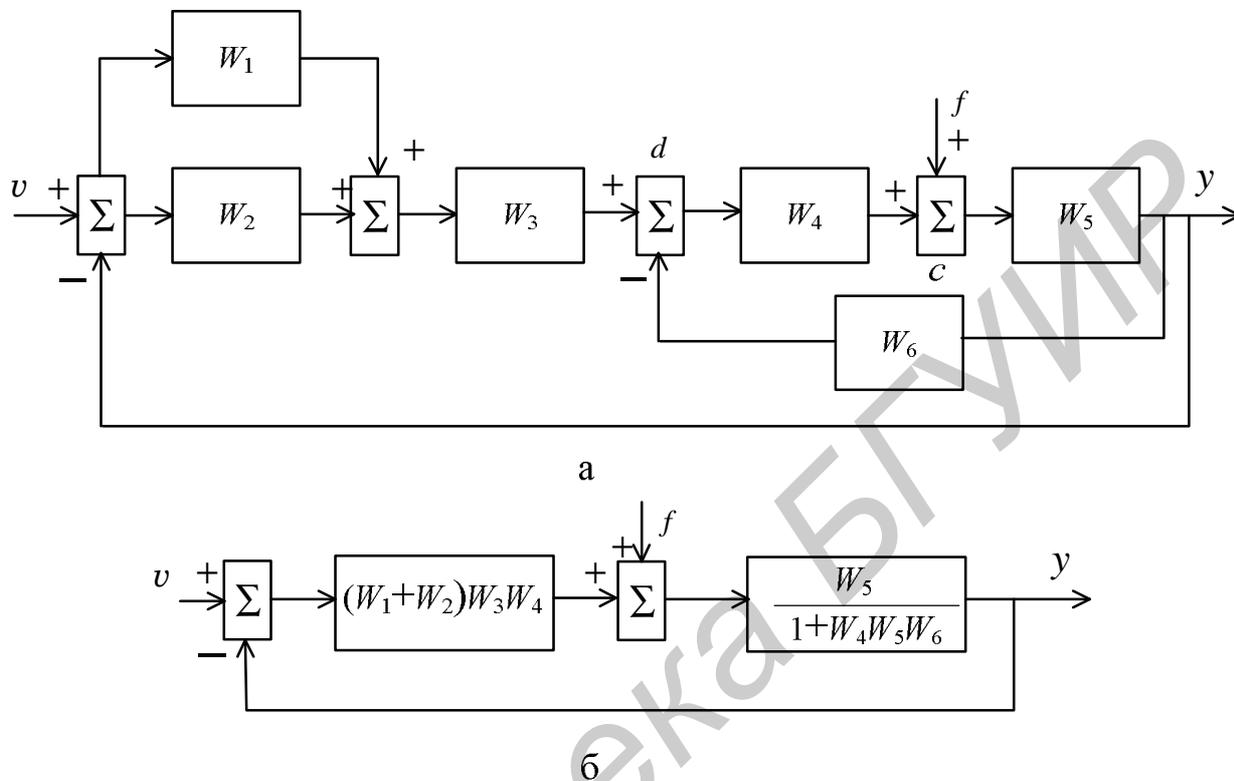


Рис. 3.4

3.2. Передаточные функции и уравнения систем

Рассмотрим структурную схему стандартной системы автоматического управления, представленную на рис. 3.1. Обозначим произведение передаточных функций $W_1(s)$, $W_2(s)$ через $W(s)$. Эту передаточную функцию будем называть *передаточной функцией разомкнутой системы*, которая связывает изображение выходного сигнала $Y(s)$ и входа $V(s)$ при размыкании цепи главной обратной связи и при $f = 0$.

Передаточная функция (как любая передаточная функция линейной системы или звена) есть отношение двух полиномов вида

$$W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)}, \quad (3.1)$$

где $N(s) = \tau_m^m s^m + \tau_{m-1}^{m-1} s^{m-1} + \dots + \tau_1 s + 1$, $L(s) = T_n^n s^n + T_{n-1}^{n-1} s^{n-1} + \dots + T_1 s + 1$.

Для физически реализуемых систем должно выполняться условие: $m < n$. Величину K будем называть *коэффициентом передачи (усиления)* разомкнутой системы. Полином $L(s)$ назовем *характеристическим полиномом* разомкнутой системы, а алгебраическое уравнение n -й степени $L(\lambda) = 0$, где λ –

комплексная переменная, будем называть *характеристическим уравнением* разомкнутой системы.

Если $L(\lambda) = 0$ не содержит нулевых корней, то систему управления будем называть *статической* по отношению к управляющему воздействию. Очевидно, $W(0) = K$.

При наличии нулевых корней передаточную функцию (3.1) можно представить в виде

$$W(s) = \frac{KN(s)}{s^v L_0(s)}, \quad (3.2)$$

где $L_0(\lambda) = 0$ не имеет нулевых корней; v – количество нулевых корней уравнения $L(\lambda) = 0$, т.е. говорят, что передаточная функция содержит s v -й степени в чистом виде.

Систему управления с передаточной функцией вида (3.2) будем называть *астатической* с астатизмом v -го порядка по отношению к управляющему воздействию. Очевидно, (3.1) есть частный случай (3.2) при $v = 0$.

Перейдем к рассмотрению характеристик замкнутой системы (рис. 3.1), для которой можно из структурной схемы записать уравнения

$$Y(s) = W_2(s)[F(s) + W_1(s)E(s)], \quad E(s) = V(s) - Y(s). \quad (3.3)$$

Из (3.3) нетрудно определить эти связи: $Y(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)}V(s) + \frac{W_2(s)}{1+W(s)}F(s)$, $E(s) = \frac{1}{1+W(s)}V(s) - \frac{W_2(s)}{1+W(s)}F(s)$. Обозначим $\frac{W(s)}{1+W(s)} = \Phi(s)$, $\frac{W_2(s)}{1+W(s)} = \Phi_f(s)$, $\frac{1}{1+W(s)} = \Phi_e(s)$, тогда $Y(s) = \Phi(s)V(s) + \Phi_f(s)F(s)$, $E(s) = \Phi_e(s)V(s) - \Phi_f(s)F(s)$.

Передаточную функцию $\Phi(s)$ назовем *главной передаточной функцией замкнутой системы*, $\Phi_f(s)$ – *передаточной функцией замкнутой системы по возмущению*, $\Phi_e(s)$ – *передаточной функцией замкнутой системы по ошибке*.

Если $W(s)$ представлена в виде (3.1), то

$$\Phi(s) = \frac{KN(s)}{D(s)}; \quad \Phi_e(s) = \frac{L(s)}{D(s)}; \quad \Phi_f(s) = \frac{R(s)}{D(s)}, \quad (3.4)$$

где полином $D(s) = L(s) + KN(s)$, а $R(s)$ – полином, который получается в результате перемножения $L(s)$ и $W_2(s)$.

Полином $D(s)$ носит название *характеристического полинома замкнутой системы*, а уравнение $D(\lambda) = 0$ – *характеристического уравнения замкнутой системы*. Степень полинома $D(s)$ определяется величиной n (если $m < n$) или

m (если $m > n$). Для физически реализуемой разомкнутой системы степень полинома $D(s)$ равна n .

Важной характеристикой замкнутой системы является ее *дифференциальное уравнение*. Из уравнения $Y(s) = \Phi(s)V(s) + \Phi_f(s)F(s)$, заменяя $\Phi(s)$ и $\Phi_f(s)$ выражениями (3.4), получим $D(s)Y(s) = KN(s)V(s) + R(s)F(s)$ и, переходя к оригиналам (или формально заменяя s на оператор дифференцирования p), имеем следующее дифференциальное уравнение замкнутой системы:

$$D(p)y(p) = KN(p)v(p) + R(p)f(p). \quad (3.5)$$

Порядок n дифференциального уравнения (порядок полинома $D(s)$) будем называть *порядком системы*.

Уравнение (3.5) описывает поведение системы в динамическом режиме, частным случаем которого является установившийся или статический режим. Полагая в (3.5) величины $f, v, y = \text{const}$, а производные этих величин равными нулю, что соответствует $p = 0$ в полиномах D, N, R , получим уравнение статического режима:

$$D(0)y = KN(0)v + R(0)f. \quad (3.6)$$

Величина $N(0) = 1$, а $D(0) = K$ для астатических систем и $D(0) = K + 1$ – для статических систем. Таким образом, имеем следующие уравнения статического режима: $y = v + \frac{R(0)}{K}f$ при $v \geq 1$; $y = \frac{K}{1+K}u + \frac{R(0)}{1+K}f$ при $v = 0$. Значение величины $R(0)$ зависит от вида передаточных функций $W_1(s)$, $W_2(s)$.

По аналогии со звеньями систем можно ввести временные характеристики замкнутой системы, используя соответствующие передаточные функции $\Phi(s)$, $\Phi_e(s)$ или $\Phi_f(s)$. Оригинал $\varphi(t)$ передаточной функции $\Phi(s)$ замкнутой системы относительно входа v и выхода y определится как $\varphi(t) = L^{-1}\{\Phi(s)\}$, а переходная функция как $h_3(t) = L^{-1}\{\Phi(s)/s\}$.

Аналогично можно определить эти характеристики, используя $\Phi_e(s)$ и $\Phi_f(s)$.

Пример 3.2. Пусть задана структурная схема системы (см. рис. 3.1), где $W_1(s) = \frac{K_1}{T_1s + 1}$, $W_2(s) = \frac{K_2}{s(T_2s + 1)}$. Используя результаты, приведенные выше, определяем основные характеристики системы:

$$W(s) = \frac{K_1K_2}{s(T_2s + 1)(T_1s + 1)}, \quad \Phi(s) = \frac{K_1K_2}{s(T_2s + 1)(T_1s + 1) + K_1K_2},$$

$$\Phi_e(s) = \frac{s(T_2s+1)(T_1s+1)}{s(T_2s+1)(T_1s+1) + K_1K_2}, \quad \Phi_f(s) = \frac{K_2(T_1s+1)}{s(T_2s+1)(T_1s+1) + K_1K_2}.$$

Дифференциальное уравнение замкнутой системы (3.5) примет вид

$$T_1T_2y^{(3)} + (T_1 + T_2)y^{(2)} + y^{(1)} + K_1K_2y = K_1K_2v + K_2(T_1f^{(1)} + f).$$

Система является системой с астатизмом первого порядка, порядок системы равен трем.

3.3. Частотные характеристики систем

Частотные методы анализа и синтеза систем управления находят широкое применение в инженерной практике. По аналогии с частотными характеристиками звеньев можно ввести соответствующие частотные характеристики для системы автоматического управления.

Важным классом частотных характеристик являются *частотные характеристики разомкнутой системы*, определяемые из передаточной функции $W(s)$. Это амплитудно-фазовая частотная характеристика $W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega)$, где $A(\omega) = |W(j\omega)|$ – АЧХ;

$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$ – ФЧХ; $U(\omega)$, $V(\omega)$ – соответственно

вещественная и мнимая частотные характеристики, $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ – логарифмическая амплитудная частотная характеристика разомкнутой системы.

Отметим некоторые общие свойства частотных характеристик для систем минимально-фазового типа. Пусть $W(s) = \frac{KN(s)}{s^v L_0(s)}$ и степень полинома

числителя m меньше степени полинома знаменателя n , тогда

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \begin{cases} K, & v = 0, \\ \infty, & v \geq 1; \end{cases} \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & v = 0, \\ -v \frac{\pi}{2}, & v \geq 1; \end{cases}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = 0, \quad \text{при любых } v; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = -(n - m) \frac{\pi}{2}.$$

При этом годограф $W(j\omega)$ на комплексной плоскости при $\omega \rightarrow \infty$ стремится к началу координат, при $\omega = 0$ для статической системы он начинается на действительной оси на расстоянии K от начала координат, а для астатических систем при $\omega \rightarrow 0$ уходит в бесконечность в третьем квадранте при $v = 1$, во втором квадранте при $v = 2$, в первом квадранте при $v = 3$ и т.д. по часовой стрелке.

При построении частотных характеристик разомкнутой системы полезно представить $W(s)$ в виде произведения передаточных функций $W_i(s)$ элементарных звеньев (см. подразд. 2.5), т.е. $W(s) = \prod_i W_i(s)$. В этом случае $A(\omega) = \prod_i A_i(\omega)$, $\varphi(\omega) = \sum_i \varphi_i(\omega)$, $L(\omega) = \sum_i L_i(\omega)$, что может существенно облегчить вычисление и построение характеристик. Если $L(\omega) = \sum_i L_i(\omega)$, то каждую элементарную характеристику $L_i(\omega)$ строят в виде отрезков ломаных (асимптот) и далее производят суммирование. Отметим, что первая низкочастотная асимптота определяется выражением $20 \lg K - 20 \lg \omega$ – это есть прямая с наклоном $(-v \cdot 20 \text{ дБ/дек})$, проходящая при $\omega=1$ через точку с координатой $20 \lg K$.

Рассмотрим теперь *частотные характеристики замкнутой системы*. Их можно получить по передаточным функциям замкнутой системы $\Phi(s)$, $\Phi_f(s)$, $\Phi_e(s)$. Чаще всего рассматривают частотные характеристики на базе главной передаточной функции замкнутой системы $\Phi(s)$. Из них обычно используются $A_3(\omega) = |\Phi(j\omega)|$ – АЧХ и $P(\omega) = \text{Re} \Phi(j\omega)$ – вещественная частотная характеристика замкнутой системы.

Остановимся на основных свойствах $A_3(\omega)$ и $P(\omega)$. Для физически реализуемых систем $\lim_{\omega \rightarrow \infty} A_3(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} P(\omega) = 0$. Начальные значения этих характеристик будут

$$A_3(0) = P(0) = \begin{cases} 1, & \text{для астатических систем,} \\ \frac{K}{1+K}, & \text{для статических систем.} \end{cases}$$

Между частотными характеристиками разомкнутой и замкнутой системы существует однозначная связь, которая следует из выражения

$$\Phi(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)}. \quad (3.7)$$

Представляя $\Phi(j\omega) = A_3(\omega)e^{j\varphi_3(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega)$ и $W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega)$, из (3.7) можно получить следующие выражения:

$$A_3(\omega) = \frac{A(\omega)}{\sqrt{A^2(\omega) + 2A(\omega)\cos\varphi(\omega) + 1}}, \quad \varphi_3(\omega) = \text{arctg} \frac{\sin\varphi(\omega)}{A(\omega) + \cos\varphi(\omega)},$$

$$P(\omega) = \frac{U(\omega)[1+U(\omega)] + V^2(\omega)}{[1+U(\omega)]^2 + V^2(\omega)}, \quad Q(\omega) = \frac{V(\omega)}{[1+U(\omega)]^2 + V^2(\omega)},$$

$$P(\omega) = \frac{A(\omega)[A(\omega) + \cos \varphi(\omega)]}{A^2(\omega) + 2A(\omega) \cos \varphi(\omega) + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{A(\omega) + \cos \varphi(\omega)}{A^2(\omega) + 2A(\omega) \cos \varphi(\omega) + 1}.$$

Эти выражения можно использовать для вычисления частотных характеристик замкнутой системы по частотным характеристикам разомкнутой. Существуют специальные номограммы, решающие такие задачи графически.

Библиотека БГУИР

4. ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

4.1. Общее описание процессов

Динамические процессы в стандартной системе автоматического управления, структурная схема которой приведена на рис. 3.1, описываются во временной области дифференциальным уравнением

$$D(p)y(t) = KN(p)v(t) + R(p)f(t) \quad (4.1)$$

или в области изображений выражением

$$Y(s) = \Phi(s)V(s) + \Phi_f(s)F(s). \quad (4.2)$$

Выходной сигнал $y(t)$ замкнутой системы, являющийся решением линейного дифференциального уравнения (4.1), может возникнуть в системе либо за счет внешних воздействий $v(t)$ или $f(t)$, либо за счет вариации начальных условий переменной $y(t)$ и ее производных. Составляющую выходного сигнала, обусловленную ненулевыми начальными условиями переменной $y(t)$ и ее производных, будем называть *свободной* и обозначать $y_c(t)$, а составляющие, обусловленные сигналами $v(t)$ и $f(t)$, – *вынужденными* и обозначать соответственно $y_{v\theta}(t)$ и $y_{f\theta}(t)$. Тогда процесс $y(t)$, являющийся решением линейного дифференциального уравнения (4.1), определяется выражением

$$y(t) = y_c(t) + y_{\theta}(t) = y_c(t) + y_{v\theta}(t) + y_{f\theta}(t), \quad (4.3)$$

где $y_{\theta}(t) = y_{v\theta}(t) + y_{f\theta}(t)$.

В математике $y_c(t)$ называют общим решением уравнения (4.1) без правой части (однородного уравнения), а $y_{\theta}(t)$ – частным решением уравнения (4.1) с правой частью (неоднородного уравнения).

Общее решение однородного уравнения в случае простых (различных) корней характеристического уравнения $D(\lambda) = 0$, которые обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, определяется выражением

$$y_c(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \mathbf{L} + C_n e^{\lambda_n t}, \quad (4.4)$$

где C_i – произвольные постоянные, определяемые через начальные условия $y(0)$, $y^{(1)}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$.

Если характеристическое уравнение $D(\lambda) = 0$ имеет один кратный корень, например λ_1 кратности r , а остальные $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ – простые, то общее решение будет иметь вид

$$y_c(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t} + \mathbf{L} + C_r t^{r-1} e^{\lambda_1 t} + C_{r+1} e^{\lambda_{r+1} t} + \mathbf{L} + C_n e^{\lambda_n t}. \quad (4.5)$$

В случае нескольких кратных корней в свободной составляющей будут появляться аналогичные группы слагаемых, соответствующие каждому кратному корню.

Для вычисления вынужденной составляющей обратимся к уравнению относительно изображений (4.2). Обозначим весовые функции замкнутой системы по управляющему сигналу $\varphi(t) = L^{-1}\{\Phi(s)\}$ и по возмущению $\varphi_f(t) = L^{-1}\{\Phi_f(s)\}$, тогда переходя в (4.2) к оригиналам, с учетом того, что произведение изображений есть свертка во временной области, получим

$$y_{\text{в}}(t) = y_{v_{\text{в}}}(t) + y_{f_{\text{в}}}(t) = \int_0^t \varphi(t-\tau)v(\tau)d\tau + \int_0^t \varphi_f(t-\tau)f(\tau)d\tau. \quad (4.6)$$

Таким образом, полное решение $y(t)$ дифференциального уравнения будет иметь вид

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \mathbf{L} + C_n e^{\lambda_n t} + \int_0^t \varphi(t-\tau)v(\tau)d\tau + \int_0^t \varphi_f(t-\tau)f(\tau)d\tau. \quad (4.7)$$

В случае нулевых начальных условий ($y(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$) все $C_i = 0$ и (4.7) превращается в соотношение (4.6).

При исследовании систем управления обычно ограничиваются внешними воздействиями определенного типа, что дает возможность ввести некоторые показатели качества процессов управления и оказывается удобным для сравнительного анализа проектируемых систем. Наиболее часто сигнал управления $v(t)$ (то же самое и для возмущения $f(t)$) задают в виде типового сигнала следующего вида:

$v(t) = \delta(t)$ – дельта-функция;

$v(t) = v_0 1[t]$ – ступенчатая функция амплитуды v_0 (скачок по положению);

$v(t) = v_1 t$ – скачок по скорости;

$v(t) = v_2 t^2$ – скачок по ускорению;

$v(t) = v_0 + v_1 t + v_2 t^2 + \dots + v_k t^k$ – полиномиальное воздействие;

$v(t) = A_0 \sin \omega t$ – гармоническое воздействие, где A_0 амплитуда, ωt – фаза, ω – частота;

$v(t) = A_0 e^{j\omega t}$ – гармоническое воздействие в комплексной форме.

В этих выражениях сигналы определены при $t > 0$ и равны нулю при $t < 0$, а $v_i = \text{const}$, $A_0 = \text{const}$, $\omega = \text{const}$.

Выбор того или иного сигнала зависит от вида системы и условий ее функционирования. Например, для систем стабилизации наиболее естественной формой управляющего воздействия является ступенчатая функция. Для следящих систем таковыми являются сигналы гармонического типа.

Наиболее часто динамические свойства системы оцениваются по ее реакции на единичную ступенчатую функцию $v(t) = 1[t]$, т.е. по виду

выходного сигнала $y(t)$, являющегося переходной функцией замкнутой системы $h_3(t)$.

На рис. 4.1 представлен наиболее типичный вид переходной функции $h_3(t)$, где h_y – установившееся значение выходной координаты.

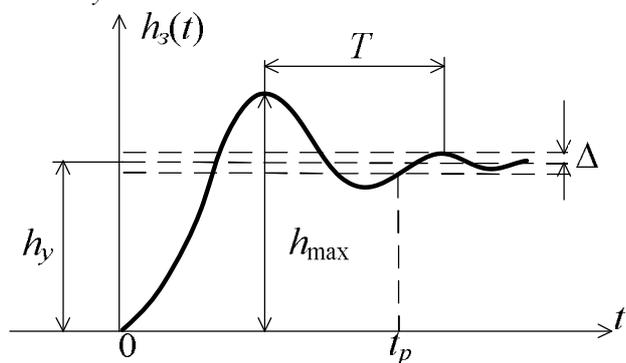


Рис. 4.1

Для оценки качества регулирования по виду $h_3(t)$ вводят показатели качества:

t_p – время регулирования (время переходного процесса), это время, после которого величина $|h_3(t) - h_y| < \Delta$,

где обычно $\Delta = 5\%$ от h_y ;

$$\sigma = [(h_{\max} - h_y) / h_y] \cdot 100\% \quad -$$

перерегулирование в процентах;

$\omega = 2\pi / T$ – частота колебаний переходного процесса;

число колебаний за время переходного процесса.

Наиболее важными показателями качества являются t_p и σ . Величина t_p может изменяться в широких пределах в зависимости от вида системы управления. Перерегулирование обычно лежит в пределах от 0 до 30%. Число колебаний за время регулирования обычно 1–2, а иногда 3–4. В некоторых случаях колебания недопустимы.

По виду функции $h_3(t)$ процессы делятся на три категории (рис. 4.2): монотонные (1), апериодические (2) и колебательные (3).

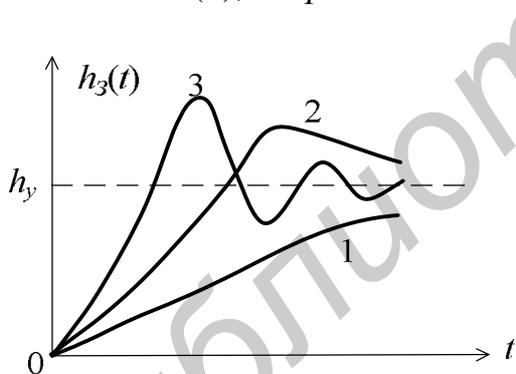


Рис. 4.2

У монотонных процессов $h_3^{(1)}(t)$ не меняет знак, у апериодического процесса знак производной $h_3^{(1)}(t)$ изменяется только один раз, у колебательного – бесконечное число раз.

Вычисление процессов в замкнутой системе фактически представляет собой задачу решения дифференциального уравнения (4.1) при заданных входных воздействиях $v(t)$ и $f(t)$ и начальных усло-

виях. Существующие методы решения этой задачи можно разбить на две категории: аналитические методы и методы моделирования на ПЭВМ.

Пример 4.1. В системе (см. рис. 3.1) будем полагать $W_1(s) = K_1 / (T_1 s + 1)$; $W_2(s) = K_2 / s$; $T_1 = 0,01$ с; $K_1 = 10$; $K_2 = 0,475$, где K_1 и K_2 имеют соответствующую размерность.

Найдем выражение, связывающее выходной сигнал y с внешними воздействиями v и f . Для определения свободной составляющей (произвольных

C_i) воспользуемся операционным методом решения дифференциального уравнения.

Выражение (4.2) будет иметь вид

$$Y(s) = \frac{K_1 K_2}{s(T_1 s + 1) + K_1 K_2} V(s) + \frac{K_2(T_1 s + 1)}{s(T_1 s + 1) + K_1 K_2} F(s),$$

из которого дифференциальное уравнение замкнутой системы (4.1) будет $T_1 y^{(2)} + y^{(1)} + K_1 K_2 y = K_1 K_2 v + K_2 T_1 f^{(1)} + K_2 f$.

Будем полагать начальные условия для выходного сигнала $y(0)$, $y^{(1)}(0)$ ненулевыми, а для входного сигнала – нулевыми. Применим к дифференциальному уравнению преобразование Лапласа.

$T_1[s^2 Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0)] + [sY(s) - y(0)] + K_1 K_2 Y(s) = K_1 K_2 V(s) + K_2 T_1 s F(s) + K_2 F(s)$, откуда

$$Y(s) = \frac{1}{T_1 s^2 + s + K_1 K_2} \left[(1 + T_1 s)y(0) + T_1 y^{(1)}(0) + K_1 K_2 V(s) + K_2 (T_1 s + 1)F(s) \right]$$

Полученное выражение отличается от первоначального в этом примере наличием членов, учитывающих ненулевые начальные условия. С учетом заданных параметров T_1 , K_1 , K_2 будем иметь

$$Y(s) = \frac{1 + 0,01s}{0,01(s^2 + 100s + 475)} y(0) + \frac{1}{s^2 + 100s + 475} y^{(1)}(0) + \Phi(s)V(s) + \Phi_f(s)F(s),$$

где $\Phi(s) = \frac{475}{s^2 + 100s + 475}$, $\Phi_f(s) = \frac{47,5(0,01s + 1)}{s^2 + 100s + 475}$.

Применяя обратное преобразование Лапласа, получим в области оригиналов

$$y(t) = \left[\frac{95}{90} e^{-5t} - \frac{5}{90} e^{-95t} \right] y(0) + \left[\frac{1}{90} e^{-5t} - \frac{1}{90} e^{-95t} \right] y^{(1)}(0) + \int_0^t \varphi(t - \tau) v(\tau) d\tau + \int_0^t \varphi_f(t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

где $\varphi(t) = L^{-1}\{\Phi(s)\} = \frac{475}{90} \left[e^{-5t} - e^{-95t} \right]$, $\varphi_f(t) = L^{-1}\{\Phi_f(s)\} = 0,475 \left[\frac{95}{90} e^{-5t} - \frac{5}{90} e^{-95t} \right]$.

4.2. Аналитические методы вычисления процессов

Аналитические методы вычисления выходного сигнала замкнутой системы базируются на известных методиках решения дифференциальных уравнений. Решение (4.1) классическими методами во временной области приводит к соотношению (4.7). Зная $\varphi(t)$, $\varphi_f(t)$, внешние воздействия $v(t)$, $f(t)$ и

интегрируя (4.7), можно вычислить реакцию системы $y(t)$. Такой подход редко используется в практике теории управления, а выражение (4.7) в большей степени применяется в теоретических выкладках.

На практике решение уравнения (4.1) чаще всего осуществляют с помощью операционного исчисления на базе преобразования Лапласа, т.е. за основу принимают выражение (4.2).

Рассмотрим методику вычисления реакции системы на внешнее воздействие $v(t)$ при нулевых начальных условиях координаты $y(t)$ и ее производных. В этом случае связь изображений входа и выхода будет иметь вид

$$Y(s) = \Phi(s)V(s), \quad (4.8)$$

где в общем случае $\Phi(s) = KN(s)/D(s)$, $N(s)$ и $D(s)$ – полиномы степени m и n соответственно.

Вычисление составляющей $f_{fB}(t)$, обусловленной возмущением $f(t)$, будет аналогичным с использованием передаточной функции $\Phi_f(s)$.

В (4.8) изображение $V(s)$ для большинства типовых воздействий представляет собой дробно-рациональную функцию, т.е. также является отношением некоторых полиномов относительно s . Таким образом, изображение $Y(s)$ в этом случае будет иметь следующий вид:

$$Y(s) = \frac{KN(s)}{D(s)}V(s) = \frac{M(s)}{Q(s)}, \quad \text{где степень полинома } M(s) \text{ меньше степени}$$

полинома $Q(s)$, которую обозначим через r и в общем случае $r > n$.

Вычисление оригинала $y(t)$ по его изображению осуществляется по формулам разложения Хевисайда. Если полюса изображения $Y(s)$, являющиеся корнями уравнения $Q(\lambda) = 0$, которые обозначим $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, являются различными, то оригинал $y(t)$ определяется выражением

$$y(t) = \sum_{i=1}^r \frac{M(\lambda_i)}{Q'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t}, \quad (4.9)$$

где $Q'(\lambda_i) = \left. \frac{d}{ds} Q(s) \right|_{s=\lambda_i}$, $M(\lambda_i) = M(s) \Big|_{s=\lambda_i}$.

В случае кратных полюсов для вычисления оригинала $y(t)$ используется выражение на основе вычетов [6].

Если входной сигнал $v(t) = 1[t]$, то $V(s) = \frac{1}{s}$, а изображение реакции системы в соответствии с (4.8) примет такой вид: $Y(s) = \frac{KN(s)}{sD(s)}$.

Реакция системы в этом случае является переходной функцией замкнутой системы $h_3(t)$, которая как частный случай (4.9) будет вычисляться по выражению

$$h_3(t) = \frac{KN(0)}{D(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{KN(\lambda_i)}{\lambda_i D'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t}, \quad (4.10)$$

где λ_i – различные корни характеристического уравнения замкнутой системы.

Следует отметить, что случай кратных корней при исследовании систем управления встречается сравнительно редко.

В (4.10) $KN(0)/D(0)$ характеризует так называемую *установившуюся составляющую*, а $\sum_{i=1}^n (\cdot)$ – *переходную составляющую*. И в общем случае в (4.9)

для произвольного процесса $y(t)$ можно всегда выделить две составляющие: установившуюся $y_y(t)$ и переходную $y_n(t)$. Частным случаем установившейся составляющей является случай, соответствующий $y_y = \text{const}$, которую будем называть *статической составляющей*. Для асимптотически устойчивых систем (это понятие будем рассматривать в разд. 5) всегда $\lim_{t \rightarrow \infty} y_n(t) = 0$ и при больших значениях t реакция системы $y(t) = y_y(t)$.

Отметим, что так как в (4.10) $\frac{KN(\lambda_i)}{\lambda_i D'(\lambda_i)}$ – это постоянные величины, то структура переходной составляющей $y_n(t)$ идентична структуре свободной составляющей $y_c(t)$ (4.4).

Реакция системы $y(t)$ на входной сигнал $v(t)$ при нулевых начальных условиях определяется выражением $y(t) = \int_0^t \varphi(t - \tau) v(\tau) d\tau$.

Для вычисления установившейся составляющей можно воспользоваться выражением [1]:

$$y_y(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(t - \tau) v(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \varphi(\tau) v(t - \tau) d\tau. \quad (4.11)$$

При гармоническом входном сигнале для вычисления установившейся составляющей можно использовать частотные характеристики системы. Пусть на входе системы $v(t) = A_0 \sin \omega_0 t$, тогда установившееся значение выходного сигнала будет также гармоническим сигналом и может быть вычислено по выражению

$$y_y(t) = A_0 |\Phi(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \varphi_3(\omega_0)), \quad (4.12)$$

где $|\Phi(j\omega_0)|$ – значение АЧХ, а $\varphi_3(\omega_0) = \arg \Phi(j\omega_0)$ – значение ФЧХ замкнутой системы при $\omega = \omega_0$.

Пример 4.2. Рассмотрим систему управления, структура которой представлена на рис. 3.1. Как и в предыдущем примере, $W_1(s) = \frac{K_1}{T_1s + 1}$,

$W_2(s) = \frac{K_2}{s}$. Пусть $T_1 = 0,01$ с; $K_1 = 10$; $K_2 = 0,475$. Входной сигнал $v(t) = 1[t]$.

С учетом изображения входного сигнала $V(s) = 1/s$ найдем

$$Y(s) = \frac{475}{s^2 + 100s + 475} \cdot \frac{1}{s} = \frac{KN(s)}{sD(s)}.$$

Используя (4.10) с учетом того, что характеристическое уравнение $\lambda^2 + 100\lambda + 475 = 0$ имеет два различных корня $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -95$, получим

$$y(t) = h_3(t) = 1 + \left[-\frac{19}{18}e^{-5t} + \frac{1}{18}e^{-95t} \right].$$

Из полученного выражения следует, что переходная составляющая с течением времени затухает, а установившаяся – постоянна и равна единице.

Вычислим установившуюся составляющую выходного сигнала при гармоническом входном сигнале $v(t) = A_0 \sin \omega_0 t$, $\omega_0 = 10$ рад/с, $T_1 = 0,25$ с, $K_1 K_2 = 25$. Передаточная функция имеет вид $\Phi(s) = \frac{100}{s^2 + 4s + 100}$, откуда, заменяя s на

$$j\omega, \text{ получим } |\Phi(j\omega)| = \frac{100}{\sqrt{(100 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}}, \quad \varphi_3(\omega) = -\arctg \frac{4\omega}{100 - \omega^2}.$$

При $\omega = \omega_0 = 10$ значения $|\Phi(j10)| = 2,5$ и $\varphi_3(10) \cong -90^\circ = \frac{\pi}{2}$ рад. Таким образом, установившееся значение выходного сигнала будет равно

$$y_v(t) = 2,5A_0 \sin(10t - \frac{\pi}{2}).$$

Применение аналитических методов на практике ограничено из-за необходимости вычисления корней характеристического уравнения, построения по найденному аналитическому выражению переходной функции, нахождения показателей качества системы (t_p , σ и др.). Чтобы обойти эти трудности, были разработаны приближенные графические методы построения переходной функции, вытекающие из связи $h_3(t)$ с вещественной частотной характеристикой замкнутой системы $P(\omega)$:

$$h_3(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (4.13)$$

Выражение (4.13) положено в основу приближенных графических методов построения $h_3(t)$. Суть этих методов заключается в аппроксимации характеристик $P(\omega)$ и вычислении соответствующих составляющих переходного процесса. Например, А. А. Вороновым был предложен метод

аппроксимации $P(\omega)$ с помощью треугольных, а В. В. Солодовниковым – с помощью трапецеидальных характеристик.

Однако в связи с развитием вычислительной техники в настоящее время графо-аналитический метод вычисления переходной функции утратил свое прежнее значение. Переходной процесс любой САУ легко строится при проведении компьютерного эксперимента, например, в системе Matlab с помощью стандартных функций или с использованием средства Simulink после создания соответствующей математической модели исследуемой системы.

4.3. Моделирование переходных процессов на ПЭВМ

С помощью известной системы математических расчетов Matlab, в которую встроен специальный пакет для исследования систем автоматического управления – Control System Toolbox, можно по передаточной функции системы построить необходимые графики временных характеристик. В Matlab также можно представить эквивалентную модель системы в среде Simulink и исследовать ее характеристики в этом приложении.

Рассмотрим применение описанных возможностей работы в Matlab на примере системы, структурная схема которой задана в виде последовательного соединения двух апериодических звеньев с параметрами: $K_1 = 2$; $K_2 = 50$; $T_1 = T_2 = 0,1$ с (рис. 4.3).

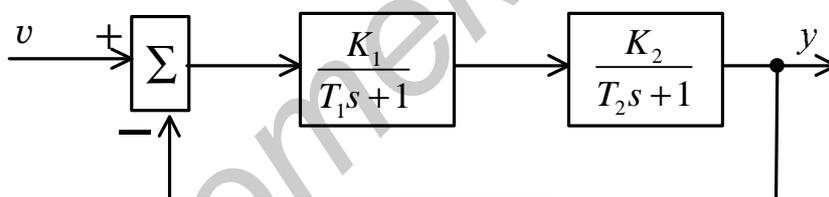


Рис. 4.3

Для этой системы построим график переходной функции $h_3(t)$ двумя способами.

1. При использовании операторов пакета Control System Toolbox запишем в командном окне следующую программу:

```
K1 = 2; K2 = 50; T1 = 0,1; T2 = 0,1;
w = tf([K1*K2], [T1*T2 (T1+T2) 1]);
w1 = feedback(w,1);
step(w1)
```

В первой строке происходит определение параметров системы и присвоение им численных значений.

Если передаточную функцию разомкнутой системы представить в виде отношения полиномов по степеням s :

$$W(s) = \frac{K_1 K_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{K_1 K_2}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1},$$

то удобно использовать оператор *tf*, который позволяет записывать передаточные функции путем формирования векторов коэффициентов числителя и знаменателя так, как это представлено во второй строке программы.

В третьей строке оператор *feedback* замыкает систему с единичным коэффициентом усиления в цепи обратной связи.

Оператор *step* позволяет построить переходной процесс системы при подаче на ее вход единичной ступенчатой функции $v(t) = 1(t)$.

График переходного процесса, полученный в результате выполнения программы, представлен на рис. 4.4.

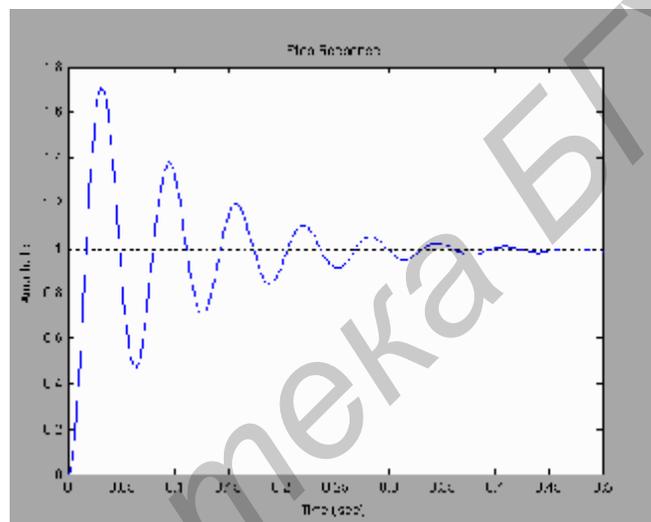


Рис. 4.4

2. Представим модель системы в среде Simulink, как показано на рис. 4.5, используя стандартные блоки из библиотеки ее приложения.

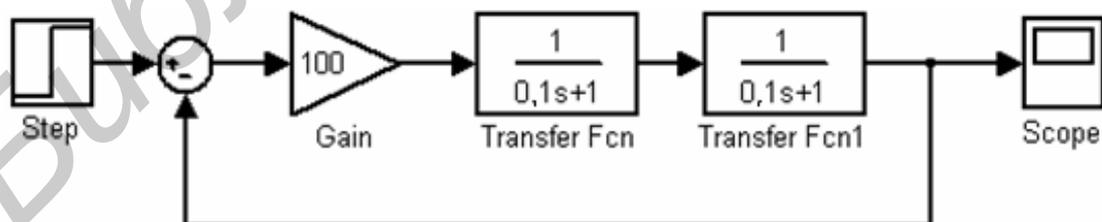


Рис. 4.5

При моделировании получим на экране виртуального осциллографа (**Scope**) график переходного процесса (рис. 4.6), который совпадает с приведенным на рис. 4.4.

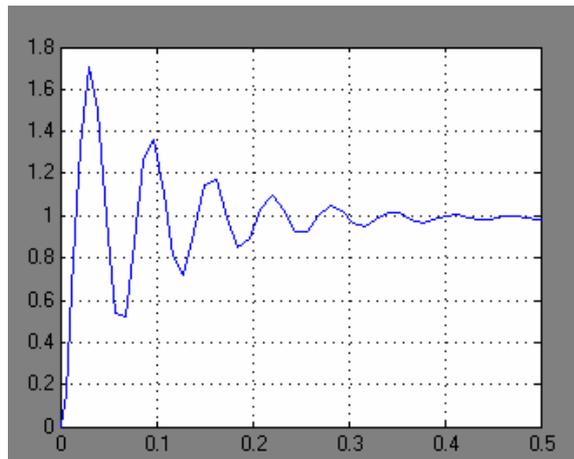


Рис. 4.6

Аналогичным образом могут быть построены и другие характеристики системы. Более подробно основы работы в системе Matlab рассматриваются в [8].

5. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

5.1. Понятие устойчивости линейных систем

Общие определения устойчивости процессов, справедливые как для линейных, так и для нелинейных систем, будут даны во второй части конспекта лекций. Здесь отметим, что свойство устойчивости или неустойчивости заданного процесса, протекающего в системе, рассматривается по отношению к другим процессам той же системы, отличающимся от заданного за счет изменений начальных условий. Величинами, отклоняющими процесс от заданного, являются возмущения начальных условий.

Для случая линейной системы динамические процессы в ней описываются линейным дифференциальным уравнением:

$$D(p)y(t) = KN(p)v(t) + R(p)f(t), \quad (5.1)$$

общее решение которого определяется выражением (4.3): $y(t) = y_c(t) + y_e(t)$.

Изменение начальных условий влияет только на поведение свободной составляющей и не влияет на $y_e(t)$, откуда следует, что устойчивость будет определяться поведением свободной составляющей. Если $\lim_{t \rightarrow \infty} y_c(t) = 0$, то процессы в линейной системе будем называть *асимптотически устойчивыми*, при $\lim_{t \rightarrow \infty} y_c(t) = \infty$ – *неустойчивыми*, и если при любом $t > 0$ свободная составляющая ограничена, то процессы будут просто *устойчивы*. Если одно из указанных свойств присуще какому-либо процессу, то для линейной системы

оно будет справедливо для всех процессов. Поэтому принято говорить об асимптотической устойчивости, неустойчивости или просто устойчивости линейной системы. В последнем случае еще говорят, что линейная система находится на *границе устойчивости* или является *нейтральной*.

Структура свободной составляющей имеет вид (4.4) или (4.5).

Из (4.4), (4.5) следует, что поведение свободной составляющей во времени не зависит от величин C_i и соответственно от начальных условий, а полностью определяется видом корней λ_i .

В комплексной плоскости корни корни интерпретируются как соответствующие точки. Если корень λ лежит слева от мнимой оси, т. е. $\operatorname{Re} \lambda < 0$, будем называть его *левым корнем*, если $\operatorname{Re} \lambda > 0$ – *правым*.

Пусть $\lambda_1 = -\alpha + j\beta$, $\alpha > 0$ – левый корень, тогда составляющая $C_1 e^{1,t} = C_1 e^{-\alpha t} [\cos \beta t + j \sin \beta t]$ в (4.4) при $t \rightarrow \infty$ будет затухать и стремиться к 0, а в случае правого корня $\lambda_1 = \alpha + j\beta$ – наоборот возрастет до бесконечности. Таким образом, при различных корнях характеристического уравнения, если все корни левые, $\lim_{t \rightarrow \infty} y_c(t) = 0$, что соответствует факту асимптотической устойчивости системы. Если хотя бы один корень правый ($\operatorname{Re} \lambda_i > 0$), то $\lim_{t \rightarrow \infty} y_c(t) = \infty$ и система будет неустойчива. Если для всех различных корней справедливо соотношение $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$, то в свободной составляющей появятся слагаемые, которые будут либо постоянными (нулевой корень), либо будут изменяться по гармоническому закону (чисто мнимые корни), и составляющая $y_c(t)$ будет ограничена, что соответствует нейтральной системе.

В случае кратного корня λ_1 , если $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} (C_1 + C_2 t + \dots + C_r t^{r-1}) e^{1,t} = 0$, так как при любом $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ функция $e^{\lambda_1 t}$ затухает быстрее, чем возрастает функция в скобках. Если же $\operatorname{Re} \lambda_1 = 0$, то это утверждение не правомерно.

Таким образом, необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости линейной системы, описываемой уравнением (5.1), является выполнение соотношения $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, i = 1, \dots, n$. Система будет просто устойчива, если $\forall \operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ и среди корней, лежащих на мнимой оси, нет кратных. Система будет неустойчива, если имеется хотя бы один корень, для которого $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$, или хотя бы один кратный корень, лежащий на мнимой оси.

Суждение об устойчивости можно сделать, найдя корни характеристического уравнения замкнутой системы

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (5.2)$$

Эту задачу можно упростить, так как фактически нам достаточно знать лишь расположение корней в плоскости корней относительно мнимой оси, которую называют *границей устойчивости*. Выделяют три типа границы устойчивости: *апериодического* типа, которая характеризуется нулевым корнем характеристического уравнения, *колебательного* типа, что соответствует наличию пары чисто мнимых корней, и границу, соответствующую бесконечно удаленному корню ($\lambda = \infty, a_0 = 0$ (5.2)). Если все корни уравнения (5.2) лежат слева от мнимой оси, т.е. $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, i = 1, \dots, n$, то характеристический полином $D(\lambda)$ будем называть *полиномом Гурвица*, или *гурвицевым полиномом*.

Определение расположения корней уравнения (5.2) относительно мнимой оси без их непосредственного вычисления производят на основе критериев устойчивости, которые делятся на две группы: алгебраические и частотные.

5.2. Алгебраические критерии устойчивости

К алгебраическим критериям устойчивости относят те, которые позволяют судить об устойчивости системы по коэффициентам уравнения (5.2). Необходимым условием устойчивости линейной системы (5.1) является положительность коэффициентов характеристического уравнения (5.2), т.е.

$$\forall a_i > 0, i = 1, \dots, n. \quad (5.3)$$

Докажем этот критерий. Пусть уравнение (5.2) имеет n корней $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, тогда полином $D(\lambda)$ можно по теореме Безу представить в виде $D(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n)$. Если $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, i = 1, \dots, n$, то произведение n сомножителей $(\lambda - \lambda_i)$ всегда даст полином n -й степени с положительными коэффициентами, и с учетом $a_0 > 0$ получим (5.3).

Критерий является лишь необходимым, т.е. если среди a_i есть отрицательные коэффициенты, то система неустойчива; если все a_i положительны, то система может быть как устойчивой, так и неустойчивой. В этом последнем случае требуется дальнейшее исследование.

Рассмотрим критерий, дающий необходимые и достаточные условия устойчивости, предложенные немецким ученым А. Гурвицем в 1895 году. Предварительно из коэффициентов уравнения (5.2) сформируем матрицу Гурвица:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Алгоритм ее формирования следующий. Сначала по главной диагонали слева направо выписываем коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_n . Далее столбцы вверх от главной диагонали дополняются коэффициентами с возрастающими индексами, а вниз – с убывающими индексами. Коэффициенты с индексами больше n и меньше нуля заменяются нулями. Последний столбец матрицы имеет все нулевые коэффициенты, кроме последнего a_n . Обозначим через Δ_i главные определители матрицы Гурвица, которые выделены в (5.4) штриховыми линиями: $\Delta_1 = a_1$, $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3, \dots$, $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$, где Δ_n – определитель матрицы Гурвица.

Критерий Гурвица. Необходимым и достаточным условием устойчивости линейной системы является при $a_0 > 0$ положительность всех определителей Гурвица:

$$a_0 > 0, \Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0. \quad (5.5)$$

Для систем до 4-го порядка включительно, раскрывая определители Гурвица, можно получить необходимые и достаточные условия устойчивости:

$$n = 1, \quad a_0 > 0, \quad a_1 > 0; \quad (5.6)$$

$$n = 2, \quad a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0; \quad (5.7)$$

$$n = 3, \quad a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; \quad (5.8)$$

$$n = 4, \quad a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0,$$

$$a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0. \quad (5.9)$$

Из (5.6), (5.7) следует, что для системы первого и второго порядка необходимые условия совпадают с необходимыми и достаточными, а при $n = 3$ и 4 кроме необходимых условий следует соблюдать дополнительное неравенство. При $n = 5$ и 6 появляются два дополнительных неравенства, при $n = 7$ и 8 – три и т.д. При аналитических исследованиях критерий Гурвица наиболее удобен для систем, порядок которых $n \leq 4$.

С помощью критерия Гурвица можно определить границы устойчивости. Если a_0 и все определители Гурвица Δ_i , кроме последнего, больше нуля, то нарушение условий устойчивости будет при $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} = 0$, откуда при $a_n = 0$ получаем границу устойчивости апериодического типа (появляется один нулевой корень), а при $\Delta_{n-1} = 0$ границу устойчивости колебательного типа (появляются два комплексно-сопряженных корня). При этом все остальные корни являются левыми. Граница устойчивости, соответствующая бесконечному корню, будет $a_0 = 0$.

Одним из частных случаев критерия Гурвица является критерий Лъенара–Шипара (1914), по которому для устойчивости системы необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_n > 0, \dots \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_5 > 0, \dots$$

или

$$a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_n > 0, \dots \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_6 > 0, \dots,$$

т.е. при соблюдении необходимых условий устойчивости требуется положительность четных или нечетных определителей Гурвица.

Вторым распространенным алгебраическим критерием устойчивости, дающим необходимые и достаточные условия устойчивости, является критерий Рауса–Гурвица. Этот критерий более удобен при анализе устойчивости с помощью ПЭВМ.

На первом этапе составляется таблица Рауса, элементы которой образуются из коэффициентов характеристического полинома замкнутой системы $D(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n$, в которой $a_n \neq 0$.

Таблица Рауса:

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \mathbf{K} \\
 s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \mathbf{K} \\
 s^{n-2} & c_{31} & c_{32} & c_{33} & \mathbf{K} \\
 s^{n-3} & c_{41} & c_{42} & c_{43} & \mathbf{K} \\
 \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\
 s^1 & c_{n1} & & & \\
 s^0 & c_{n+1,1} & & &
 \end{array} \quad (5.10)$$

Первые две строки состоят из коэффициентов $D(s)$.

Коэффициенты последующих строк вычисляются так:

$$\begin{aligned}
 c_{31} &= -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \quad c_{32} = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}; \quad \dots \\
 c_{41} &= -\frac{1}{c_{31}} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_{31} & c_{32} \end{vmatrix}; \quad c_{42} = -\frac{1}{c_{31}} \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ c_{31} & c_{33} \end{vmatrix}; \quad \dots
 \end{aligned} \quad (5.11)$$

и т.д.

Левый столбец записывается для наглядности.

По критерию Рауса–Гурвица система устойчива, если при $a_0 > 0$ положительны все элементы первого столбца таблицы ($a_0 > 0, a_1 > 0, c_{31} > 0, c_{41} > 0, \dots$).

Число правых корней в случае неустойчивой САУ равно числу перемен знака элементов первого столбца. Если элемент какой-то строки первого

столбца равен нулю, то САУ либо неустойчива, либо находится на границе устойчивости [6].

Пример 5.1. Рассмотрим замкнутую систему управления, у которой передаточная функция разомкнутой системы $W(s)$ имеет порядок не выше второго ($n \leq 2$) и определяется одним из перечисленных выражений:

$$W(s) = \frac{K}{s}, \frac{K}{s^2}, \frac{K}{Ts+1}, \frac{K}{s(Ts+1)}, \frac{K}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы для соответствующей разомкнутой будет иметь следующий вид: $\lambda + K = 0$, $\lambda^2 + K = 0$, $T\lambda + K + 1 = 0$, $T\lambda^2 + \lambda + K = 0$, $T^2\lambda^2 + 2\xi T\lambda + K + 1 = 0$. Если параметры $T > 0, K > 0, \xi > 0$, то в соответствии с (5.6), (5.7) замкнутая система будет асимптотически устойчивой для всех передаточных функций, кроме $W(s) = \frac{K}{s^2}$. В этом случае замкнутая система будет находиться на границе устойчивости, так как характеристическое уравнение $\lambda^2 + K = 0$ имеет чисто мнимые корни $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{K}$ (коэффициент $a_1 = 0$ и условие (5.7) не выполняется).

Пример 5.2. Пусть передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{K}{s^\nu L_0(s)}, \quad \nu \geq 2, \quad \text{а } L_0 = T_i^i s^i + T_{i-1}^{i-1} s^{i-1} + \dots + 1, \quad i + \nu = n.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы будет $\lambda^\nu L_0(\lambda) + K = T_i^i \lambda^n + \dots + T_1 \lambda^{\nu+1} + \lambda^\nu + K = 0$, из которого следует, что при $\nu \geq 2$ ряд коэффициентов характеристического уравнения a_{n-1} (при $\nu = 2$), a_{n-1} и a_{n-2} (при $\nu = 3$) и т.д. равен нулю. В этом случае не выполняется необходимое условие устойчивости (5.3) и система ни при таких значениях параметров K и T_i не может быть асимптотически устойчивой. Такой класс систем называют *структурно неустойчивыми*.

Пример 5.3. Передаточная функция разомкнутой системы задана в виде $W(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$. Характеристическое уравнение будет

$T_1T_2\lambda^3 + (T_1 + T_2)\lambda^2 + \lambda + K = 0$. Используя (5.8), найдем условие устойчивости системы в виде $T_1T_2 > 0$, $T_1 + T_2 > 0$, $K > 0$, $(T_1 + T_2) - KT_1T_2 > 0$, из которого следуют неравенства $T_1 > 0$, $T_2 > 0$, $K > 0$, $K < \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$.

Таким образом, при заданных T_1 и T_2 максимальное значение коэффициента усиления ограничено и увеличение приведет к потере устойчивости. Это свойство, как будет показано дальше, является весьма

характерным для систем автоматического управления и в общем случае. Система будет находиться на границе устойчивости, если выполняется одно из соотношений: $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $K = 0$, $K = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$.

5.3. Критерий устойчивости Михайлова

Этот критерий относится к группе частотных и был предложен в 1938 г. А. Михайловым. Он базируется на известном в теории функции комплексного переменного принципе аргумента. Характеристический полином замкнутой системы представим в виде $D(s) = a_0(s - \lambda_1) \dots (s - \lambda_n)$, где λ_i — корни уравнения $D(\lambda) = 0$.

Сделаем замену $s = j\omega$, тогда $D(j\omega) = a_0(j\omega - \lambda_1) \dots (j\omega - \lambda_n)$. Приращение аргумента вектора $j\omega - \lambda_i$ при изменении частоты ω от $-\infty$ до ∞ будет равно π для левого корня и $-\pi$ для правого корня (рис. 5.1). Приращение аргумента вектора $D(j\omega)$, имеющего l правых и $n-l$ левых корней, будет равно $\Delta \arg D(j\omega) = (n-l)\pi - l\pi = (n-2l)\pi$, а при изменении ω от 0 до ∞ — в 2 раза

меньше, т.е. $\Delta \arg D(j\omega) = (n-2l) \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \omega \leq \infty$

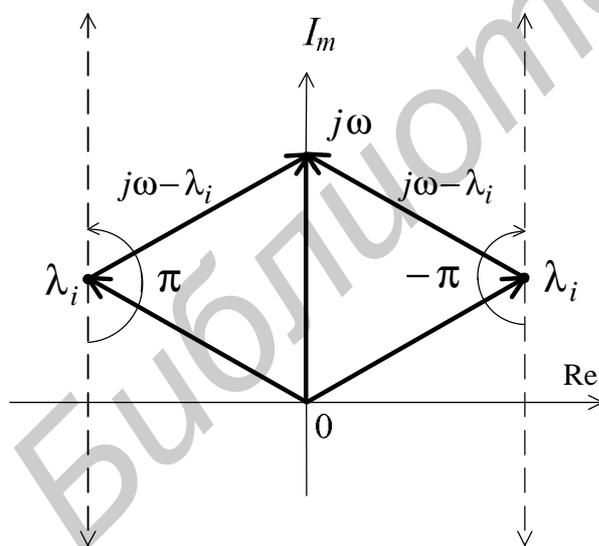


Рис. 5.1

Из последнего выражения следует, что для устойчивой САУ $l = 0$ и

$$\Delta \arg D(j\omega) = n \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \omega \leq \infty \quad (5.12)$$

Полином $D(s)$ после замены $s = j\omega$ представляет собой комплексное число, действительная и мнимая части которого зависят от частоты ω :

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega),$$

где $X(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + \dots,$

$$Y(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots$$

Изменяя ω от нуля до ∞ , на комплексной плоскости строится годограф, который называется *кривой Михайлова*. При $\omega = 0$ он всегда будет находиться на действительной оси в точке $X = a_n$, а при $\omega = \infty$ значения X и Y равны ∞ или $-\infty$, т.е. годограф будет уходить в бесконечность в каком-либо квадранте комплексной плоскости.

Критерий Михайлова. Для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы приращение аргумента функции $D(j\omega)$ при изменении ω от нуля до ∞ равнялось $n\frac{p}{2}$, что означает последовательное прохождение кривой Михайлова n квадрантов против часовой стрелки в комплексной плоскости.

Обычно критерий Михайлова применяется после проверки необходимого условия устойчивости (5.3).

На рис. 5.2 представлен ряд кривых Михайлова для систем различного порядка.

Кривые 1, 2 соответствуют устойчивым системам при $n = 3, 4$ соответственно, кривая 3 – неустойчивой системе при $n = 4$, так как нарушена последовательность прохождения квадрантов комплексной плоскости.

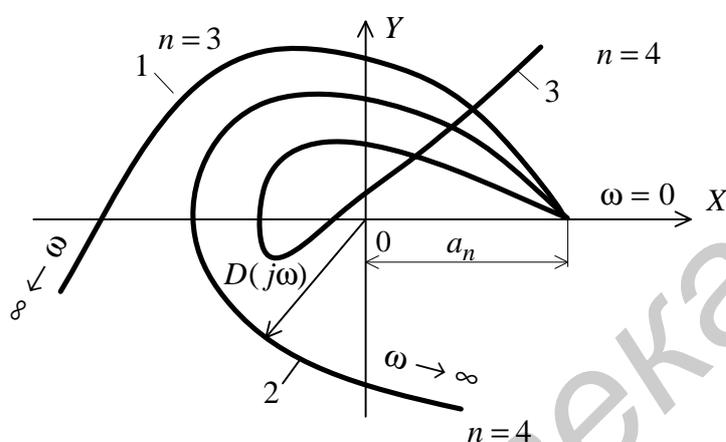


Рис. 5.2

Рассмотрим определение с помощью кривой Михайлова границ устойчивости. Система будет находиться на границе устойчивости, если чисто мнимая величина $\lambda = j\omega_0$ будет являться корнем уравнения $D(j\omega_0) = 0$, т.е. кривая Михайлова должна проходить через начало координат. При этом при $\omega_0 = 0$ имеем апе-

риодическую границу, при $\omega_0 \neq 0$ – колебательную, $\omega_0 = \infty$ соответствует бесконечному корню. При этом следует проверить, чтобы все остальные корни были левыми. Такую проверку можно осуществить, исследуя соответствующий график кривой Михайлова в точке пересечения начала координат. Если малые деформации кривой приводят к устойчивой системе, то это соответствует границе устойчивости.

На рис. 5.3 представлены два годографа, проходящие через начало координат.

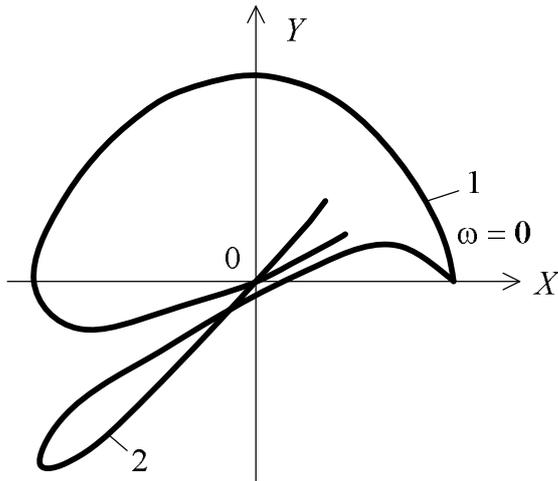


Рис. 5.3

$K > 0$, $T > 0$ кривая Михайлова при $\omega = 0$ будет начинаться на действительной оси в точке с координатами $(K, j0)$ и всегда проходить последовательно первый и второй квадранты комплексной области, так как мнимая часть $D(j\omega)$ всегда положительна, а действительная с ростом ω меняет знак с плюса на минус.

Система при любых $K > 0$, $T > 0$ всегда устойчива, что совпадает с результатом примера 5.1.

5.4. Критерий устойчивости Найквиста

Критерий устойчивости Найквиста – это частотный критерий, предложенный в 1932 г. Найквистом. Он позволяет судить об устойчивости замкнутой системы управления по виду АФЧХ разомкнутой системы.

Пусть задана передаточная функция разомкнутой системы в виде $W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)}$, где $L(s)$ – полином степени n ; $N(s)$ – полином степени m , $m < n$.

Тогда ее АФЧХ будет $W(j\omega) = \frac{KN(j\omega)}{L(j\omega)}$. Составим вспомогательную функцию

$$W_1(j\omega) = 1 + W(j\omega) = \frac{L(j\omega) + KN(j\omega)}{L(j\omega)} = \frac{D(j\omega)}{L(j\omega)}, \text{ где } D(s) \text{ – характеристический}$$

полином замкнутой системы, степень которого будет n .

Предположим, что характеристическое уравнение разомкнутой системы $L(\lambda) = 0$ имеет l правых корней и $(n-l)$ левых корней. Тогда приращение аргумента функции $L(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до ∞ будет $(n-2l)\pi$. Если система устойчива в замкнутом состоянии, то характеристическое уравнение замкнутой системы $D(\lambda) = 0$ имеет n левых корней и приращение аргумента $D(j\omega)$ будет равно $n\pi$. Найдем приращение аргумента функции $W_1(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до ∞ , которое будет в этом случае равно

Для кривой 1 малые деформации ее в начале координат приведут к устойчивой системе, что соответствует границе устойчивости, а для кривой 2 система при малых деформациях графика все равно будет неустойчивой.

Пример 5.4. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}.$$

Характеристический полином замкнутой системы будет

$$Ts^2 + s + K$$

и соответственно

$$D(j\omega) = [K - T\omega^2] + j\omega.$$

При любом

$$\Delta \arg W_1(j\omega) = \Delta \arg D(j\omega) - \Delta \arg L(j\omega) = 2l\pi. \quad (5.13)$$

$-\infty \leq \omega \leq \infty$ $-\infty \leq \omega \leq \infty$ $-\infty \leq \omega \leq \infty$

В случае, если передаточная функция $W(s)$ соответствует статической системе (соответствие астатической системе рассмотрим ниже), то при $m < n$ АФЧХ $W(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до ∞ всегда образует замкнутую кривую. Соответственно $W_1(j\omega)$ в комплексной плоскости также всегда образует замкнутую кривую. Таким образом, условие (5.13) для замкнутой кривой $W_1(j\omega)$ соответствует тому, что вектор $W_1(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до ∞ должен в положительном направлении обойти (охватить) начало координат

l раз. Из связи $W_1(j\omega) = 1 + W(j\omega)$ для АФЧХ $W(j\omega)$ это соответствует охвату точки с координатами $(-1, j0)$ на комплексной плоскости l раз годографом $W(j\omega)$. На основании изложенного сформулируем критерий.

Критерий Найквиста. Если разомкнутая система автоматического управления имеет l правых корней, то для того, чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы $W(j\omega)$ при изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$ охватывала точку $(-1, j0)$ на комплексной плоскости в положительном направлении l раз.

Частный случай критерия Найквиста относится к системе, устойчивой в разомкнутом состоянии ($l = 0$). При этом годограф $W(j\omega)$ не должен охватывать точку $(-1, j0)$.

Так как при $\omega < 0$ график $W(j\omega)$ является зеркальным отображением относительно действительной оси графика при $\omega > 0$, то обычно достаточно построить $W(j\omega)$ для $\omega > 0$. При этом в формулировке критерия полагают охват точки $(-1, j0)$ $\frac{l}{2}$ раз.

На рис. 5.4, а, б представлены графики $W_1(j\omega)$, $W(j\omega)$ в предположении $l = 2$ для случая устойчивой в замкнутом состоянии системы.

Из изложенного следует, что при корректном применении критерия устойчивости Найквиста следует сначала исследовать устойчивость разомкнутой системы и знать число правых корней ее характеристического уравнения. На практике обычно это нетрудно сделать по виду передаточной функции $W(s)$, если она представлена в виде произведения передаточных функций отдельных звеньев.

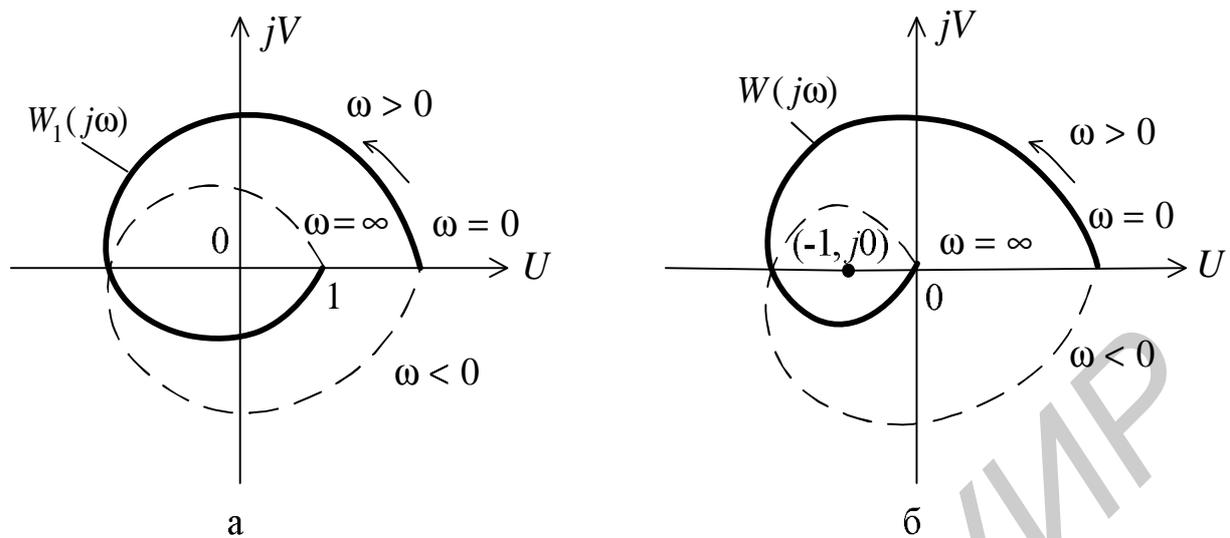


Рис. 5.4

В случае астатической системы формулировка критерия Найквиста сохраняется, однако при этом возникает проблема понятия охвата и неохвата точки $(-1, j0)$, так как при $\omega \rightarrow 0$ годограф $W(j\omega)$ уходит в бесконечность и кривая $W(j\omega)$ не является замкнутой. В этом случае АФЧХ дополняется дугой бесконечного радиуса по часовой стрелке и после этого проверяется выполнение условия критерия Найквиста. Изображенная на рис. 5.5 система устойчива.

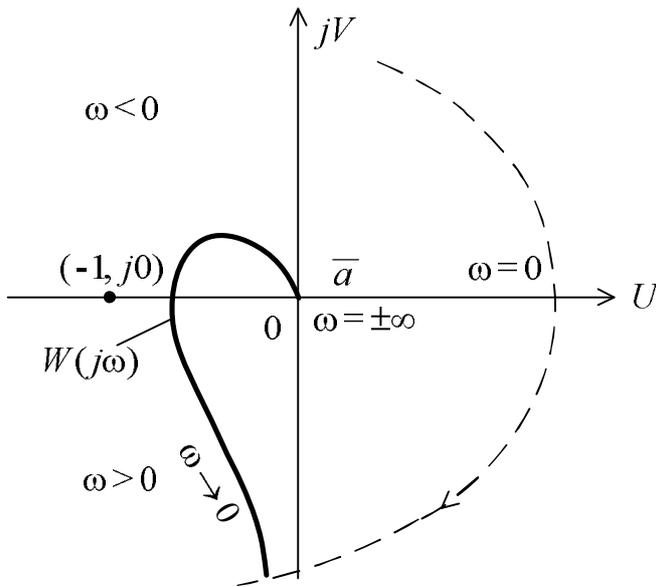


Рис. 5.5

На рис. 5.6 представлена АФЧХ разомкнутой системы для устойчивой замкнутой системы.

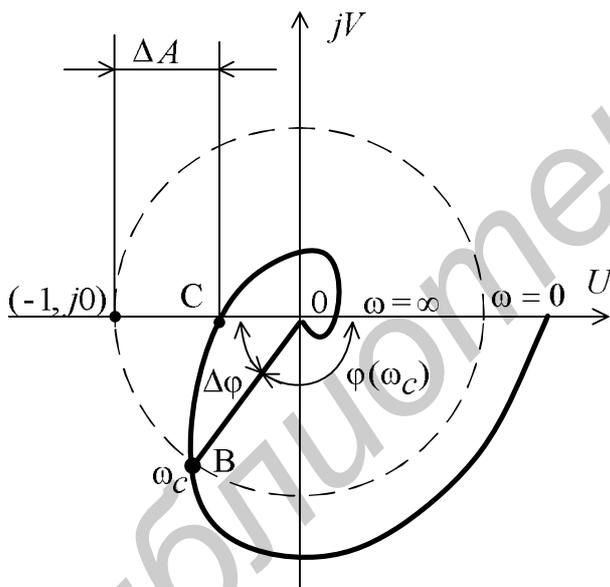


Рис. 5.6

(там, где $\varphi(\omega) = -180^\circ$). Очевидно, в данном случае величина ΔA всегда меньше единицы.

Если характеристика $W(j\omega)$ имеет более сложные очертания (так называемая *клювообразная характеристика* представлена на рис. 5.7), то запас по амплитуде характеризуют двумя числами ΔA_1 , ΔA_2 , а запас по фазе $\Delta\varphi$ определяется обычным образом.

Для нормального функционирования система управления должна обладать и некоторыми запасами устойчивости, т.е. при изменении параметров системы в процессе работы свойство устойчивости должно сохраняться.

Вполне очевидно, что чем дальше находится кривая $W(j\omega)$ от точки $(-1, j0)$, тем система будет находиться дальше от границы устойчивости. Числовые величины, характеризующие это свойство, носят название *запасов устойчивости* и могут быть введены различными способами.

Запас устойчивости по фазе определяется как величина угла $\Delta\varphi = 180^\circ - |\varphi(\omega_c)|$, где $\varphi(\omega_c)$ – значение фазы при $\omega = \omega_c$, а частота среза ω_c – это значение частоты, при которой $A(\omega_c) = 1$. Из рис. 5.6 видно, что точка B получается пересечением $W(j\omega)$ и окружности единичного радиуса (штриховая линия).

Запас устойчивости по амплитуде ΔA – это величина отрезка оси абсцисс между критической точкой $(-1, j0)$ и точкой C пересечения $W(j\omega)$ с осью абсцисс

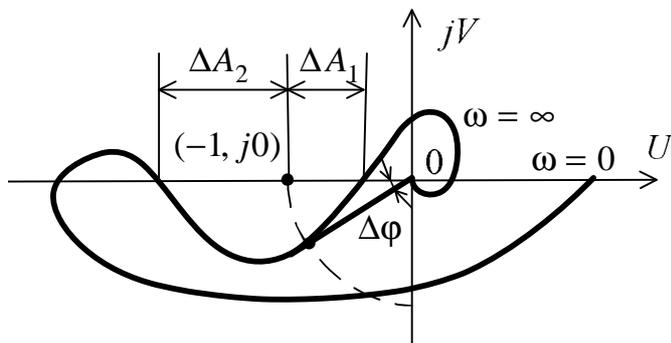


Рис. 5.7

Рассмотрим интерпретацию критерия Найквиста в логарифмической области. Для простоты рассмотрим систему, устойчивую в разомкнутом состоянии, для которой АФЧХ разомкнутой системы $W(j\omega)$ не должна охватывать точку $(-1, j0)$. Очевидно, «опасным» с точки зрения устойчивости является отрезок действительной оси $(-\infty, -1)$, когда фазовая характеристика равна $-\pi, -3\pi$ и т.д. При

этом модуль $A(\omega) > 1$. Пересечение же отрезка действительной оси $(-1, 0)$ годографом $W(j\omega)$ безопасно с точки зрения устойчивости. Если перейти к логарифмическим частотным характеристикам $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, то характеристики, приведенные на рис. 5.7, будут соответствовать логарифмическим характеристикам, изображенным на рис. 5.8.

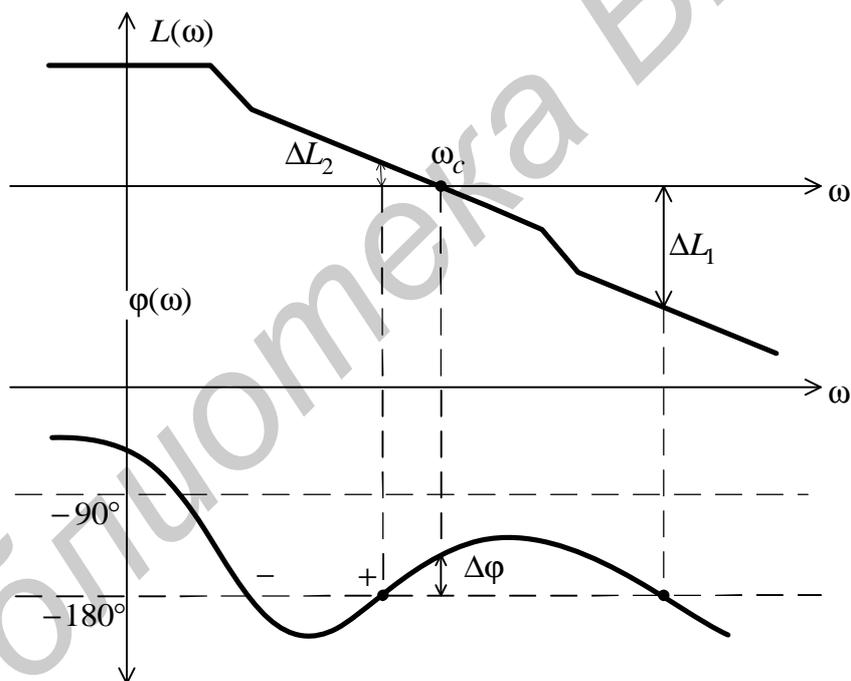


Рис. 5.8

В общем случае критерий Найквиста применительно к логарифмическим характеристикам формулируется так: для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов логарифмической фазовой частотной характеристикой $\varphi(\omega)$ разомкнутой системы прямых $\pm \pi(2i + 1)$, $i = 0, 1, \dots$ во всех областях, $L(\omega) > 0$ была равна $l/2$ (l – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы).

Отметим, что $L(\omega) > 0$ обычно до частоты среза системы ω_c . Если система устойчива в разомкнутом состоянии, то $l = 0$.

При использовании логарифмических характеристик также вводят запасы устойчивости, показанные на рис. 5.8. При ω_c запас устойчивости по фазе определяется как $\Delta\varphi = 180^\circ - |\varphi(\omega_c)|$, а запас устойчивости по модулю характеризуется величинами отрезков ΔL_1 , ΔL_2 , выраженными в децибелах. В случае обычных, не клювообразных, характеристик $W(j\omega)$ запас устойчивости по модулю характеризуется одной величиной ΔL , определяемой на критической частоте $\omega_{кр}$, соответствующей $\varphi(\omega_{кр}) = -180^\circ$.

На практике величина запасов устойчивости по фазе и модулю обычно колеблется в пределах $30^\circ \dots 60^\circ$ и $(6 \dots 20)$ дБ. Величина $(6 \dots 20)$ дБ соответствует усилению в $(2 \dots 10)$ раз.

Рассмотрим, как в общих чертах влияют параметры и вид АФЧХ разомкнутой системы $W(j\omega)$ на устойчивость. Если $W(j\omega) = \frac{KN(j\omega)}{L(j\omega)}$, то очевидно, что величина коэффициента усиления не влияет на вид фазовой частотной характеристики. Модуль $W(j\omega)$ пропорционален величине K . Таким образом, увеличение (уменьшение) величины K будет пропорционально увеличивать (уменьшать) $A(\omega)$, не изменяя фазового угла годографа вектора $W(j\omega)$ в комплексной плоскости. Кривая $W(j\omega)$ (см. рис. 5.6) будет пропорционально расширяться или сжиматься, и с увеличением K наступит момент, когда $W(j\omega)$ охватит точку $(-1, j0)$ и система станет неустойчивой. Это следует и по ЛАЧХ (см. рис. 5.8). Увеличение K поднимает характеристику $L(\omega)$, приводит к смещению ω_c вправо по оси абсцисс и в конечном счете к потере устойчивости.

В случае клювообразных характеристик (см. рис. 5.7, 5.8) возможна потеря устойчивости и при уменьшении общего коэффициента усиления. Увеличение порядка астатизма системы также отрицательно сказывается на устойчивости, так как приводит к увеличению отрицательных фазовых сдвигов.

5.5. Построение областей устойчивости

Устойчивость замкнутой системы зависит от корней характеристического уравнения

$$D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (5.14)$$

Пусть при определенных значениях коэффициентов все корни уравнения (5.14) будут левыми. Изменяя коэффициенты a_i , будем получать то или иное расположение корней на комплексной плоскости. Совокупность всех значений коэффициентов a_i , для которых все корни уравнения (5.14) являются левыми,

образует область устойчивости системы в пространстве коэффициентов характеристического уравнения.

Так как коэффициенты уравнения (5.14) являются функциями параметров системы (коэффициентов усиления, постоянных времени и т.п.), то аналогично можно говорить об областях устойчивости в пространстве параметров системы.

Обычно такие области строятся при изменении одного или двух параметров системы, так как при большем числе параметров геометрическая интерпретация областей теряет наглядность.

Вполне очевидно, что для построения областей устойчивости достаточно найти только лишь ее границу и показать, что хотя бы для одной из внутренних точек области все корни будут являться левыми.

Границы устойчивости могут быть найдены с помощью любого критерия (Гурвица, Михайлова). Так, в примере 5.3 с помощью критерия Гурвица найдены границы области устойчивости в пространстве трех параметров от $K = 0$ до $K = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$, $T_1 = 0$, $T_2 = 0$.

Однако для выделения областей устойчивости разработан специальный метод *D-разбиения*, предложенный Ю. Неймарком. Рассмотрим этот метод.

Корень уравнения (5.14) попадает на мнимую ось (границу устойчивости в плоскости корней), если $\lambda = j\omega$ является решением уравнения (5.14), т.е. выполняется равенство

$$D(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (5.15)$$

Если ω задано ($\omega = 0$ соответствует нулевому корню), то (5.15) можно рассматривать как уравнение относительно искомым коэффициентов a_i , при которых один корень находится на границе устойчивости. Изменяя ω от $-\infty$ до ∞ в пространстве коэффициентов a_i , получим некоторую поверхность, соответствующую границе устойчивости (попаданию корня уравнения (5.15) на мнимую ось). Эта поверхность разобьет все пространство коэффициентов на области с определенным расположением левых и правых корней, которые обозначим $D(n)$, $D(n-1), \dots, D(0)$. Область $D(n)$ соответствует n корням в правой полуплоскости, $D(n-1)$ – $(n-1)$ – корню в правой полуплоскости и т.д. Область $D(0)$ соответствует n корням в левой полуплоскости, т.е. области устойчивости. При пересечении границы, определяемой уравнением (5.15), происходит переход корня из левой полуплоскости в правую или наоборот.

Рассмотрим частный случай: *D-разбиение* по одному комплексному параметру. Пусть исследуемый параметр линейно входит в уравнение (5.14), которое в этом случае приводится к виду $D(\lambda) = S(\lambda) + vN(\lambda) = 0$, а граница области *D-разбиения* определяется уравнением $D(j\omega) = S(j\omega) + vN(j\omega) = 0$,

откуда, полагая \bar{v} комплексной величиной и обозначая ее \bar{v} , получим
$$\bar{v} = -\frac{S(j\omega)}{N(j\omega)} = X(\omega) + jY(\omega).$$

Границу D -разбиения в комплексной плоскости строим, изменяя ω от $-\infty$ до ∞ , которая будет представлять собой некоторую кривую. При изменении ω от $-\infty$ до 0 кривая будет зеркальным отображением относительно действительной оси кривой при $0 < \omega < \infty$.

При движении вдоль границы D -разбиения ее штрихуют слева, двигаясь при изменении ω от $-\infty$ до ∞ , что соответствует в плоскости корней движению вдоль мнимой оси снизу вверх так, что левая полуплоскость корней остается слева.

На рис. 5.9 изображена кривая D -разбиения в комплексной плоскости.

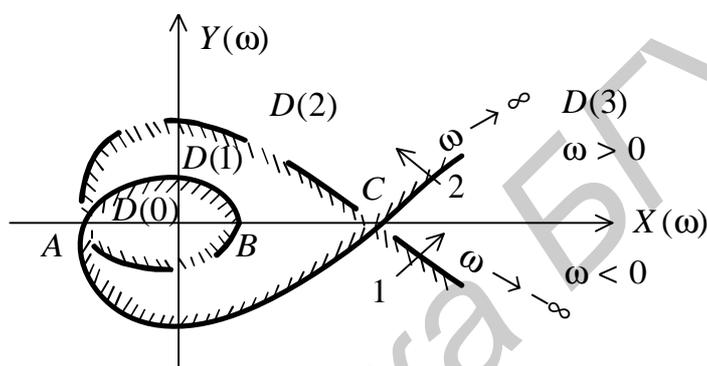


Рис. 5.9

Пересечение границы D -разбиения из заштрихованной стороны в незаштрихованную сторону (стрелка 1 на рис. 5.9) соответствует переходу одного корня из левой полуплоскости в правую. Стрелка 2 соответствует переходу правого корня в левую полуплоскость плоскости корней.

Обычно претендентом на область устойчивости является область, внутрь которой направлена штриховка, соответствующая наибольшему количеству левых корней. На рис. 5.9 это область, включающая отрезок АВ. Для проверки, является ли эта область областью устойчивости $D(0)$, берут любое значение исследуемого параметра \bar{v} из этой области, подставляют его в исходное характеристическое уравнение и с помощью любого критерия проверяют устойчивость. Так как на практике исследуемый параметр является действительным, то из полученной области устойчивости выделяют только действительные значения \bar{v} . Это будет отрезок АВ. На рис. 5.9 также показаны области $D(1)$, $D(2)$, $D(3)$.

Пример 5.5. Рассмотрим систему автоматического управления из примера 5.3. Построим кривую D -разбиения по одному параметру – коэффициенту K . Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$D(\lambda) = T_1 T_2 \lambda^3 + (T_1 + T_2) \lambda^2 + \lambda + K = 0.$$

Заменяя $\lambda = j\omega$, получим $D(j\omega) = T_1 T_2 (j\omega)^3 + (T_1 + T_2)(j\omega)^2 + j\omega + K = 0$, откуда, считая K комплексным, получим $\bar{K} = (T_1 + T_2)\omega^2 + j(T_1 T_2 \omega^3 - \omega)$.

В комплексной плоскости параметра \bar{K} при изменении ω от $-\infty$ до ∞ будем иметь кривую, изображенную на рис. 5.10.

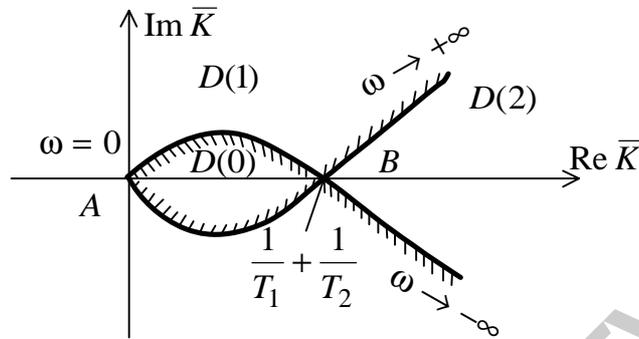


Рис. 5.10

В точке B величина $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$, а $\text{Re } \bar{K} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$. Областью устойчивости будет область $D(0)$, что определяется с помощью критерия Гурвица. Так как K – действительная величина, то получаем отрезок устойчивости AB , т.е. область устойчивости будет определяться неравенством $0 < K < \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)$, что совпадает с результатом примера 5.3.

6. ТОЧНОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

6.1. Понятие точности. Постоянные ошибки

Обратимся к стандартной структуре системы автоматического управления, представленной на рис. 3.1. Основным назначением системы является как можно более точное воспроизведение управляющего сигнала. Естественно, что точность системы можно оценивать величиной разности управляющего сигнала $v(t)$ и выхода $y(t)$, т.е. величиной ошибки $e(t) = v(t) - y(t)$. Очевидно, чем меньше величина $e(t)$ по модулю в каждый данный момент времени, тем система с большей точностью (меньшей ошибкой) воспроизводит управляющий сигнал. На практике интересуются не полной ошибкой системы $e(t)$, а так называемой *установившейся ошибкой* $e_y(t)$, которую определяют для достаточно больших моментов времени после затухания переходной составляющей.

Изображение ошибки в соответствии с рис. 3.1 можно записать в виде

$$E(s) = \Phi_e(s)V(s) - \Phi_f(s)F(s), \quad (6.1)$$

где $\Phi_f(s) = \frac{W_2(s)}{1+W(s)}$, $\Phi_e(s) = \frac{1}{1+W(s)}$, $W(s) = W_1(s)W_2(s)$.

Из (6.1) следует, что ошибка системы будет определяться суммой двух составляющих: ошибкой системы от управляющего и ошибкой системы от возмущающего воздействий. В силу линейности системы методика вычисления каждой из этих составляющих будет однотипной, поэтому рассмотрим лишь методы вычисления ошибки системы от управляющего сигнала.

При определенных типах воздействий и определенной структуре системы установившаяся ошибка в системе будет постоянной и может быть вычислена на основании правил операционного исчисления по выражению

$$e_y = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi_e(s)V(s). \quad (6.2)$$

Рассмотрим входные воздействия: $u(t) = u_0 1[t]$, $u(t) = u_1 t$, $u(t) = u_2 t^2$, $u(t) = u_0 + u_1 t + \dots + u_n t^n$, $u_i = \text{const}$, изображения которых будут соответственно равны: $V(s) = \frac{u_0}{s}$, $V(s) = \frac{u_1}{s^2}$, $V(s) = \frac{2u_2}{s^3}$, $V(s) = \frac{u_0}{s} + \frac{u_1}{s^2} + \dots + \frac{n!u_n}{s^{n+1}}$.

Пусть передаточная функция разомкнутой системы $W(s) = \frac{KN(s)}{s^v L_0(s)}$, $v = 0, 1, \dots$

Если $v = 0$ (статическая система), $u(t) = u_0 1[t]$, то, подставляя в (6.2) $\Phi_e(s) = \frac{1}{1+W(s)}$ и $V(s) = \frac{u_0}{s}$, получим

$$e_y^0 = \frac{u_0}{1+K}. \quad (6.3)$$

Ошибку e_y^0 будем называть *статической ошибкой* системы.

При $v = 1$ (система с астатизмом первого порядка) вычислим ошибку при воздействиях $u(t) = u_0 1[t]$ и $u(t) = u_1 t$. Подставляя передаточную функцию $\Phi_e(s)$ и изображение входного сигнала в (6.2), получим соответственно для первого и второго типов входного сигнала

$$e_y^0 = 0, \quad e_y^1 = \frac{u_1}{K}, \quad (6.4)$$

где ошибку e_y^1 будем называть *ошибкой по скорости* (*скоростной ошибкой*).

При $\nu = 2$ и входных сигналах $u(t) = u_0 1[t]$, $u(t) = u_1 t$, $u(t) = u_2 t^2$ соответственно получим выражения ошибок:

$$e_y^0 = 0, e_y^1 = 0, e_y^2 = \frac{2u_2}{K}, \quad (6.5)$$

где e_y^2 – *ошибка системы по ускорению*.

При воздействии вида $u(t) = u_0 + u_1 t + \dots + u_n t^n$ для системы с астатизмом ν -го порядка получаем

$$e_y^0 = 0, \dots, e_y^{n-1} = 0, e_y^n = \frac{n! u_n}{K}. \quad (6.6)$$

Из приведенных выражений следует, что ошибки в системе уменьшаются с ростом порядка астатизма системы и увеличением общего коэффициента усиления K .

На рис. 6.1 показаны переходные процессы в различных системах при отработке скачка по положению и скорости: кривая 1 – для статической системы, 2 – для системы с астатизмом первого порядка, 3 – для системы с астатизмом второго порядка.

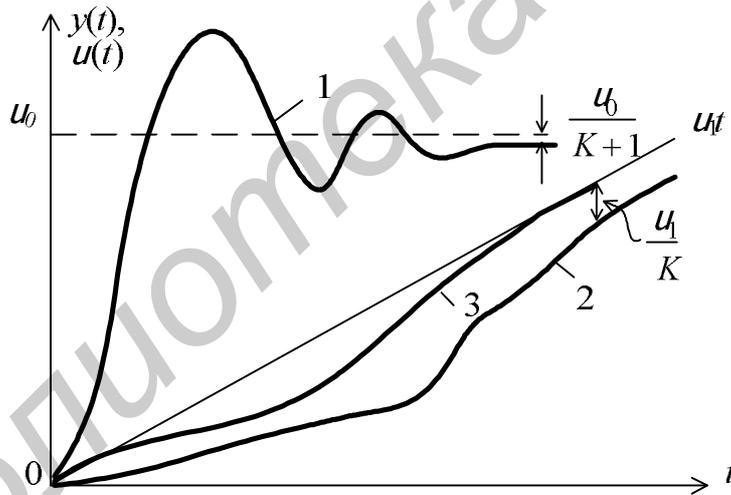


Рис. 6.1

Пример 6.1. Пусть в системе, изображенной на рис. 3.1 (см. с. 28), $W_1(s) = \frac{K_1}{T_1 s + 1}$, $W_2(s) = \frac{K_2}{s}$, $u(t) = u_0 1[t]$, $f(t) = f_0 1[t]$. Найдём изображение сигнала ошибки, равное

$$E(s) = \frac{s(T_1 s + 1)}{s(T_1 s + 1) + K_1 K_2} V(s) - \frac{K_2 (T_1 s + 1)}{s(T_1 s + 1) + K_1 K_2} F(s).$$

Подставляя в это выражение $V(s) = u_0/s$ и $F(s) = f_0/s$ и используя (6.2), получим $e_y = -f_0/K_1$.

Таким образом, установившаяся ошибка от управляющего воздействия равна нулю (система астатическая по отношению к управляющему сигналу), а ошибка от возмущающего воздействия постоянна (система статическая по отношению к возмущению). Для уменьшения этой ошибки следует увеличивать коэффициент усиления K_1 первого звена; величина K_2 не влияет на ошибку.

Рассмотрим ту же систему при условии, что $W_1(s) = \frac{K_1}{s}$, $W_2(s) = \frac{K_2}{T_1s + 1}$, т.е. интегрирующее звено находится до точки приложения возмущения. В этом случае $E(s) = \frac{s(T_1s + 1)}{s(T_1s + 1) + K_1K_2} V(s) - \frac{K_2s}{s(T_1s + 1) + K_1K_2} F(s)$.

Если $v(t) = v_0 1[t]$, $f(t) = f_0 1[t]$, то используя (6.2), получим $e_y = 0$, т.е. статическая ошибка как от управляющего, так и от возмущающего воздействий равна нулю и система обладает астатизмом первого порядка по отношению к обоим внешним воздействиям. Если $v(t) = v_1 t$, $f(t) = f_1 t$, то нетрудно получить $e_y = \frac{v_1}{K_1K_2} - \frac{f_1}{K_1}$, т.е. в системе имеется скоростная ошибка.

Из рассмотренных примеров следует общий вывод: система будет обладать астатизмом ν -го порядка по отношению к управляющему и возмущающему сигналам, если $W_1(s) = \frac{K_1 N_1(s)}{s^\nu L_1(s)}$, а $W_2(s) = \frac{K_2 N_2(s)}{L_2(s)}$. Если передаточные функции поменять местами, то система по отношению к возмущению будет статической.

6.2. Установившиеся ошибки при произвольном входном сигнале

Обозначим весовую функцию замкнутой системы по ошибке через $\varphi_e(t) = L^{-1}\{\Phi_e(s)\}$. Тогда соотношению $E(s) = \Phi_e(s)V(s)$ во временной области будет соответствовать свертка $e(t) = \int_0^t \varphi_e(t - \tau)v(\tau)d\tau$.

Так как нас интересует установившаяся ошибка после затухания переходной составляющей, то отнесем нижний предел интегрирования, соответствующий моменту подачи входного сигнала, в $-\infty$. В этом случае получим выражение, справедливое для установившегося значения сигнала ошибки: $e_y(t) = \int_{-\infty}^t \varphi_e(t - \tau)v(\tau)d\tau$.

Заменив переменную интегрирования $t - \tau = \bar{\tau}$, получим

$$e_y(t) = \int_0^{\infty} \Phi_e(\bar{\tau}) u(t - \bar{\tau}) d\bar{\tau}. \quad (6.7)$$

Полагая функцию $u(t)$ аналитической, разложим ее в ряд Тейлора при $\bar{\tau} = 0$: $u(t - \bar{\tau}) = u(t) - \bar{\tau}u^{(1)}(t) + \frac{\bar{\tau}^2}{2!}u^{(2)}(t) + \dots + \frac{(-\bar{\tau})^i}{i!}u^{(i)}(t) + \dots$ и подставим полученный ряд в (6.7). В результате получим

$$e_y(t) = c_0 u(t) + c_1 u^{(1)}(t) + \dots + \frac{(c_i)^i}{i!} u^{(i)}(t) + \dots, \quad (6.8)$$

где коэффициенты c_i определяются выражением $c_i(t) = \int_0^{\infty} (-\bar{\tau})^i \Phi_e(\bar{\tau}) d\bar{\tau}$.

Так как передаточная функция замкнутой системы по ошибке есть прямое преобразование Лапласа от весовой функции $\Phi_e(s) = \int_0^{\infty} \Phi_e(\bar{\tau}) e^{-s\bar{\tau}} d\bar{\tau}$, то очевидно соотношение

$$c_i = \left. \frac{d^i \Phi_e(s)}{ds^i} \right|_{s=0}. \quad (6.9)$$

Коэффициенты c_i носят название *коэффициентов ошибок* и характеризуют, с каким весом функция $u(t)$ и ее производные входят в общее выражение для установившейся ошибки (6.8). Если входной сигнал изменяется достаточно медленно, то в выражении (6.8) можно ограничиться конечным числом членов ряда.

Если $W(s) = \frac{KN(s)}{s^\nu L_0(s)}$, то $\Phi_e(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{s^\nu L_1(s)}{s^\nu L_0(s) + KN(s)}$. В статической системе $\nu = 0$ и $c_0 = \Phi_e(0) = \frac{1}{1+K}$, для системы с астатизмом первого порядка имеем $\Phi_e(s) = \frac{sL_0(s)}{KN(s) + sL_0(s)}$ и $c_0 = \Phi_e(0) = 0$, а

$$\begin{aligned} c_1 &= \left. \frac{d}{ds} \left[s \frac{L_0(s)}{KN(s) + sL_0(s)} \right] \right|_{s=0} = \\ &= \left. \frac{L_0(s)}{KN(s) + sL_0(s)} \right|_{s=0} + s \left. \frac{d}{ds} \left[\frac{L_0(s)}{KN(s) + sL_0(s)} \right] \right|_{s=0} = \frac{1}{K}. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что для астатической системы с астатизмом ν -го порядка $c_0 = c_1 = \dots = c_{\nu-1} = 0$, $c_\nu = \frac{1}{K}$.

Коэффициент c_0 называют коэффициентом статической ошибки, c_1 – коэффициентом скоростной ошибки, c_2 – коэффициентом ошибки по ускорению. Из (6.8) следует, что если $u(t) = u_0 = \text{const}$, то $e_y = c_0 u_0$, если $u(t) = u_1 t$, то $e_y = c_0 u_1 t + c_1 u_1$.

В общем случае формула (6.9) редко используется для вычисления c_i . На практике применяется другой способ. Разложим передаточную функцию $\Phi_e(s)$ в ряд Маклорена при $s = 0$:

$$\Phi_e(s) = \Phi_e(0) + \left. \frac{d\Phi_e}{ds} \right|_{s=0} \cdot s + \dots = c_0 + c_1 s + \frac{1}{2!} c_2 s^2 + \dots + \frac{1}{i!} c_i s^i + \dots \quad (6.10)$$

С другой стороны, так как $\Phi_e(s) = \frac{s^\nu L_0(s)}{KN(s) + s^\nu L_0(s)}$ есть отношение полиномов, то деля полином числителя на полином знаменателя, получим ряд

$$\Phi_e(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_i s^i + \dots \quad (6.11)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях s в (6.10), (6.11), получим

$$c_i = i! \alpha_i. \quad (6.12)$$

Величина коэффициентов ошибок в конечном итоге определяет величину ошибки в системе. Из изложенного выше вновь следует, что величины c_i будут тем меньше, чем выше порядок астатизма системы и чем больше величина коэффициента усиления K разомкнутой системы.

Пример 6.2. Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид $W(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$. Найдем первые три коэффициента ошибок. Передаточная

функция замкнутой системы по ошибке будет равна $\Phi_e(s) = \frac{s(Ts + 1)}{s(Ts + 1) + K}$. Деля

полином числителя на полином знаменателя, получим

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{K} s + \left(\frac{T}{K} - \frac{1}{K^2} \right) s^2 + \dots$$

В соответствии с (6.12) найдем $c_0 = 0$, $c_1 = \frac{1}{K}$, $c_2 = 2 \left(\frac{T}{K} - \frac{1}{K^2} \right)$.

Определим установившуюся ошибку в системе при воздействии $u(t) = u_0 + u_1 t + u_2 t^2$. Подставляя найденные значения c_i и заданные значения

функции $u(t)$ и ее производных в (6.8), получим $e_y(t) = \frac{1}{K} \left[u_1 + 2 \left(T - \frac{1}{K} u_2 \right) \right]$.

6.3. Установившиеся ошибки при гармоническом воздействии

Если главная передаточная функция замкнутой системы имеет вид $\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)}$, то при входном сигнале $v(t) = \sin \omega t$ выходной сигнал в установившемся режиме $y_y(t)$ будет определяться выражением

$$y_y(t) = A_3(\omega) \sin(\omega t + \varphi_3(\omega)), \quad (6.13)$$

где $A_3(\omega) = |\Phi(j\omega)|$, $\varphi_3(\omega) = \arg \Phi(j\omega)$.

Аналогично, зная $\Phi_e(s)$, можно найти закон изменения ошибки в установившемся режиме при гармоническом входном сигнале $v(t) = \sin \omega t$:

$$e_y(t) = |\Phi_e(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi_e(\omega)), \quad (6.14)$$

где $\varphi_e(\omega) = \arg \Phi_e(j\omega)$.

Выражения (6.13), (6.14) позволяют оценить ошибки воспроизведения гармонического сигнала в установившемся режиме. Из этих выражений следует, что кроме ошибки воспроизведения амплитуды входного гармонического сигнала существуют и постоянные фазовые ошибки, которые определяются видом фазочастотных характеристик замкнутой системы. Обычно при анализе точности систем управления их не рассматривают, ограничиваясь лишь анализом ошибок воспроизведения амплитуды.

Из (6.13), (6.14) можно получить ошибки воспроизведения амплитуды гармонического сигнала на заданной частоте, равные

$$\Delta_y = |1 - A_3(\omega)|, \quad (6.15)$$

$$\Delta_e = |\Phi_e(j\omega)|, \quad (6.16)$$

первая из которых характеризует разность между максимальными значениями амплитуды входного и выходного сигналов, а вторая – максимальную величину ошибки $e_y(t)$. Очевидно, всегда $\Delta_y \geq \Delta_e$. Так как $\Phi_e(j\omega) = 1 - \Phi(j\omega) = 1 - A_3(\omega)e^{j\varphi_3(\omega)}$ то $|\Phi_e(j\omega)| = \sqrt{1 - 2A_3(\omega)\cos\varphi_3(\omega) + A_3^2(\omega)}$. Если $\varphi_3 = 0$, то $|\Phi_e(j\omega)| = |1 - A_3(\omega)|$. Таким образом, при малых фазовых сдвигах на заданной частоте ω оценки (6.15) и (6.16) будут близки между собой. Это обычно выполняется в диапазоне низких частот.

На рис. 6.2 представлен типичный вид АЧХ замкнутой системы $A_3(\omega)$ для случая астатической системы, при этом $A_3(0) = 1$. В случае статической системы $A_3(0) = \frac{K}{K+1}$. На рисунке заштрихованная область соответствует величинам ошибок Δ_y .

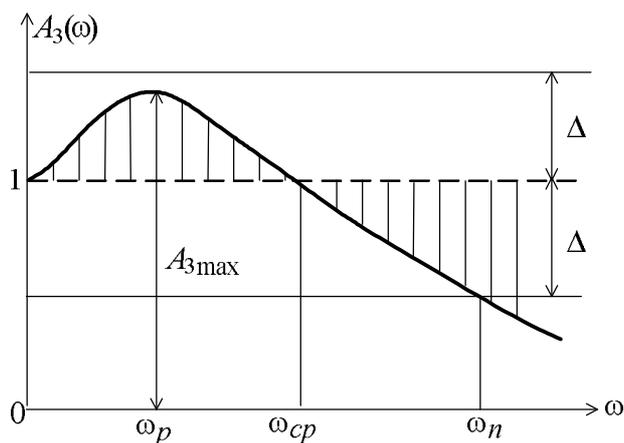


Рис. 6.2

Под *полосой пропускания* системы понимают диапазон частот $0 \leq \omega \leq \omega_n$, при котором ошибка Δ_y будет меньше некоторой заданной Δ , т.е. $\Delta_y < \Delta$. Иногда полосу пропускания определяют как диапазон частот $0 \leq \omega \leq \omega_n$, при котором выполняется условие $A_3(\omega_n) \leq 0,707 A_3(0)$.

Полоса пропускания является важной характеристикой системы. С одной стороны, чем шире полоса пропускания, тем с меньшими ошибками система воспроизводит управляющие сигналы. Однако, с другой стороны, увеличение ω_n приводит к тому, что система становится чувствительной к влиянию высокочастотных помех.

Из выражения (6.16) можно получить приближенные оценки величины ошибки Δ_e . Так как $\Phi_e(j\omega) = \frac{1}{1+W(j\omega)}$, то для статической системы

$W(j\omega) = \frac{KN(j\omega)}{L(j\omega)}$ и при достаточно низких частотах можно полагать $N(j\omega) \approx 1$, $L(j\omega) \approx 1$, $W(j\omega) \approx K$, откуда имеем

$$\Delta_e \cong \frac{1}{1+K}. \quad (6.17)$$

Для астатической системы $W(j\omega) = \frac{KN(j\omega)}{(j\omega)^v L_0(j\omega)}$ и при низких частотах

$W(j\omega) \cong \frac{K}{(j\omega)^v}$, откуда получим

$$\Delta_e \cong \frac{\omega^v}{\sqrt{\omega^{2v} + K^2}}. \quad (6.18)$$

Если выполняется условие $K \gg \omega$, то формула (6.18) принимает вид

$$\Delta_e \cong \frac{\omega^v}{K}. \quad (6.19)$$

Из (6.17)–(6.19) видно, что ошибка системы обратно пропорциональна коэффициенту усиления разомкнутой системы.

Итак, для повышения точности САУ следует увеличивать коэффициент усиления разомкнутой системы либо увеличивать порядок астатизма. Однако это будет приводить в общем случае к ухудшению устойчивости. Таким образом, требования к точности системы и ее устойчивости являются противоречивыми.

Пример 6.3. Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид $W(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$ при $K = 20$, $T_1 = 0,02$ с, $T_2 = 0,03$ с, $\omega = 0,9$ с⁻¹.

Передаточная функция системы по ошибке $\Phi_e(s) = \frac{s(T_1s+1)(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1) + K} =$
 $= \frac{6 \cdot 10^{-4} s^3 + 5 \cdot 10^{-2} s^2 + s}{6 \cdot 10^{-4} s^3 + 5 \cdot 10^{-2} s^2 + s + 20}$. Находим величину Δ_e (6.16):
 $\Delta_e = \left| \frac{6 \cdot 10^{-4} (j\omega)^3 + 5 \cdot 10^{-2} (j\omega)^2 + (j\omega)}{6 \cdot 10^{-4} (j\omega)^3 + 5 \cdot 10^{-2} (j\omega)^2 + (j\omega) + 20} \right| = 0,045 \text{ с}^{-1}$. Если воспользоваться приближенной формулой (6.19), то $\Delta_e \cong \frac{0,9}{20} = 0,045 \text{ с}^{-1}$, т.е. с точностью до третьего знака оба результата совпадают.

7. ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Численные величины, характеризующие работу системы автоматического управления, носят название показателей качества, которые условно можно разделить на три группы: характеризующие а) устойчивость системы, б) точность системы и в) качество переходных процессов. Обеспечение устойчивости является необходимым условием функционирования любой системы управления и гарантирует затухание свободной или переходной составляющей процесса. К этой первой группе показателей относятся запасы устойчивости по амплитуде ΔL и фазе $\Delta \varphi$.

После затухания свободной составляющей через достаточно большой промежуток времени в системе протекает установившийся процесс, который обуславливает точность системы. Показателями качества в данном случае выступают величины ошибок в установившемся режиме, которые рассмотрены в разд. 6 (вторая группа).

Наконец, к третьей группе относятся показатели качества переходного процесса, которые характеризуют вид процесса для достаточно малых моментов времени после его начала. Среди таких показателей – время регулирования t_p , перерегулирование σ и ряд других, приведенных в подразд. 4.1.

Показатели качества могут быть вычислены двумя способами. Первый – непосредственно по виду переходного процесса. В этом случае их называют прямыми оценками качества. Второй способ – это использование косвенных оценок показателей качества без построения кривой переходного процесса.

В данном разделе рассмотрим наиболее распространенные косвенные методы оценки показателей качества переходного процесса.

7.1. Корневые оценки качества

Переходная функция замкнутой системы как реакция системы на единичный скачок по положению вычисляется в соответствии с выражением (4.11), в котором второе слагаемое в виде суммы определяет переходную составляющую

$$h_n(t) = \sum_{i=1}^n \frac{KN(\lambda_i)}{\lambda_i D'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t}, \quad (7.1)$$

а λ_i – различные корни характеристического уравнения замкнутой системы $D(\lambda) = 0$.

Если $\text{Re } \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} h_n(t) = 0$, т.е. с течением времени переходная составляющая затухает.

В выражении (7.1) перейдем к модулям в левой и правой частях:

$$|h_n(t)| \leq \sum_{i=1}^n C_i |e^{\lambda_i t}|, \quad (7.2)$$

где $C_i = \left| \frac{KN(I_i)}{I_i D'(I_i)} \right|$.

Обозначим расстояние от мнимой оси до ближайших действительного корня (рис. 7.1, а) или пары комплексно-сопряженных корней (рис. 7.1, б) на плоскости корней λ через η .

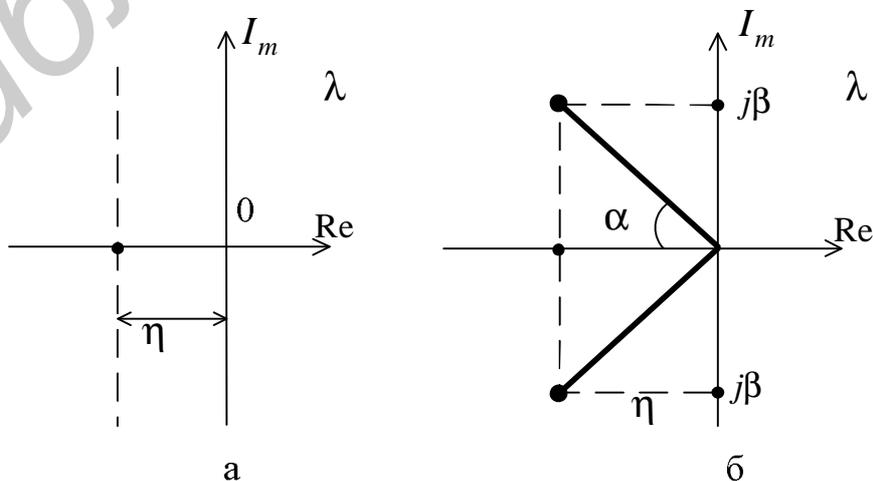


Рис. 7.1

Величину η будем называть *степенью устойчивости*. Очевидно, что $\eta = \min |\operatorname{Re} \lambda_i|$. Так как $|e^{\lambda_i t}| = |e^{(\operatorname{Re} \lambda_i)t} e^{j(\operatorname{Im} \lambda_i)t}| = |e^{(\operatorname{Re} \lambda_i)t}|$, то для любого множителя $|e^{\lambda_i t}|$ в (7.2) будет справедлива оценка $|e^{\lambda_i t}| < e^{-\eta t}$. Таким образом, (7.2) равносильно выражению

$$|h_n(t)| \leq M e^{-\eta t}, \text{ а } M = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (7.3)$$

Из (7.3) следует, что переходная составляющая $h_n(t)$ затухает быстрее, чем экспонента с показателем $-\eta$. Если принять время регулирования t_p как время, начиная с которого $h_n(t)$ войдет в 5 % трубку от начального значения, то из (7.3) получим $M e^{-\eta t_p} = 0,05M$, откуда

$$t_p \leq \frac{\ln 0,05}{-\eta} \cong \frac{3}{\eta}. \quad (7.4)$$

Выражение (7.4) и соответственно величина η характеризуют предельное быстродействие системы, поэтому иногда величину η называют еще *мерой быстродействия* системы.

Из рассмотренного выше следует, что доминирующее влияние на характер переходного процесса оказывают ближайшие к мнимой оси корни. Если ближайшими являются комплексно-сопряженные корни $\lambda_{1,2} = -\eta \pm j\beta$, то наряду со степенью устойчивости вводят в рассмотрение *колебательность системы* (колебательность переходного процесса) $\mu = \frac{|\beta|}{|\eta|}$. Паре комплексно-сопряженных корней в (7.1) соответствует составляющая

$$C_1 e^{(-h+jb)t} + C_2 e^{(-h-jb)t} = A e^{-ht} \sin(bt + j), \quad (7.5)$$

где C_1, C_2 – комплексно-сопряженные величины; A, φ – действительные величины.

Составляющая (7.5) носит колебательный характер. Период колебания определяется величиной $T = \frac{2\pi}{\beta}$. Уменьшение амплитуды в (7.5) за период T

будет равно $A e^{-\eta \left(t + \frac{2\pi}{\beta}\right)} = A e^{-\eta t} \cdot e^{-\frac{2\pi}{\mu}}$, т.е. определяться величиной $e^{-\frac{2\pi}{\mu}}$.

Перерегулирование в % может быть оценено по формуле

$$\sigma = 100 e^{-\frac{\pi}{\mu}} = 100 e^{-\frac{\pi}{\operatorname{tg} \alpha}}. \quad (7.6)$$

С увеличением μ увеличивается число колебаний за время регулирования и возрастает перерегулирование. Величина μ носит качественный характер и

является оценкой переходного процесса сверху, поэтому в действительности переходной процесс может иметь лучшие показатели.

Характер переходного процесса в значительной степени зависит от корней λ_i характеристического уравнения, т.е. от полюсов передаточной функции

$\Phi(s) = \frac{KN(s)}{D(s)}$ замкнутой системы. Однако на величину амплитуды переходных

составляющих будут влиять и нули передаточной функции. Пусть полином $N(s)$ имеет m нулей s_i , тогда $N(s) = (s - s_1)...(s - s_m)$ и выражение (7.1) примет

$$\text{вид } h_n(t) = \sum_{i=1}^n \frac{K(\lambda_i - s_1)...(\lambda_i - s_m)}{\lambda_i D'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t}.$$

Очевидно, если какой-то полюс λ_i будет близок (или в идеальном случае равен) нулю передаточной функции, то составляющая, соответствующая корню λ_i , будет мала по амплитуде (или равна нулю).

Впервые корневые оценки качества переходных процессов для систем третьего порядка были предложены в работе И. А. Вышнеградского (1876), положившей начало развитию теории автоматического управления.

Характеристическое уравнение системы третьего порядка $D(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$ путем замены переменной приводится к виду

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0, \quad (7.7)$$

$$\text{где } q = \lambda \sqrt[3]{\frac{a_0}{a_3}}, \quad A = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0^2 a_3}}, \quad B = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0 a_3^2}}.$$

Коэффициенты A , B – параметры Вышнеградского – являются комбинацией коэффициентов a_i и в конечном итоге зависят от реальных параметров системы. Условие асимптотической устойчивости для уравнения (7.7) несложно получить с помощью критерия Гурвица, оно имеет вид $AB > 1$. В области устойчивости, ограниченной гиперболой $AB = 1$ в плоскости параметров A , B , нанесем кривые, разделяющие область устойчивости на области с одинаковым расположением корней характеристического уравнения (7.7).

На рис. 7.2 представлена диаграмма Вышнеградского, где для каждой области показано расположение корней и вид переходного процесса.

Таким образом, выбирая из диаграммы требуемый вид переходного процесса, можно найти необходимые значения параметров A , B или a_i .

В заключение отметим ряд простых случаев, когда получены оценки степени устойчивости η и соответственно быстродействия системы. Рассмотрим систему управления стандартной структуры, изображенной на рис. 3.1. Пусть передаточная функция объекта управления $W_2(s)$ имеет вид

$$W_2(s) = \frac{K_2}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)...(T_r s + 1)}, \text{ где } T_1 > T_2 > \dots > T_r.$$

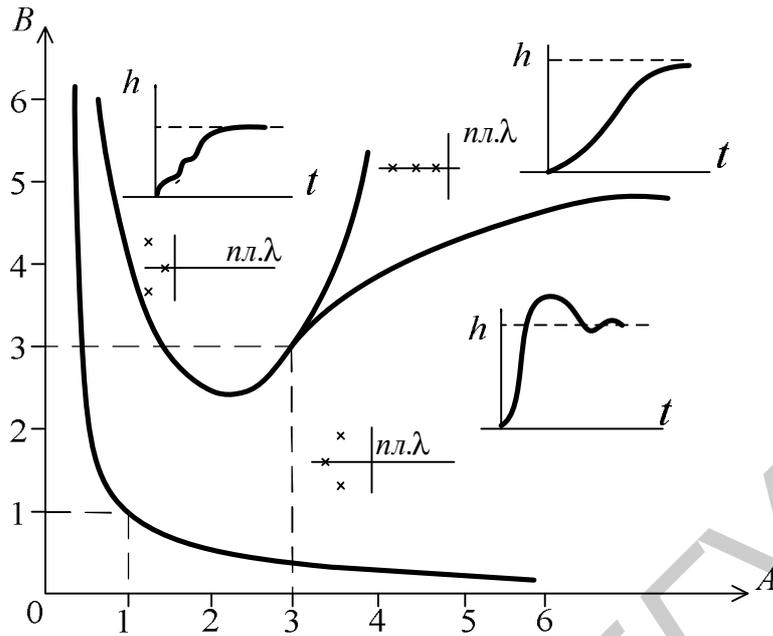


Рис. 7.2

Передаточную функцию $W_1(s)$ будем рассматривать как передаточную функцию регулятора (управляющего устройства). Рассмотрим три случая закона управления: интегральный $W_1(s) = \frac{K_1}{s}$, пропорциональный $W_1(s) = K_1$, пропорционально-интегральный $W_1(s) = K_0 + \frac{K_1}{s}$. Быстродействие объекта управления может быть охарактеризовано величиной $\frac{1}{T_1}$. Доказано, что для интегрального закона управления быстродействие замкнутой системы, характеризуемое величиной степени устойчивости η , не будет превосходить быстродействия объекта, т.е. $\eta < \frac{1}{T_1}$.

Для пропорционального и пропорционально-интегрального законов управления быстродействие замкнутой системы управления может превосходить быстродействие объекта управления, но будет ограничено неравенством $\eta < \frac{1}{T_2}$.

Приведенный частный результат распространяется на более общий случай: астатические системы уступают по быстродействию статическим.

Пример 7.1. Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид $W(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$. Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$D(\lambda) = T\lambda^2 + \lambda + K = 0 \text{ имеет корни } \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2T} \pm \frac{\sqrt{1 - 4KT}}{2T}.$$

Если $4KT > 1$, то имеем два комплексно-сопряженных корня и $\eta = \frac{1}{2T}$, $\mu = \sqrt{4KT - 1}$, $t_p \leq 6T$.

Если $0 < 4KT \leq 1$, то имеем два действительных корня и $\eta = \frac{1 - \sqrt{1 - 4KT}}{2T}$, $\mu = 0$, $t_p \leq \frac{6T}{1 - \sqrt{1 - 4KT}}$.

Из приведенных соотношений следует, что при $4KT > 1$ процессы в системе будут носить колебательный характер, а быстродействие системы будет ограничено величиной $6T$. При $0 < 4KT \leq 1$ процессы носят апериодический характер, но быстродействие в системе уменьшается.

7.2. Интегральные оценки качества

Интегральные оценки качества являются интегралами по времени от некоторых функций координат системы (выходной координаты, сигнала ошибки) и оценивают одним числом как величину отклонения, так и время регулирования. В качестве исследуемого процесса обычно выбирается разность между установившимся процессом в системе и самой координатой. Рассмотрим замкнутую систему управления стандартной структуры, на вход которой поступает единичный ступенчатый сигнал $v(t) = 1[t]$. Тогда реакция системы будет представлять собой переходную функцию $h(t)$, которая в соответствии с

$$(4.10) \text{ определяется выражением } h_3(t) = h_y + h_n(t), \text{ где } h_y = \frac{KN(0)}{D(0)} = \Phi(0) -$$

установившаяся составляющая; $h_n(t)$ – переходная составляющая, характеризующая переходной процесс.

Введем отклонение $\Delta h(t) = h_y - h_3(t)$ процесса $h_3(t)$ от его установившегося значения. Очевидно, что $\Delta h(t) = -h_n(t)$.

Простейшими интегральными оценками качества являются:

$$I_0 = \int_0^{\infty} \Delta h(t) dt, \quad (7.8)$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} |\Delta h(t)| dt, \quad (7.9)$$

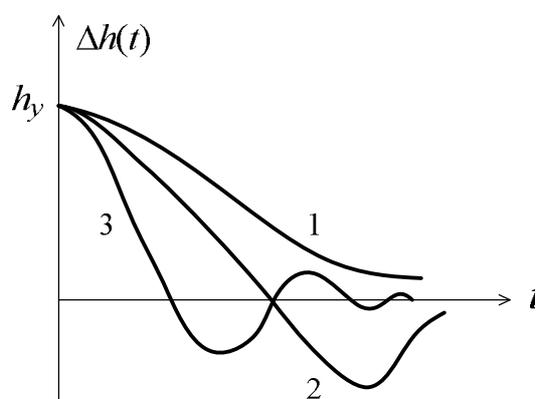
$$I_2 = \int_0^{\infty} \Delta h^2(t) dt. \quad (7.10)$$

Оценка I_0 носит название *линейной интегральной оценки*, I_1 – *абсолютной интегральной* и I_2 – *квадратичной интегральной оценки*.

Значение интегралов будет конечной величиной только в том случае, если $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [-h_n(t)] = 0$, т.е. только для асимптотически устойчивых систем.

Поясним физический смысл оценок (7.8)–(7.10), для чего обратимся к рис. 7.3. Для $h_3(t)$, соответствующих кривым 1, 2, 3 (см. рис. 4.2), построены графики отклонения $\Delta h(t)$ (на рис. 7.3 соответственно кривые 1, 2, 3).

Величина I_0 для кривой 1 есть величина площади, ограниченной этой кривой и координатными осями.



Очевидно, чем меньше I_0 , тем меньше текущие

отклонения $h_3(t)$ от установившегося значения и тем меньше будет время регулирования в системе. В идеальном случае, если $I_0 = 0$, время регулирования будет равно нулю. Для кривых

2, 3 в силу того, что они меняют свой знак, оценка I_0 неприменима, так как величина интеграла может оказаться очень малой (даже равной нулю), но процессы будут затухать медленно. Поэтому линейные интегральные оценки можно применять, если

Рис. 7.3

заведомо известно, что переходная составляющая имеет монотонный характер.

Для колебательных процессов обычно применяются оценки I_1 , I_2 , которые имеют аналогичный смысл: чем меньше величина I , тем меньше время регулирования и меньше отклонения координаты системы от установившегося процесса.

Любые интегральные оценки носят качественный и сравнительный характер, т.е. по величине I нельзя определить, например, время регулирования или перерегулирование в системе. Но если для двух вариантов проектируемой системы окажется, что $I' < I''$, то считается, что качественные показатели первой системы лучше, чем второй.

Наиболее просто вычисляются интегральные оценки I_0 и I_2 . Пусть передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$\Phi(s) = \frac{KN(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (7.11)$$

Найдем изображение отклонения $\Delta h(t) = h_y - h_3(t)$ с учетом того, что $L\{h_3(t)\} = \Phi(s)/s$, $h_y = \Phi(0) = \text{const}$ и $L\{h_y\} = \Phi(0)/s$:

$$\Delta H(s) = L\{\Delta h(t)\} = \frac{\Phi(0) - \Phi(s)}{s}. \quad (7.12)$$

Так как $I_0 = \int_0^{\infty} \Delta h(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \Delta h(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta H(s)$, то с учетом (7.11)

имеем

$$\begin{aligned} I_0 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_m(a_0 s^n + \dots + a_n) - a_n(b_0 s^m + \dots + b_m)}{s a_n(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n)} = \\ &= \frac{s [b_m(a_0 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}) - a_n(b_0 s^{m-1} + \dots + b_{m-1})]}{s a_n(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n)} = \frac{b_m a_{n-1} - a_n b_{m-1}}{a_n^2}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Квадратичная интегральная оценка I_2 может быть определена на основе формулы Парсеваля (или Релея).

В частности, для астатических систем

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|\Phi_e(j\omega)|^2}{\omega^2} d\omega. \quad (7.14)$$

Изображение отклонения $\Delta H(s)$ всегда можно представить как отношение двух полиномов:

$$\Delta H(s) = \frac{1}{s} [\Phi(0) - \Phi(s)] = \frac{\beta_0 s^m + \beta_1 s^{m-1} + \dots + \beta_m}{\alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n}. \quad (7.15)$$

При этом оценка I_2 может быть аналитически вычислена при $m < n$ через коэффициенты α_i, β_i (7.15). Выражение для вычисления I_2 имеет достаточно сложный вид и здесь не приводится. Для наиболее распространенного случая $m = n - 1$ приведем несколько конечных выражений для вычисления I_2 :

$$\begin{aligned} n=1, \quad I_2 &= \frac{\beta_0^2}{2\alpha_0\alpha_1}; \quad n=2, \quad I_2 = \frac{\beta_1^2\alpha_0 + \beta_0^2\alpha_2}{2\alpha_0\alpha_1\alpha_2}; \\ n=3, \quad I_2 &= \frac{\beta_0^2\alpha_2\alpha_3 + (\beta_1^2 - 2\beta_0\beta_2)\alpha_0\alpha_3 + \beta_2^2\alpha_0\alpha_1}{2\alpha_0\alpha_3(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3)}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Наряду с оценками I_0, I_2 употребляются и более сложные интегральные оценки, учитывавшие не только само отклонение $\Delta h(t)$, но и его производные.

При использовании интегральных оценок можно выделить два направления: анализ системы – получение оценки для заданной системы и синтез системы – минимизация оценки по каким-либо параметрам.

Пример 7.2. Рассмотрим методику применения интегральных оценок к системе, исследуемой в примере 7.1. Передаточная функция замкнутой системы имеет вид $\Phi(s) = \frac{K}{s(Ts + 1) + K}$, и в соответствии с (7.11) имеем $a_0 = T$, $a_1 = 1$, $a_2 = K$, $b_0 = b_m = K$. Линейная интегральная оценка (7.13) в этом случае $I_0 = \frac{1}{K}$. Оценка справедлива для монотонных процессов, когда корни характеристического уравнения замкнутой системы различны, т.е. выполняется условие $0 < 4KT \leq 1$, $0 < K \leq \frac{1}{4T}$. Итак, увеличение величины K уменьшает I_0 и время регулирования. Минимальное значение $I_0 = 4T$ при $t_p \leq 6T$.

Вычислим для этой же системы величину I_2 , для чего найдем изображение отклонения $\Delta H(s) = \frac{1}{s}[\Phi(0) - \Phi(s)] = \frac{Ts + 1}{Ts^2 + s + K}$.

Коэффициенты в (7.15) будут $\beta_0 = T$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_0 = T$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = K$.

Используя (7.16), получим $I_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K} + T \right)$, откуда следует, что для уменьшения I_2 надо увеличивать величину K , либо уменьшать T , что повышает быстродействие системы.

7.3. Частотные оценки качества

Частотные оценки качества базируются на связи частотных и временных характеристик системы управления, в частности, на связи переходной функции замкнутой системы $h_3(t)$ и вещественной частотной характеристики $P(\omega)$ (4.13). Из (4.13) можно получить две категории оценок, одна из которых строго обоснована и математически доказана, а другая получена на основе построения большого числа переходных процессов для различных $P(\omega)$ и осреднения полученных результатов.

Рассмотрим первую группу оценок.

1. Начальное значение $P(0)$ и конечное значение $P(\omega)$ связаны с конечным значением $h_3(\infty)$ и начальным $h_3(0)$ соотношениями

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_3(t) = h_{3y} = P(0), \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} P(\omega) = h_3(0). \quad (7.17)$$

Эти свойства фактически являются следствием теорем о конечном и начальном значениях оригинала в преобразовании Лапласа. Так как для астатических систем $P(0) = |\Phi(j0)| = 1$, а для статических $P(0) = |\Phi(j0)| = \frac{K}{1 + K}$,

то

$$h_{3y} = P(0) = \begin{cases} 1 & \text{для астатических систем,} \\ \frac{K}{1+K} & \text{для статических систем.} \end{cases}$$

2. Сжатию характеристики $P(\omega)$ по оси ω соответствует пропорциональное растяжение характеристики $h_3(t)$ по оси t . Это свойство является следствием из свойств преобразования Фурье об изменении масштаба по оси ординат. Приведенное свойство дает важную сравнительную оценку переходных процессов в системах: более пологим характеристикам $P(\omega)$ (более растянутым вдоль оси ω) соответствуют более быстро протекающие переходные процессы, а более крутым или сжатым вдоль оси ω – замедленные процессы. Соответственно следует ожидать, что для первого случая время регулирования t_p будет меньше, чем для второго.

3. Достаточным условием того, чтобы перерегулирование σ в системе не превышало 18 %, является выполнение соотношений

$$P(\omega) \geq 0, \quad \frac{dP(\omega)}{d\omega} \leq 0, \quad (7.18)$$

т.е. $P(\omega)$ является невозрастающей положительной функцией частоты.

4. Достаточным условием монотонности переходного прохода процесса, т.е. $\sigma = 0$ %, является выполнение соотношений

$$P(\omega) \geq 0, \quad \frac{dP(\omega)}{d\omega} < 0. \quad (7.19)$$

На рис. 7.4, а представлены две вещественные частотные характеристики, из которых для первой $\sigma = 0$ %, а для второй – $\sigma = 18$ %.

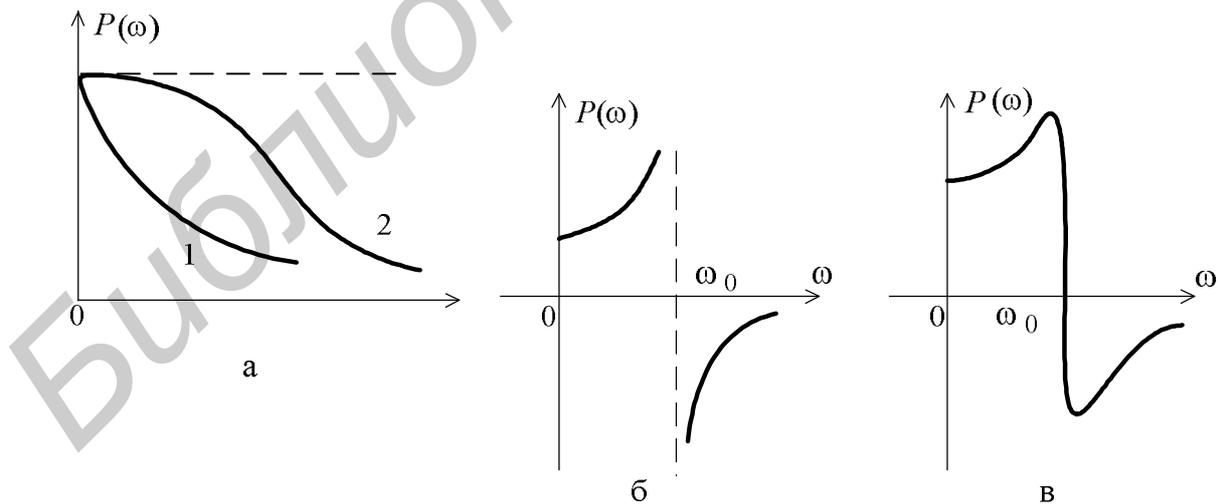


Рис. 7.4

5. Если характеристическое уравнение замкнутой системы $D(\lambda) = 0$ имеет чисто мнимый корень $\lambda = j\omega_0$, то характеристика $P(\omega)$ при $\omega = \omega_0$ имеет разрыв непрерывности, что соответствует незатухающей гармонической

составляющей с частотой ω_0 в переходном процессе $h_3(t)$. График такой характеристики представлен на рис. 7.4, б. Поэтому если характеристика вблизи некоторой частоты ω_0 имеет резкий перепад и большие пики, то следует ожидать наличия в переходной функции медленно затухающей гармонической составляющей частоты ω_0 . Такой случай представлен на рис. 7.4, в.

Оценки второй группы, как указывалось выше, имеют приближенный и в значительной степени эмпирический характер.

На рис. 7.5, а, б показаны случаи аппроксимации вещественной характеристики $P(\omega)$ соответственно одной и суммой двух трапецеидальных характеристик.

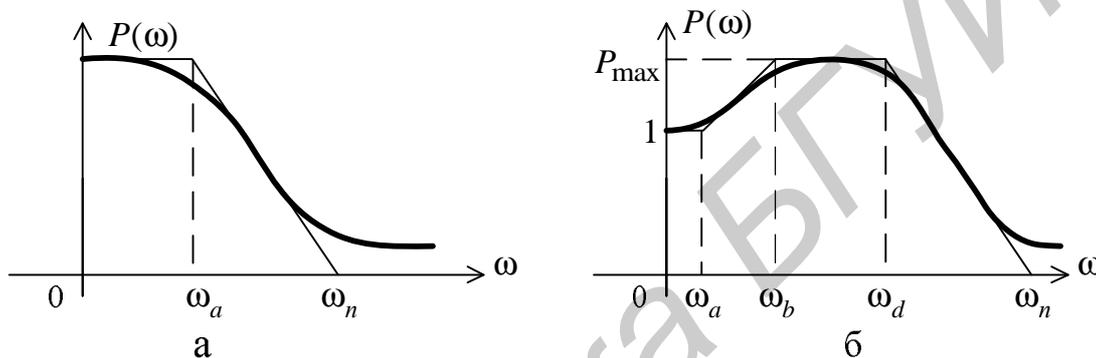


Рис. 7.5

Для случая, изображенного на рис. 7.5, а, время регулирования t_p оценивается по неравенству

$$\frac{\pi}{\omega_n} < t_p < \frac{4\pi}{\omega_n}. \quad (7.20)$$

Для случая аппроксимации в виде суммы двух трапеций (см. рис. 7.5, б) время регулирования t_p и перерегулирования σ более сложным образом зависит от параметров аппроксимирующих трапеций.

На рис. 7.6 представлены графики зависимостей t_p и σ от P_{\max} при $\frac{\omega_g}{\omega_n} \geq 0,5$, $\frac{\omega_d}{\omega_n} \geq 0,8$; $\frac{\omega_a}{\omega_g} \geq 0,4$.

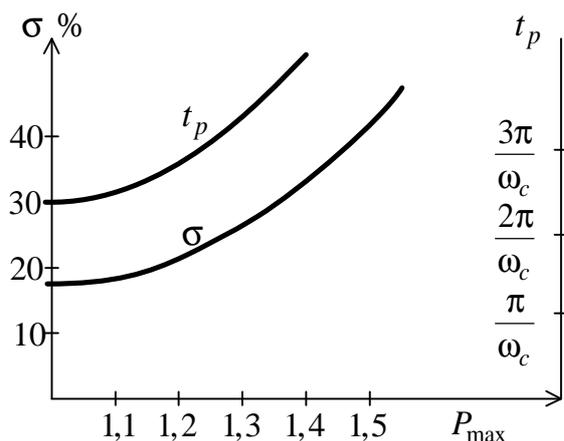


Рис. 7.6

Наряду с оценками качества системы по переходной функции $h_3(t)$ широкое распространение получили оценки качества системы при обработке гармонических входных сигналов. Особенно это касается исследования следящих систем, для которых изменяющиеся по амплитуде и знаку входные сигналы наиболее характерны. При таком подходе удобнее пользоваться АЧХ замкнутой системы $A_3(\omega) = |\Phi(j\omega)|$, типичный график которой представлен на рис. 7.7.

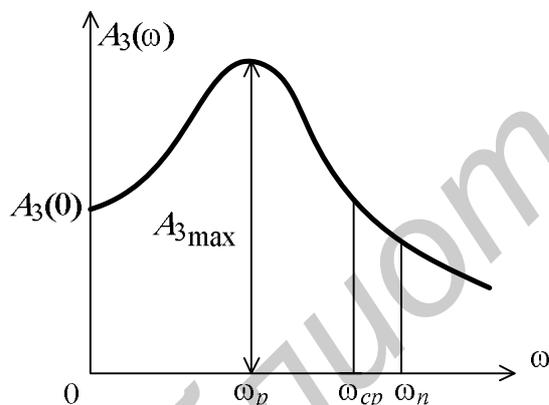


Рис. 7.7

обозначается ω_c). Интервал частот $[0, \omega_n]$ определяет полосу пропускания системы. Величина $A_3(\omega_n)$ может задаваться из условий точности воспроизведения гармонического сигнала (см. подразд. 6.3).

Частота ω_{cp} косвенно характеризует время регулирования в замкнутой системе, которое оценивается величиной $t_p \cong (1...2) \frac{2\pi}{\omega_{cp}}$.

Для оценки склонности системы к колебаниям вводят так называемый *показатель колебательности*, который определяется как

$$M = \frac{A_{3\max}}{A_3(0)} = \frac{|\Phi(j\omega)|_{\max}}{|\Phi(j0)|} \quad (7.21)$$

На этом рисунке время регулирования t_p

построено в относительных единицах, где ω_c – частота среза разомкнутой системы.

Оценку (7.20) приближенно можно применять и для системы, имеющей произвольную вещественную характеристику $P(\omega)$. При этом величину ω_n следует выбирать такой, после которой $P(\omega) < 5\% P(0)$.

Для характеристики рис. 7.5, б справедлива такая оценка перерегулирования:

$$\sigma = \frac{1,18P_{\max} - P(0)}{P(0)} 100\% .$$

Величина $A_3(0)$ для астатических систем

равна 1, а для статических $\frac{K}{1+K}$ и при большом K

близка к единице. Частота ω_p – резонансная

частота, при которой $A_3(\omega)$ достигает

максимального значения $A_{3\max}$. Частота ω_{cp} –

частота среза замкнутой системы, при которой

$A(\omega_{cp}) = 1$ (ω_{cp} не совпадает с частотой среза разомкнутой системы, которая

либо иногда как

$$M = A_{3\max} = |\Phi(j\omega)|_{\max}. \quad (7.22)$$

Так как $A_3(\omega) = 1$ для астатических и $A_3(\omega) \approx 1$ для статических систем при большом коэффициенте усиления K разомкнутой системы, то отличие выражений (7.21), (7.22) друг от друга незначительно.

Физически показатель колебательности M характеризует склонность системы к колебаниям: чем больше M , тем более колебательный характер переходного процесса. Этот показатель имеет менее прозрачный смысл, чем, например, время регулирования t_p и перерегулирование σ . Считается, что если M не превосходит величины 1,2–1,3, то качество процессов в системе будет удовлетворительным и при других внешних воздействиях, отличных от гармонических.

Величина M также косвенно характеризует запасы устойчивости системы: чем больше M , тем меньше запасы устойчивости. Однако количественно связать M и величины $\Delta\phi$, ΔL не удастся.

Для определения величины M можно воспользоваться графиком АЧХ разомкнутой системы $W(j\omega)$. Пусть $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$. Тогда

$$|\Phi(j\omega)| = \left| \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} \right| = \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{(1 + U)^2 + V^2}}, \text{ откуда } U^2 + V^2 = |\Phi|^2 [(1 + U)^2 + V^2],$$

$$\text{или} \quad (C + U)^2 + V^2 = R^2, \quad (7.23)$$

$$\text{где } C = \frac{|\Phi|^2}{|\Phi|^2 - 1}, \quad R = \frac{|\Phi|}{|\Phi|^2 - 1}.$$

Задавая $|\Phi| = \text{const}$ и находя C и R по уравнению (7.23) в комплексной плоскости U, jV , получим кривые, которые будут представлять собой окружности радиусом R с центрами на действительной оси. Эти окружности для разных значений $|\Phi|$ приведены на рис. 7.8.

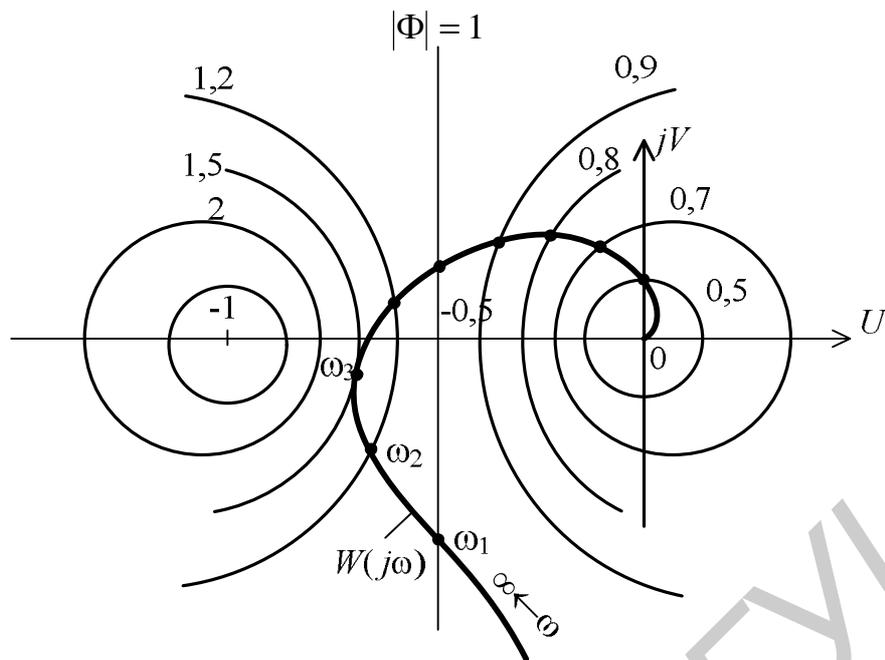


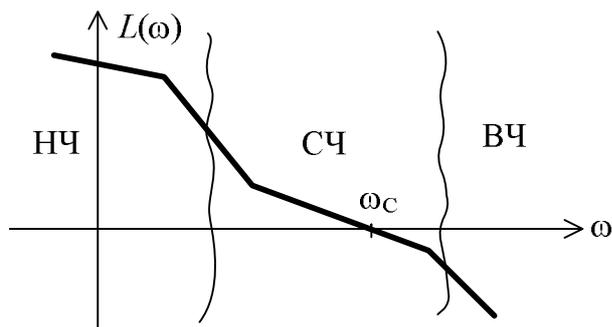
Рис. 7.8

Все эти окружности (линии равных значений $|\Phi|$) охватывают при $|\Phi| < 1$ начало координат, а при $|\Phi| > 1$ – точку с координатами $(-1, j0)$. При $|\Phi| = 1$ они вырождаются в прямую.

На рис. 7.8 нанесен график АЧХ $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$. Фактически представленная серия кривых при $|\Phi| = \text{const}$ является номограммой для определения $|\Phi(j\omega)|$ по кривой $W(j\omega)$. В точках пересечения $W(j\omega)$ и соответствующей кривой $|\Phi| = \text{const}$ находим для заданного значения ω величину $|\Phi(j\omega)|$. Так, из рис. 7.8 видим, что при ω_1 величина $|\Phi(j\omega_1)| = 1$, при ω_2 величина $|\Phi(j\omega_2)| = 1,2$ и т.д. Очевидно, что показатель колебательности M определится в точке касания годографа $W(j\omega)$ с окружностью, имеющей максимальное значение $|\Phi|$. Для данного случая видно, что это будет окружность, соответствующая $M = 1,5$.

Из рис. 7.8 видно, что чем больше величина M (или $|\Phi|$) для данной системы, тем ближе АФЧХ $W(j\omega)$ подходит к точке с координатами $(-1, j0)$, тем меньше у системы будут запасы устойчивости.

Наконец, возможна оценка качественных показателей системы по виду логарифмических частотных характеристик разомкнутой системы. Всю характеристику можно условно разбить по оси частот на три диапазона, как это показано на рис. 7.9, где НЧ – диапазон низких частот, СЧ – средних и ВЧ – высоких частот.



Логарифмическая характеристика ΔL в диапазоне НЧ влияет на точностные характеристики системы, так как первая асимптота определяется двумя величинами: K – коэффициентом усиления разомкнутой системы и V – порядком астатизма. Область средних частот вблизи частоты среза ω_c в значительной степени определяет такие показатели системы, как запасы устойчивости $\Delta\varphi$, ΔL , время регулирования t_p .

Рис. 7.9

перерегулирование σ , величину показателя колебательности M . Связать указанные параметры непосредственно с параметрами произвольной ЛАЧХ достаточно трудно. Однако для ряда частных случаев ЛАЧХ путем экспериментальных исследований получены графические зависимости, связывающие указанные величины. Отметим лишь одно общее свойство: чем больше величина ω_c , тем меньше время регулирования. Кроме этого, считается, что для получения приемлемых показателей качества и обеспечения устойчивости желательно, чтобы наклон асимптоты на частоте среза ω_c был – 20 дБ/дек, а ее протяженность – не менее одной декады.

Область ВЧ существенного влияния на динамику системы не оказывает, поэтому при анализе ее обычно не учитывают.

8. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

8.1. Описание систем управления с помощью уравнений состояния

Рассматриваемые в предыдущих разделах системы относятся к простейшему (классическому) типу САУ, характеризуемому одной регулируемой координатой (одномерные системы). Динамические процессы в них удобно описывать одним дифференциальным уравнением n -го порядка, передаточными функциями и частотными характеристиками. При описании многомерных или многосвязных систем, имеющих несколько регулируемых координат, такой подход встречает определенные трудности. Более естественной формой математического описания многомерных систем является векторно-матричная форма уравнений динамики или подход, базирующийся на применении уравнений состояния.

Преимуществом математических моделей в виде уравнений состояния является универсальность (применимость как для одномерных, так и для многомерных систем), компактность формы записи, а также более естественная форма записи для численных расчетов на ЭВМ. В силу этого с конца 60-х годов XX столетия в теории управления развиваются методы описания и исследования САУ на базе уравнений состояния.

При математическом описании любой системы всегда можно выделить три группы величин: v_1, \dots, v_m – входные сигналы, действующие на систему, включающие как управляющие, так и возмущающие сигналы; y_1, \dots, y_p – выходные сигналы, несущие информацию о поведении системы, а также переменные x_1, \dots, x_n , характеризующие непосредственно саму систему (переменные состояния). Физический смысл переменных v_i и y_i достаточно ясен. Переменные состояния x_i – это минимальный набор физических или абстрактных величин, который полностью определяет состояние системы в любой момент времени.

Объединим соответствующие группы переменных в векторы: $v = \text{col}[v_1, \dots, v_m] \in R^m$ – вектор входа системы, $y = \text{col}[y_1, \dots, y_p] \in R^p$ – вектор выхода системы (вектор наблюдения), $x = \text{col}[x_1, \dots, x_n] \in R^n$ – вектор состояния, R^m , R^p , R^n – евклидовы пространства соответствующих размерностей. Пространство R^n носит название *пространства состояний*.

Так как нас интересует поведение системы во времени, т.е. динамика системы, то все соответствующие переменные и векторы будем полагать в дальнейшем функциями текущего времени t , т.е. $v(t)$, $y(t)$, $x(t)$.

Под математической моделью системы будем понимать соотношения между векторами x , y , v , описываемые при помощи математических операций и позволяющие однозначно определять закон изменения во времени вектора выхода y при заданном векторе входа v и начальном состоянии системы x .

В случае непрерывных систем наиболее общей формой математической модели являются уравнения вида

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad y = j(t, x, u), \quad (8.1)$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $f(t, x, u) = \text{col}[f_1(t, x, u), \dots, f_n(t, x, u)]$, $j(t, x, u) = \text{col}[j_1(t, x, u), \dots, j_p(t, x, u)]$ – вектор-функции соответствующих размерностей; $f_i(\cdot)$, $\varphi_i(\cdot)$ – скалярные функции.

Уравнения (8.1) носят названия *уравнений состояния*, первое из которых будем называть *уравнением входа*, а второе – *уравнением выхода*.

Уравнения (8.1) описывают динамику нелинейной нестационарной непрерывной системы с сосредоточенными параметрами. Если $f_i(\cdot)$, $\varphi_i(\cdot)$ в явном виде не зависят от времени t , то имеем соответствующую модель стационарной системы.

Если в некоторой области изменения переменных функции $f_i(\cdot)$, $\varphi_i(\cdot)$ являются линейными, то уравнения (8.1) превращаются в линейные уравнения состояния

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \quad (8.2)$$

где A, B, C, D – соответственно матрицы размерностей $n \times n, n \times m, p \times n, p \times m$.

Если коэффициенты всех матриц не зависят в явном виде от времени, то имеем модель линейной стационарной системы. Если хотя бы один из коэффициентов этих матриц в явном виде зависит от t , то модель будет нестационарной.

Для физически реализуемых систем всегда $D = 0$ (здесь и далее равенство матрицы нулю подразумевает равенство нулевой матрице) и чаще всего рассматриваются уравнения состояния вида

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx. \quad (8.3)$$

Матрица A называется основной матрицей системы, B – матрицей входа, C – матрицей выхода, D – матрицей связи.

В данном разделе будем рассматривать только линейные стационарные системы, описываемые уравнениями (8.2), (8.3).

Отметим ряд дополнительных моментов, касающихся приведенных моделей систем:

1. Для полного описания поведения системы всегда требуется задать ее начальное состояние в некоторый момент времени (чаще всего нулевой). Это соответствует заданию начальных условий для дифференциальных уравнений, входящих в (8.1)–(8.3). Итак, в (8.1)–(8.3) всегда подразумевается задание $x(0)$. Чаще всего $x(0) = 0$.

2. Элементы матриц A, B, C, D и векторов x, y, v в общем случае могут быть комплексными величинами.

3. В (8.1)–(8.3) величины $y \in R, v \in R$ могут быть скалярными, т.е. уравнения (8.1)–(8.3) могут описывать как многомерные, так и одномерные системы.

4. Уравнениями (8.1)–(8.3) могут быть описаны любые динамические системы: отдельные элементы и устройства, объект управления, регулятор, вся САУ в целом.

Пример 8.1. Рассмотрим САУ стандартной структуры, изображенной на рис. 3.1. Пусть $f \equiv 0$, $W_1(s) = \frac{K_1}{s}$, $W_2(s) = \frac{K_2}{Ts + 1}$, а выход звена $W_1(s)$ (соответственно вход $W_2(s)$) обозначим через u .

При этом несложно получить следующие уравнения: $T\dot{x} + x = K_2 u$, $\dot{x} = K_1 e$, $e = v - y$, а после введения новых переменных $x_1 = y$, $x_2 = u$ – уравнения состояния

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{T}x_1 + K_2x_2, \\ \dot{x}_2 = -K_1x_1 + K_1v, \\ y = x_1. \end{cases}$$

Векторно-матричная модель системы будет иметь вид

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & K_2 \\ -K_1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 \end{bmatrix} v, \quad y = [1, 0]x. \quad (8.4)$$

8.2. Схемы моделирования и виды уравнений состояния

В зависимости от структуры матрицы A в (8.3) из общего класса уравнений состояния выделяют два подкласса. Если матрица A в (8.3) является диагональной:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = \text{diag}[a_{11}, \mathbf{K}, a_{nn}] \quad (8.5)$$

или в общем случае представлена в форме Жордана, то имеем *каноническую форму* уравнений состояния. Примером матрицы в форме Жордана может служить матрица

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{array} \right]$$

размерностью 4×4 , имеющая одну клетку Жордана размерностью 3×3 .

Если матрица A в (8.3) представлена в виде

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (8.6)$$

то уравнения состояния имеют *нормальную форму*. Матрицу такой структуры называют сопровождающей матрицей или матрицей Фробениуса.

Пусть в уравнении (8.3) матрица $C = [1, 0, \dots, 0]$, т.е. $y = x_1$, $B = \text{col}[0, \dots, 0, b_n]$, $u \in R$ и матрица A является матрицей Фробениуса (8.6). Тогда, очевидно, $x_1 = y$, $x_2 = y^{(1)}$, \dots , $x_n = y^{(n-1)}$, т.е. в качестве переменных состояния выбрана сама выходная координата y и ее производные. В этом частном случае вектор состояния называют *фазовым вектором*, а пространство состояния – *фазовым пространством*.

Для более ясного понимания внутренней структуры и взаимосвязи отдельных переменных системы, описываемой уравнениями состояния, применяют графическую интерпретацию уравнений состояния в виде структурных схем, которые иногда называют схемами моделирования. При этом используются три основных блока, показанные на рис. 8.1: а) сумматор $u - y$,

б) интегратор $y = \int u(t) dt$, в) блок преобразования (усиления) $y = Au$, где A – некоторая матрица.

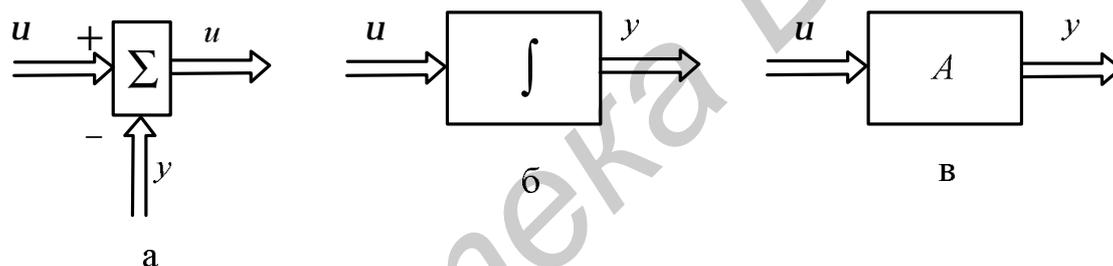


Рис. 8.1

Используя указанные блоки, можно изобразить схему моделирования по уравнениям (8.2), представленную на рис. 8.2.

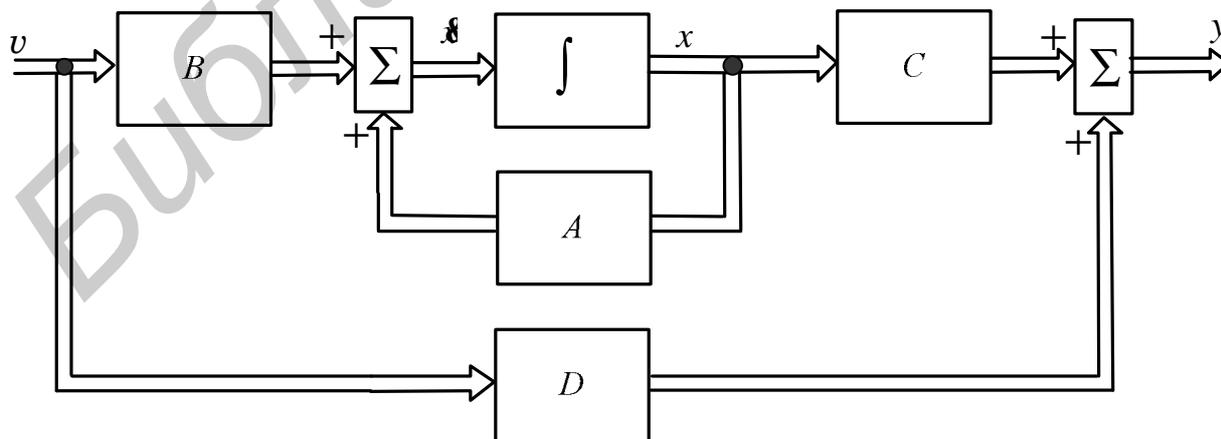


Рис. 8.2

Пример 8.2. Рассмотрим САУ из примера 8.1. В соответствии с полученными уравнениями состояния (8.4) нетрудно изобразить схему моделирования, представленную на рис. 8.3.

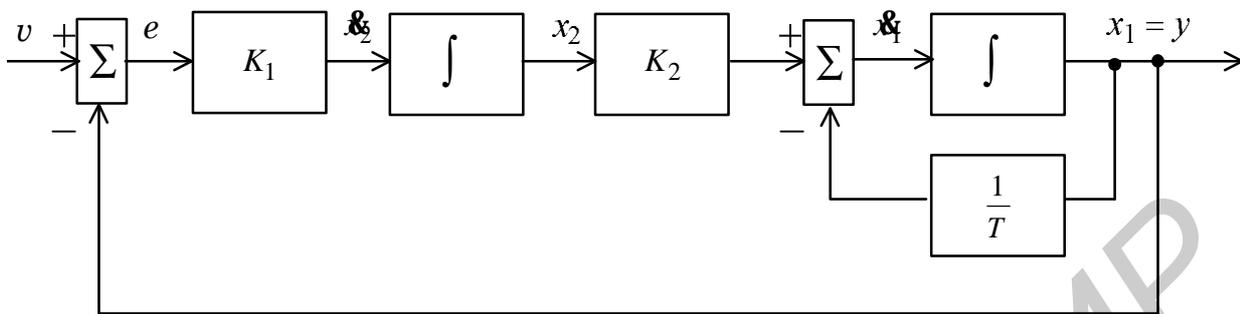


Рис. 8.3

Для этого же примера получим другую структуру схемы моделирования и соответственно другую форму уравнений состояния. Выходной сигнал y и сигнал ошибки e можно связать следующим уравнением в области изображений: $Y(s) = [K_1 K_2 / s(Ts + 1)]E(s)$, откуда нетрудно получить дифференциальное уравнение разомкнутой системы $Ty^{(2)} + y^{(1)} = K_1 K_2 e$. С учетом уравнения замыкания $e = v - y$ получим дифференциальное уравнение замкнутой системы $y^{(2)} = -\frac{1}{T}y^{(1)} - \frac{K_1 K_2}{T}y + \frac{K_1 K_2}{T}v$, в соответствии с которым нетрудно получить схему моделирования (рис. 8.4).

Если обозначить выходы интеграторов через x_1 и x_2 , как показано на рис. 8.4, то можно в соответствии со схемой моделирования записать следующие уравнения: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -\frac{K_1 K_2}{T}x_1 - \frac{1}{T}x_2 + \frac{K_1 K_2}{T}v$, $y = x_1$.

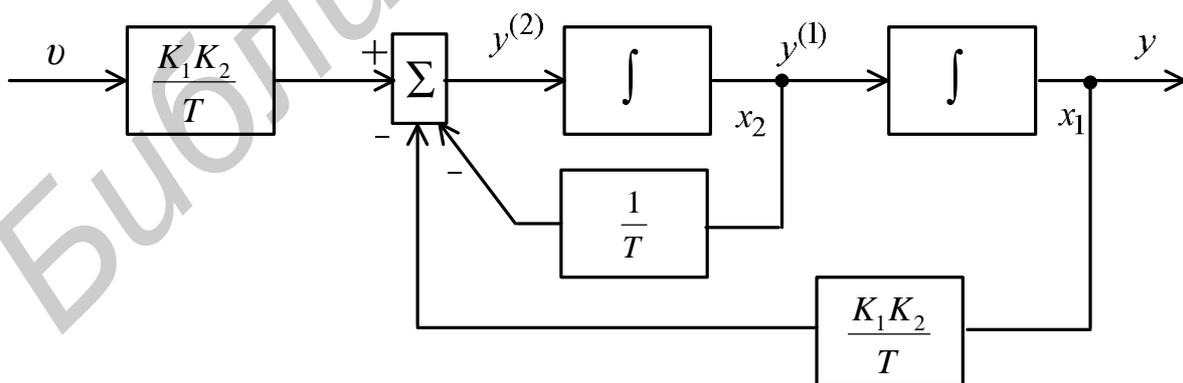


Рис. 8.4

Вводя вектор состояния $x = col[x_1, x_2]$, уравнения представим в виде

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K_1 K_2}{T} & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_1 K_2}{T} \end{bmatrix} v, \quad y = [1, 0] x. \quad (8.7)$$

Уравнения (8.4) и (8.7) имеют различный вид, как и схемы моделирования (см. рис. 8.3 и 8.4), но описывают одну и ту же систему. Уравнения состояния (8.7) имеют нормальную форму, они составлены относительно фазовых координат.

8.3. Преобразование уравнений состояния

Пусть система описывается уравнениями состояния общего вида (8.3). Сделаем в этих уравнениях замену переменных $x = Qz$, где $z = \text{col}[z_1, \dots, z_n]$ – новый вектор состояния, Q – произвольная матрица размерностью $n \times n$ с постоянными коэффициентами. На матрицу Q накладывается единственное ограничение – она должна быть невырожденной (неособенной), т.е. определитель этой матрицы $\det Q \neq 0$. В этом случае всегда существует обратная матрица, которую будем обозначать через Q^{-1} , такая, что $Q^{-1}Q = E$, где $E = \text{diag}[1, \dots, 1]$ – единичная матрица размерностью $n \times n$. Очевидно, что при этих условиях существует однозначная связь между векторами x и z : $x = Qz$, $z = Q^{-1}x$.

В уравнениях (8.3) сделаем замену $x = Qz$ и с учетом того, что $\dot{x} = Q\dot{z}$, получим

$$\dot{z} = Q^{-1}AQz + Q^{-1}Bv, \quad y = CQz. \quad (8.8)$$

Уравнения (8.8) будут новыми уравнениями состояния, имеющими основную матрицу системы $Q^{-1}AQ$, входа $Q^{-1}B$ и выхода CQ . Так как Q – произвольная матрица, то исходным уравнениям (8.3) соответствует бесчисленное количество эквивалентных уравнений состояния (8.8).

Отметим, что две матрицы A и A_1 , связанные преобразованием $A_1 = Q^{-1}AQ$, называются подобными. Подобные матрицы имеют одинаковые собственные значения.

Используя линейное преобразование, можно поставить задачу о выборе при исследовании той или иной формы уравнений состояния. Наиболее часто решается задача преобразования исходной системы (8.3) к нормальной или канонической форме уравнений состояния (8.8).

Доказано, что для произвольной матрицы A всегда существует невырожденная квадратная матрица размерностью $n \times n$, которую обозначим через M и назовем *модальной*, такая, что матрица $M^{-1}AM$ будет иметь форму Жордана. Если матрица A имеет различные собственные значения (числа) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, являющиеся корнями характеристического уравнения

$$\det[A - \lambda E] = 0, \quad (8.9)$$

то матрица $M^{-1}AM$ будет диагональной: $M^{-1}AM = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$.

Таким образом, преобразование произвольной системы уравнений (8.3) к канонической форме всегда возможно. Наиболее просто задача определения модальной матрицы решается для случая различных собственных чисел матрицы A , которые обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Для каждого собственного числа λ_i находится собственный вектор $x^i = \text{col}[x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i]$ из решения векторно-матричного уравнения

$$[A - \lambda_i E]x^i = 0. \quad (8.10)$$

Матрица, образованная вектор-столбцами x^i , т.е. матрица

$$M = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n^1 & x_n^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n^n \end{bmatrix}, \quad (8.11)$$

и будет искомой модальной матрицей.

В соответствии с (8.9) при $\lambda = \lambda_i$ определитель системы линейных уравнений (8.10) равен нулю, т.е. система имеет бесчисленное множество решений, каждое из которых можно принять за собственный вектор. Отсюда матрица M является неединственной.

В случае кратных собственных значений матрицы A задача определения модальной матрицы значительно усложняется.

В частности, если исходная матрица A является матрицей Фробениуса вида

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_1 \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

и собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, являющиеся корнями характеристического уравнения

$$\det[A - \lambda E] = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (8.13)$$

различны, то модальная матрица будет иметь вид

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \lambda_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (8.14)$$

Пример 8.3. Пусть в САУ, которая рассматривалась в примерах 8.1 и 8.2, $T_1 = 0,25$ с, $K_1 K_2 = 5$, тогда уравнения (8.7) будут иметь вид

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix} v, \quad y = [1, 0] x. \quad (8.15)$$

Преобразуем уравнения состояния к канонической форме. Основная матрица системы A является матрицей Фробениуса. Найдем ее собственные значения из решения характеристического уравнения

$$\det[A - \lambda E] = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -20 & -4 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 20 = 0.$$

Корни уравнения будут различными: $\lambda_1 = -2 + j4$, $\lambda_2 = -2 - j4$. Таким образом, в соответствии с (8.14) определяем модальную матрицу M и обратную ей M^{-1} :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 + j4 & -2 - j4 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{-j8} \begin{bmatrix} (-2 - j4) & -1 \\ (2 - j4) & 1 \end{bmatrix}.$$

Далее $M^{-1}AM = \text{diag}[-2 + j4, -2 - j4]$, $M^{-1}B = \text{col}[-j2,5; j2,5]$, $CM = [1, 1]$.

Итак, уравнения состояния (8.15) преобразуются к канонической форме:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 + j4 & 0 \\ 0 & -2 - j4 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -j2,5 \\ j2,5 \end{bmatrix} v, \quad y = [1, 1]z.$$

Пример 8.4. Пусть система описывается уравнениями состояния

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} v, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x.$$

Корни характеристического уравнения $\det[A - \lambda E] = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$ будут $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -2$.

Находим собственные векторы из решения системы линейных уравнений $[A - \lambda_i E]x^i = 0$, $i=1,2$.

Полагая $I_i = I_1 = -4$, будем иметь

$$\begin{cases} (a_{11} - I_1)x_1^1 + a_{12}x_2^1 = 0, & (1+4)x_1^1 + 3x_2^1 = 0, \\ a_{21}x_1^1 + (a_{22} - I_1)x_2^1 = 0, & -5x_1^1 - 3x_2^1 = 0. \end{cases}$$

Из последних двух уравнений $5x_1^1 + 3x_2^1 = 0$, откуда, задавая, например, $x_1^1 = 3$, получим $x_2^1 = -5$. Итак, первый собственный вектор $x^1 = \text{col}[3, -5]$. При $\lambda_i = \lambda_2 = -2$ в конечном итоге для определения координат второго собственного вектора получим $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Полагая $x_1^2 = 1$, будем иметь $x_2^2 = -1$ и соответственно $x^2 = \text{col}[1, -1]$. Итак, матрицу M можно выбрать в виде

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}, M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$M^{-1}AM = \text{diag}[-4, -2], M^{-1}B = \begin{bmatrix} -2,5 & -2 \\ 8,5 & 8 \end{bmatrix}, CM = \begin{bmatrix} -37 & -7 \\ -9 & -1 \end{bmatrix}.$$

Окончательно уравнения в канонической форме будут иметь следующий вид:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -2,5 & -2 \\ 8,5 & 8 \end{bmatrix} v, y = \begin{bmatrix} -37 & -7 \\ -9 & -1 \end{bmatrix} z.$$

8.4. Нормальная форма уравнений состояния одномерной системы

Пусть динамика одномерной системы, имеющей один вход и один выход, описывается дифференциальным уравнением

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 v^{(m)} + b_1 v^{(m-1)} + \dots + b_m v, \quad (8.16)$$

где $y, v \in R, a_0 \equiv 1$.

Требуется найти уравнения состояния (8.3) в нормальной форме, эквивалентные уравнению (8.16).

Задача легко решается для частного случая (8.16), если $m = 0$, т.е. правая часть (8.16) будет иметь вид $b_0 v$. В (8.16) сделаем замену переменных $y = x_1, y^{(1)} = x_2, \dots, y^{(n-1)} = x_n$. Дифференцируя последовательно каждое равенство, получим

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y^{(1)} = x_2, \\ \dot{x}_2 = y^{(2)} = x_3, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + b_0 v, \end{cases}$$

где последнее соотношение соответствует уравнению (8.16). Полученную систему с учетом $y = x_1$ запишем в виде уравнений состояния в нормальной форме:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M} \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} v, y = [1, 0, \dots, 0] x, \quad (8.17)$$

где, как обычно, $x = \text{col}[x_1, \dots, x_n]$.

Если в (8.16) $m > 0$, то также можно получить уравнения состояния в нормальной форме. Вывести их несколько сложнее, поэтому дадим конечный

результат. Для удобства будем в (8.16) полагать $m = n$. Очевидно, если $m < n$, то ряд первых коэффициентов b_0, b_1, \dots будет равен нулю. Уравнения состояния в этом случае будут иметь следующий вид:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ b_n \end{bmatrix} v, \quad y = [1, 0, \dots, 0]x + b_0 v. \quad (8.18)$$

Коэффициенты β_i определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений, записанных в векторно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a_1 & \cdot & & & 0 \\ a_2 & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_n & \cdot & a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{bmatrix}. \quad (8.19)$$

Из (8.19) следует, что $\beta_0 = b_0$, $a_1\beta_0 + \beta_1 = b_1$, $a_2\beta_0 + a_1\beta_1 + \beta_2 = b_2, \dots$, откуда последовательно находятся β_0, β_1, \dots .

Для физически реализуемых систем $m < n$ и $\beta_0 = 0$.

Пример 8.5. Рассмотрим замкнутую систему управления стандартной структуры (см. рис. 3.1), где будем полагать $W_1(s) = \frac{K_1(\tau_1 s + 1)}{T_1 s + 1}$,

$$W_2(s) = \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)}, \quad f = 0, \quad K_1 K_2 = 500, \quad t_1 = 0,03 \text{ с}, \quad T_1 = 0,1 \text{ с}, \quad T_2 = 0,006 \text{ с}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы будет равна

$$W(s) = \frac{K_1 K_2 (\tau_1 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{500(0,03s + 1)}{s(0,1s + 1)(0,006s + 1)}.$$

Найдем дифференциальное уравнение разомкнутой системы, связывающее y и e : $y^{(3)} + 176,6y^{(2)} + 1666y^{(1)} = 25 \cdot 10^3 e^{(1)} + 0,83 \cdot 10^6 e$.

Коэффициенты этого уравнения $a_1 = 176,6$, $a_2 = 1666$, $a_3 = 0$, $b_0 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 25 \cdot 10^3$, $b_3 = 0,83 \cdot 10^6$.

Уравнение для определения β_i имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 176,6 & 1 & 0 & 0 \\ 1666 & 176,6 & 1 & 0 \\ 0 & 1666 & 176,6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \cdot 10^3 \\ 0,83 \cdot 10^6 \end{bmatrix},$$

откуда $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 25 \cdot 10^3$, $\beta_3 = -3,75 \cdot 10^6$.

Итак, уравнения состояния разомкнутой системы в нормальной форме имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1666 & -176,6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \cdot 10^3 \\ -3,57 \cdot 10^6 \end{bmatrix} e, \quad y = [1, 0, 0] \mathbf{x}. \quad (8.20)$$

Для получения уравнений состояния замкнутой системы учтем уравнение замыкания $e = v - y = v - [1, 0, 0] \mathbf{x}$, после подстановки которого в (8.20) получим

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -25 \cdot 10^3 & 0 & 1 \\ 3,57 \cdot 10^6 & -1666 & -176,6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \cdot 10^3 \\ -3,57 \cdot 10^6 \end{bmatrix} v, \quad y = [1, 0, 0] \mathbf{x}. \quad (8.21)$$

Уравнения состояния замкнутой системы (8.21) уже не являются уравнениями в нормальной форме.

8.5. Каноническая форма уравнений состояния одномерной системы

Для получения уравнений состояния одномерной системы в канонической форме используется передаточная функция системы. Будем полагать, что система описывается дифференциальным уравнением (8.16), которому соответствует передаточная функция

$$W(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}, \quad m < n.$$

Пусть характеристическое уравнение системы имеет n различных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, тогда передаточную функцию можно представить в виде

$$W(s) = \frac{\beta_1}{s - \lambda_1} + \dots + \frac{\beta_n}{s - \lambda_n}, \quad \beta_i = (s - \lambda_i) W(s) \Big|_{s = \lambda_i}. \quad (8.22)$$

Очевидно, что в этом случае $Y(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{s - \lambda_i} V(s)$.

Обозначим $\frac{\beta_i V(s)}{s - \lambda_i} = X_i(s)$, тогда $(s - \lambda_i) X_i(s) = \beta_i V(s)$, $Y(s) = \sum_{i=1}^n X_i(s)$.

Перейдем в операторных соотношениях к оригиналам, полагая $L^{-1}\{X_i(s)\} = x_i(t)$. Получим $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{I}_i x_i + \mathbf{b}_i v$, $y = x_1 + \dots + x_n$, $i = 1, \dots, n$.

Вводя вектор состояния $x = \text{col}[x_1, \dots, x_n]$, запишем полученные уравнения в виде уравнений состояния

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{O} & 0 \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 0 & \lambda_n & \beta_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \mathbf{M} \\ \beta_n \end{bmatrix} v, \quad y = [1, \dots, 1]x. \quad (8.23)$$

Итак, получили уравнения состояния в канонической форме с диагональной матрицей коэффициентов, где в общем случае элементы λ_i , β_i матриц могут быть и комплексными величинами.

Из (8.22) можно получить другую каноническую форму уравнений состояния. Если обозначить $\frac{V(s)}{s - \lambda_i} = X_i(s)$, то проводя аналогичные рассуждения, получим уравнения состояния:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} I_1 & \mathbf{O} & 0 \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 0 & I_n & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{M} \\ 1 \end{bmatrix} v, \quad y = [\beta_1, \dots, \beta_n]x. \quad (8.24)$$

Рассмотрим теперь случай кратных корней. Пусть характеристическое уравнение имеет корни λ_1 кратности k , а остальные корни $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ простые.

Тогда передаточную функцию можно представить в виде разложения

$$W(s) = \frac{\beta_1}{(s - \lambda_1)^k} + \dots + \frac{\beta_k}{s - \lambda_1} + \dots + \frac{\beta_{k+1}}{s - \lambda_{k+1}} + \dots + \frac{\beta_n}{s - \lambda_n},$$

где $b_i = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} \left[(s - I_1)^k W(s) \right]_{s=I_1}, \quad i=1, \dots, k,$

$$b_i = (s - I_i)W(s) \Big|_{s=I_i}, \quad i=k+1, \dots, n.$$

$$\text{В этом случае } Y(s) = \left[\frac{\beta_1}{(s - \lambda_1)^k} + \dots + \frac{\beta_k}{s - \lambda_1} + \dots + \frac{\beta_{k+1}}{s - \lambda_{k+1}} + \dots + \frac{\beta_n}{s - \lambda_n} \right] V(s)$$

или $Y(s) = \beta_1 X_1(s) + \dots + \beta_k X_k(s) + \beta_{k+1} X_{k+1}(s) + \dots + \beta_n X_n(s).$

Между изображениями $X_1(s), \dots, X_k(s)$ существует связь $X_i(s) = \frac{X_{i+1}(s)}{s - \lambda_1},$

$i = 1, \dots, k - 1.$ Полагая $x_i(t) = L^{-1}\{X_i(s)\}$ и переходя к оригиналам, получим в

области оригиналов: $\dot{x}_i = \lambda_1 x_i + x_{i+1}, i = 1, \dots, k-1; \dot{x}_k = \lambda_1 x_k + v; \dot{x}_i = \lambda_i x_i + v,$
 $i = k+1, \dots, n; y = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i.$

Вводя вектор состояния $x = col[x_1, \dots, x_n]$, полученные соотношения запишем в векторно-матричной форме:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \\ \hline & & & 0 \\ & & & \lambda_{k+1} \\ & & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} v, y = [\beta_1, \dots, \beta_n] x. \quad (8.25)$$

Уравнения состояния (8.25) имеют каноническую форму, основная матрица – форму Жордана. Корню кратности k соответствует клетка Жордана размерностью $k \times k$. Очевидно, при наличии нескольких кратных корней будем получать соответствующие клетки Жордана для каждого корня.

Пример 8.6. Обратимся к системе управления из примера 8.5 и найдем уравнения состояния в канонической форме для разомкнутой системы. Характеристическое уравнение разомкнутой системы $\lambda(0,1\lambda + 1)(0,006\lambda + 1) = 0$ имеет три различных корня: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -10,$

$\lambda_3 \cong -166,6$. Используя выражение $\beta_i = (s - \lambda_i)W(s) \Big|_{s = \lambda_i}$, находим величины

β_i : $\beta_1 = 500, \beta_2 = -370, \beta_3 = -125$. Таким образом, уравнения состояния в канонической форме для разомкнутой системы имеют вид

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -166,6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 500 \\ -370 \\ -125 \end{bmatrix} v, y = [1, 1, 1] x.$$

С учетом уравнения замыкания $e = v - y$ нетрудно получить следующие уравнения состояния замкнутой системы:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -500 & -500 & -500 \\ 370 & 360 & 370 \\ 125 & 125 & -41,6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 500 \\ -370 \\ -125 \end{bmatrix} v, y = [1, 1, 1] x. \quad (8.26)$$

Сравнивая (8.21) и (8.26), видим, что одна и та же система описывается разными уравнениями состояния, которые эквивалентны между собой.

8.6. Переходная матрица состояния

Пусть линейная САУ описывается уравнениями состояния:

$$\dot{x} = Ax + Bv, \quad y = Cx, \quad x \in R^n, \quad v \in R^m, \quad y \in R^p. \quad (8.27)$$

Рассмотрим матричный ряд, который обозначим через e^{At} :

$$e^{At} = E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots, \quad (8.28)$$

где E – единичная $n \times n$ матрица.

Доказано, что этот ряд абсолютно сходится при любом t к некоторой $n \times n$ матрице, обозначенной нами через e^{At} (экспоненциал матрицы).

Свойства ряда (8.28):

1. При $t = 0$ матрица $e^{At} = E$.
2. $\frac{d}{dt} e^{At} = At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots = A[E + At + \dots] = [E + At + \dots]A = Ae^{At} = e^{At}A$, или в более общем виде $\frac{d^k}{dt^k} e^{At} = A^k e^{At} = e^{At} A^k$.
3. $\int_0^t e^{At} dt = A^{-1}(e^{At} - E) = (e^{At} - E)A^{-1}$, где A^{-1} – обратная матрица.
4. Если $A = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$, то $e^{At} = \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]$.

Рассмотрим однородное уравнение

$$\dot{x} = Ax, \quad (8.29)$$

соответствующее неоднородному дифференциальному уравнению $\dot{x} = Ax + Bv$, и зададим начальное состояние вектора $x(0)$ при $t = 0$.

Общее решение однородного уравнения (8.29) задается выражением

$$x(t) = e^{At} x(0). \quad (8.30)$$

Действительно, подставляя (8.30) в (8.29), с учетом свойства 2 получим тождество, справедливое при любом начальном значении $x(0)$. Это значит, что (8.30) определяет общее решение уравнения (8.29).

Введем обозначение $\Phi(t) = e^{At}$. Матрицу $\Phi(t)$ размерностью $n \times n$ будем называть *переходной матрицей состояния* (в математике ей соответствует фундаментальная матрица), а выражение (8.30) в этом случае будем записывать в виде

$$x(t) = \Phi(t)x(0). \quad (8.31)$$

Выражение (8.31) можно трактовать как линейное преобразование (переход) начального значения вектора состояния $x(0)$ в текущее значение $x(t)$ в пространстве состояний.

Свойства переходной матрицы состояния:

1. $\Phi(0) = E$.
2. $\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1) \cdot \Phi(t_2)$.
3. $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$.

Эти свойства следуют из общих свойств экспоненциала матрицы.

Если известна переходная матрица состояния, то общее решение неоднородного уравнения $\dot{x} = Ax + Bv$ записывается в виде (формула Коши)

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau)Bv(\tau)d\tau. \quad (8.32)$$

В силу $y = Cx$ получим выражение для вычисления вектора выхода $y(t)$:

$$y(t) = C\Phi(t)x(0) + C \int_0^t \Phi(t - \tau)Bv(\tau)d\tau. \quad (8.33)$$

В (8.32), (8.33) первое слагаемое определяет свободную составляющую, обусловленную ненулевым начальным состоянием $x(0)$, а второе – вынужденную составляющую, обусловленную входным сигналом $v(t)$.

Выражение (8.28) редко употребляется для определения матрицы $\Phi(t)$, так как в случае произвольной матрицы A элементы матрицы $\Phi(t)$ представляют собой ряды Тейлора при $t = 0$, по которым трудно найти исходную функцию в замкнутой форме.

Переходную матрицу состояния обычно находят с помощью операционного исчисления. Применим к (8.29) преобразование Лапласа, тогда получим $sX(s) - x(0) = AX(s)$, где $X(s) = L\{x(t)\}$. Из полученного выражения находим $[sE - A]X(s) = x(0)$, $X(s) = [sE - A]^{-1}x(0)$, где $[sE - A]^{-1}$ – обратная матрица к матрице $[sE - A]$.

Переходя к оригиналам, имеем

$$x(t) = L^{-1}\{[sE - A]^{-1}\}x(0). \quad (8.34)$$

Сравнивая (8.34) с (8.31), приходим к выводу, что

$$\Phi(t) = L^{-1}\{[sE - A]^{-1}\}. \quad (8.35)$$

Каждый элемент матрицы $[sE - A]^{-1}$ есть дробно-рациональная функция переменной s . Знаменатель каждого элемента представляет собой полином n -й степени $\det(sE - A)$, а числитель – полином не выше $(n - 1)$ -й степени. Полином $\det(sE - A)$ называется *характеристическим полиномом системы*, а алгебраическое уравнение n -й степени

$$\det[\lambda E - A] = \det[A - \lambda E] = 0 \quad (8.36)$$

назовем *характеристическим уравнением системы*.

Применяя к каждому элементу матрицы $[sE - A]^{-1}$ обратное преобразование Лапласа, получим матрицу $\Phi(t)$, элементами которой будут некоторые функции времени.

Переходную матрицу состояний можно найти, используя модальную матрицу M . Пусть в уравнении (8.29) матрица A имеет различные собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Тогда в (8.29) сделаем замену переменных $x = Mz$, где M – модальная матрица. В результате получим: $\dot{z} = M^{-1}AMz = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]z$.

Общее решение полученной системы с диагональной матрицей будет таково: $z(t) = \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]z(0)$. Так как $x(t) = Mz(t)$, $z(0) = M^{-1}x(0)$, то общее решение исходного уравнения (8.29) запишется в виде $x(t) = M \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]M^{-1}x(0)$.

Отсюда следует, что

$$\Phi(t) = M \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]M^{-1}. \quad (8.37)$$

Пример 8.7. Рассмотрим однородное уравнение в нормальной форме:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} x.$$

Собственные числа матрицы A определяются из решения уравнения $\det[A - \lambda E] = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$ и будут $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$.

Ищем модальную матрицу M в виде (8.14):

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Находим $\Phi(t)$ в соответствии с (8.37):

$$\Phi(t) = M \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} M^{-1} = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-4t} & \frac{1}{2}[e^{-2t} - e^{-4t}] \\ -4e^{-2t} + 4e^{-4t} & e^{-2t} + 2e^{-4t} \end{bmatrix}.$$

Можно найти $\Phi(t)$, используя (8.35). Находим $[sE - A]$ и затем $[sE - A]^{-1}$.

$$[sE - A] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 8 & s+6 \end{bmatrix}, \quad [sE - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+6}{s^2+6s+8} & \frac{1}{s^2+6s+8} \\ -\frac{8}{s^2+6s+8} & \frac{s}{s^2+6s+8} \end{bmatrix}.$$

Переходя от $[sE - A]^{-1}$ к оригиналам, найдем выражение для матрицы $\Phi(t)$, не отличающееся от полученного ранее.

8.7. Передаточная и весовая матрицы

Наряду с переходной матрицей состояния при описании и исследовании линейных многомерных систем находят применение матричные аналоги обычных передаточных функций одномерных систем.

Применим к уравнениям (8.27) преобразование Лапласа, полагая $x(0) = 0$, тогда получим $X(s) = AX(s) + BV(s)$, $Y(s) = CX(s)$ или, исключая из уравнений вектор $X(s)$, получим

$$Y(s) = C[sE - A]^{-1}BV(s) = W(s)V(s). \quad (8.38)$$

Передаточной матрицей (матричной передаточной функцией) $W(s) = C[sE - A]^{-1}B$ будем называть матрицу размерности $p \times m$, связывающую изображение вектора входа $V(s)$ и вектора выхода $Y(s)$.

Элементами передаточной матрицы $W_{ij}(s)$ являются обычные скалярные передаточные функции, связывающие i -й выход $Y_i(s)$ с j -м входом $V_j(s)$ при условии, что все остальные входы равны нулю. Передаточная функция $W_{ij}(s)$ есть отношение двух полиномов относительно s . Полином знаменателя является для всех $W_{ij}(s)$ одним и тем же и равен $\det[sE - A]$ (степень его n), а полиномы числителя будут степени не выше $(n - 1)$.

В уравнении (8.33) будем полагать $x(0) = 0$. Внесем матрицу C под знак интеграла и запишем это уравнение в виде

$$y = \int_0^t C\Phi(t - \tau)Bv(\tau)d\tau = \int_0^t w(t - \tau)v(\tau)d\tau. \quad (8.39)$$

Матрицу $w(t) = C\Phi(t)B$ размерностью $p \times m$ будем называть *весовой матрицей* (импульсной переходной матрицей).

Смысл её такой же, как и у весовой функции скалярной системы. Элементы $w_{ij}(t)$ матрицы $w(t)$ являются скалярными весовыми функциями. Если j -й вход $v_j(t) = d(t)$, а остальные входы равны нулю, то $y_i(t) = w_{ij}(t)$.

Передаточная и весовая матрицы связаны между собой преобразованием Лапласа:

$$W(s) = L\{w(t)\}, \quad w(t) = L^{-1}\{W(s)\}. \quad (8.40)$$

Частотные характеристики системы в многомерном случае не нашли широкого применения. Хотя формально сделав в $W(s)$ замену $s = j\omega$, можно ввести аналогичные понятия и рассматривать $p \times m$ обычных скалярных частотных характеристик $W_{ij}(j\omega)$.

Если уравнения (8.27) описывают одномерную систему, то $v, y \in R$, $B = \text{col}[b_1, \dots, b_n]$, $C = [c_1, \dots, c_n]$. В этом случае $W(s) = C[sE - A]^{-1}B$, $w(t) = C\Phi(t)B$ будут скалярными функциями.

Пример 8.8. Рассмотрим систему, имеющую два входа и один выход:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} v, \quad y = [1, \quad 1]x, \quad v = \text{col}[v_1, \quad v_2].$$

В примере 8.7 найдена матрица $[sE - A]^{-1}$. Используя выражение $W(s) = C[sE - A]^{-1}B$, нетрудно получить передаточную матрицу размерностью 1×2 $W(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s - 1}{s^2 + 6s + 8} & \frac{7s - 2}{s^2 + 6s + 8} \end{bmatrix}$. Весовая матрица будет иметь вид $w(t) = \left[\left(-2,5e^{-2t} + 4,5e^{-4t} \right) \left(-8e^{-2t} + 15e^{-4t} \right) \right]$.

8.8. Устойчивость, управляемость и наблюдаемость линейных систем

Рассмотрим линейную систему, описываемую уравнениями состояния (8.27). Устойчивость процессов в системе можно рассматривать по отношению к тем или иным переменным, характеризующим систему. Очевидно, из (8.27) следует, что поведение системы можно рассматривать по отношению к переменным состояния x_i (вектору состояния x) или к выходным переменным y_i (вектору выхода y). Процессы в системе могут быть устойчивы по отношению к одной группе переменных и неустойчивы по отношению к другой. Чаще всего рассматривают устойчивость по отношению к переменным состояния $x(t)$. За исключением особых случаев это будет справедливо и по отношению к вектору выхода y .

Закон изменения вектора состояния $x(t)$ определяется выражением (8.32). В случае линейной системы устойчивость процессов в ней зависит только от поведения свободной составляющей $\Phi(t)x(0)$, обусловленной начальным значением вектора состояния, т.е. составляющей

$$x(t) = \Phi(t)x(0). \quad (8.41)$$

Пусть корни характеристического уравнения системы

$$\det[A - \lambda E] = 0, \quad (8.42)$$

соответствующего системе (8.27), будут все различные $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, тогда переходная матрица состояния $\Phi(t)$ представима в виде (8.34), где M – модальная матрица, элементы которой не зависят от времени. В этом случае (8.41) запишем в виде

$$x(t) = M \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}] M^{-1} x(0). \quad (8.43)$$

Процессы в системе автоматического управления по отношению к переменным состояния x_i будут асимптотически устойчивы, если при любом начальном значении $x(0)$ свободная составляющая (8.43) с течением времени затухает, т.е. $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Процессы в системе будут просто устойчивы, если $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) < \infty$, $i = 1, \dots, n$, неустойчивы, если хотя бы для одной координаты $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \infty$.

В соответствии с тремя рассматриваемыми случаями будем говорить об асимптотически устойчивой, устойчивой (нейтральной или находящейся на границе устойчивости) и неустойчивой линейных системах.

Из приведенных определений и анализа выражения (8.43) следует, что система будет асимптотически устойчивой, если все действительные части корней λ_i строго отрицательны, т.е. $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$. Система будет просто устойчивой, если $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$, $i = 1, \dots, n$, и неустойчивой, если для некоторого корня $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$.

Наличие кратных корней не меняет полученных результатов относительно асимптотической устойчивости и неустойчивости.

Таким образом, необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости системы (8.27) является отрицательность действительных частей всех корней характеристического уравнения (8.42), т.е. все $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$.

Если в (8.42) раскрыть определитель, то в результате получим уравнение $a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$, где a_i определяются через элемент a_{ij} матрицы A .

К последнему уравнению обычным путем можно применить известные критерии устойчивости (Гурвица, Рауса, Михайлова и т.п.).

Прежде чем сформулировать в общем виде понятия, связанные с управляемостью и наблюдаемостью систем, рассмотрим частный случай. Пусть система управления с одним входом и одним выходом описывается уравнениями состояния

$$\dot{x} = Ax + Bv, \quad y = Cx, \quad (8.44)$$

где A – $n \times n$ матрица; $B = \operatorname{col}[b_1, \dots, b_n]$; $C = [c_1, \dots, c_n]$, $x \in R^n$, $y, v \in R$.

Предположим, что матрица A имеет различные собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Сделаем в (8.44) замену $x = Mz$, где M – модальная матрица размерностью $n \times n$. В результате приходим к канонической форме уравнений состояния

$$\dot{z} = \operatorname{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]z + B'v, \quad y = C'z, \quad (8.45)$$

где $B' = \operatorname{col}[b'_1, \dots, b'_n]$, $C' = [c'_1, \dots, c'_n]$, $B' = M^{-1}B$, $C' = CM$.

Скалярный элемент b'_i получается перемножением i -й строки матрицы M^{-1} на столбец B , а элемент c'_i – перемножением строки C на i -ю строку матрицы M .

Уравнения (8.45) запишем в скалярном виде:

$$\dot{z}_i = I_i z_i + b'_i v, \quad y = c'_1 z_1 + \dots + c'_n z_n, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8.46)$$

На рис. 8.5 по уравнениям (8.46) построена схема моделирования.

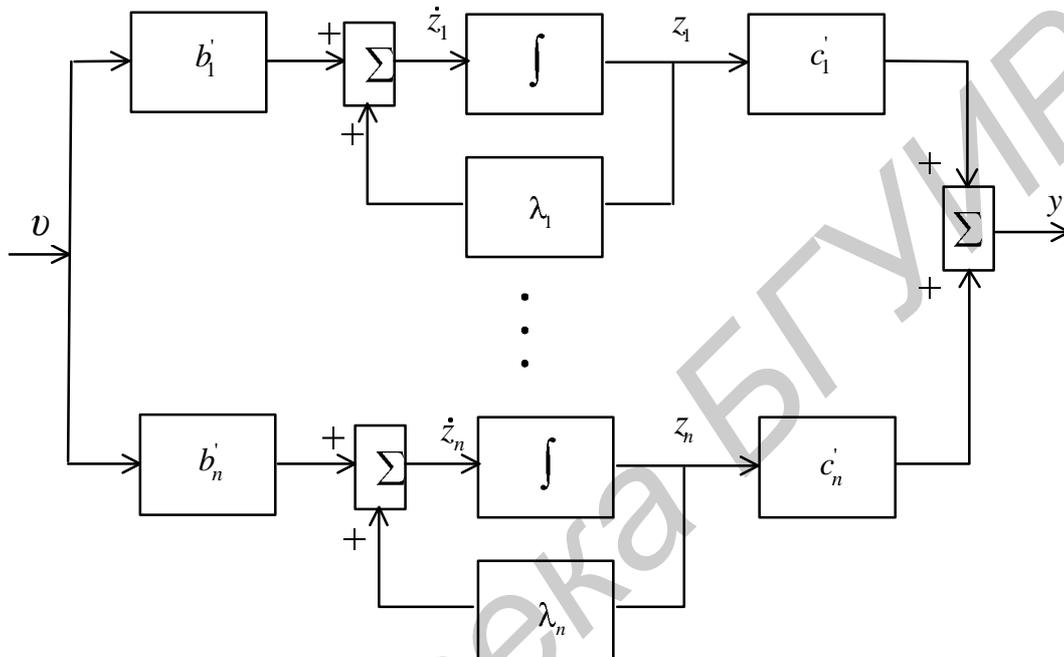


Рис. 8.5

Из этого рисунка следует, что внутренняя структура системы представляет параллельное соединение n однотипных ветвей, соответствующих каждому характеристическому числу.

Если все b'_i отличны от нуля, то с помощью входного сигнала v можно влиять на все координаты z_i (управлять ими). Однако при определенных условиях в зависимости от значений элементов матриц M^{-1} и B могут возникнуть случаи, когда один или несколько коэффициентов b_i будут равны нулю. Тогда одна или несколько координат z_i не будут зависеть от входного сигнала v , не будут им управляться, т.е. соответствующая цепь оказывается разорванной по входу.

Аналогичная картина может наблюдаться по отношению к выходу y . Если все c'_i отличны от нуля, то в выходном сигнале присутствуют (наблюдаются) все координаты z_i . Если же один или несколько коэффициентов c'_i равны нулю, то соответствующие переменные состояния не могут быть измерены или не наблюдаются. В данном случае имеем разрыв во внутренней структуре системы на выходе соответствующих цепей.

Из рассмотренного примера, в частности, следует, что система, описываемая уравнениями (8.44), будет полностью управляемой и полностью наблюдаемой, если все элементы матриц $B' = M^{-1}B$, $C' = CM$ будут отличны от нуля.

Коэффициенты b'_i определяются коэффициентами матрицы B и собственными числами матрицы A , т.е. фактически коэффициентами матрицы A . Отсюда следует, что управляемость системы зависит только от пары матриц A и B . Аналогично наблюдаемость будет зависеть от пары матриц A и C .

Если система полностью управляема и наблюдаема, то порядок передаточной функции системы $W(s) = C[sE - A]^{-1}B$ будет совпадать с порядком дифференциального уравнения в (8.44) и будет равен n . В случае неполной управляемости или наблюдаемости порядок передаточной функции будет меньше, чем n . Этот результат следует из структуры (см. рис. 8.5), так как в этом случае в части каналов нет связи между v и y . Например, если b'_i или c'_i равны нулю, то порядок передаточной функции будет $(n - 1)$, хотя порядок системы (8.44) равен n . Отсюда следует, что передаточная функция характеризует только полностью управляемую и наблюдаемую часть системы.

Рассмотрим теперь свойства устойчивости системы в связи с ее управляемостью и наблюдаемостью. Пусть, например, $\text{Re } \lambda_1 > 0$, а все остальные $\text{Re } \lambda_i < 0$, $i = 2, \dots, n$. В этом случае по отношению к координатам x_i (то же самое z_i) система неустойчива. Если в этом случае система не наблюдаема по координате z_1 ($c'_1 = 0$), то $y = c'_2 z_2 + \dots + c'_n z_n$ и неустойчивая координата не влияет на выход системы. По отношению к выходу система будет вести себя как устойчивая. Отсюда следует, что если система полностью наблюдаема, то устойчивость по отношению к переменным состояниям (иногда ее называют внутренней устойчивостью) будет совпадать с устойчивостью по отношению к выходной координате (внешней устойчивостью). В случае ненаблюдаемой системы это условие может не выполняться.

Будем полагать, что уравнения (8.44) описывают объект управления. Регулятор, управляющий этим объектом (выход регулятора – это сигнал v), формирует сигнал управления, используя выходной сигнал y . Пусть объект управления является неустойчивым $\text{Re } \lambda_1 > 0$ и неуправляемым ($b'_1 = 0$) по координате z_1 , тогда какой бы регулятор мы ни применили, с помощью обратной связи и регулятора невозможно сделать систему устойчивой, так как разорвана на входе первая цепь. Говорят, что в этом случае объект является неустойчивым.

Дадим более строгие определения управляемости и наблюдаемости линейной системы (8.44) общего вида, т.е. в (8.44) будем полагать $x \in R^n$, $y \in R^p$, $v \in R^m$ – матрицы соответствующих размерностей. Обозначим значения вектора состояния $x(t_0)$ при t_0 , $x(t_1)$ при $t = t_1$, $t_1 > t_0$.

Система (8.44) называется *полностью управляемой*, если для любых моментов времени t_0 и t_1 и любых заданных состояний $x(t_0)$ и $x(t_1)$ существует управление $v(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$), переводящее начальное состояние $x(t_0)$ в конечное $x(t_1)$.

Состояние $x(t)$ системы (8.44) называется *наблюдаемым*, если в момент наблюдения $t = t_0$ можно однозначно определить по данным измерения $y(t)$ и $v(t)$ на конечном интервале времени $t_0 \leq t \leq t_1$, $t_1 > t_0$. Система (8.44) называется *полностью наблюдаемой*, если наблюдаемы все ее состояния в любые моменты времени.

Американским ученым Р. Калманом были предложены критерии управляемости и наблюдаемости. Вводятся в рассмотрение матрица управляемости $K_Y = [B \ \Lambda B \ \Lambda^2 B \ \dots \ \Lambda^{n-1} B]$ и матрица наблюдаемости $K_H = [C^T \ \Lambda^T C^T \ \dots \ \Lambda^{n-1} C^T]$.

Матрица K_Y имеет размерность $n \times nm$, а матрица K_H – размерность $n \times nr$, символ T означает операцию транспонирования матрицы.

Столбцами матрицы K_Y являются столбцы матриц $B, AB, \dots, A^{n-1}B$. Аналогично столбцы матрицы K_H – это столбцы матриц $C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T$. Если уравнения (8.44) описывают одномерную систему, то $m = r = 1$ и K_Y, K_H будут квадратными матрицами размерности $n \times n$.

Критерий управляемости и наблюдаемости. Система (8.44) является полностью управляемой только тогда, когда ранг матрицы управляемости равен n , и полностью наблюдаемой только тогда, когда ранг матрицы наблюдаемости равен n .

Напомним, что под рангом матрицы понимается максимальный порядок ее минора, отличного от нуля.

Пример 8.9. Рассмотрим одномерную систему второго порядка

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} v, \quad y = [c_1 \quad c_2] x. \quad (8.47)$$

Основная матрица системы A является сопровождающей. Предположим, что ее собственные числа λ_1, λ_2 , являющиеся корнями уравнения $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$, различны (следовательно $a_1^2 \neq 4a_2$). Приведем систему к канонической форме с помощью преобразования $x = Mz = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} z$, $z \in R^2$. В результате

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{bmatrix} v, \quad y = [c'_1, c'_2] \mathbf{z},$$

где $b'_1 = \frac{\lambda_2 b_1 - b_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$, $b'_2 = \frac{-\lambda_1 b_1 + b_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$, $c'_1 = c_1 + c_2 \lambda_1$, $c'_2 = c_1 + c_2 \lambda_2$.

По уравнениям (8.47) найдем передаточную функцию системы

$$W(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = C[sE - A]^{-1} B = \frac{(b_1 c_1 + b_2 c_2)s + b_1 c_1 a_1 - b_1 c_2 a_2 + b_2 c_1}{s^2 + a_1 s + a_2}.$$

Пусть $a_1 = 6$, $a_2 = 8$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$. Очевидно, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$, $c'_1 = 0$, $c'_2 = -2$. Система является ненаблюдаемой по координате z_1 ($y = [0, -2]z$). Подстановка значений коэффициентов в передаточную функцию дает

$$W(s) = \frac{(2b_1 + b_2)(s + 2)}{s^2 + 6s + 8} = \frac{(2b_1 + b_2)(s + 2)}{(s + 2)(s + 4)} = \frac{2b_1 + b_2}{s + 4}, \quad (8.48)$$

т.е. передаточная функция 2-го порядка вырождается в передаточную функцию 1-го порядка.

Если выбрать, например, $b_1 = 1$, $b_2 = -2$, $b'_1 = 1$, $b'_2 = 0$, то система будет неуправляема по второй координате z_2 .

Таким образом, система с уравнениями состояния

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} v, \quad y = [2, 1] \mathbf{x} \quad (8.49)$$

является неуправляемой по одной из внутренних координат и ненаблюдаемой по другой. При этом передаточная функция (8.48) при $b_1 = 1$, $b_2 = -2$ вообще вырождается в нулевую $W(s) = 0$ и между переменными v и y отсутствует всякая связь. Очевидно, по виду уравнения (8.49) трудно было бы предвидеть такие результаты.

К (8.49) применим критерий управляемости и наблюдаемости

$$K_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -8 \end{bmatrix} \mathbf{M} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad K_H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{M} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ранг обеих матриц меньше двух (равен единице). Система не полностью управляема и не полностью наблюдаема.

9. СИНТЕЗ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

9.1. Предварительные замечания

Рассмотренные до сих пор разделы касались задач математического описания элементов и систем, анализа их динамических свойств, различных качественных показателей и влияния на них отдельных параметров.

Конечной же целью анализа САУ является обратная задача: синтез системы, удовлетворяющей функциональному назначению и заданным качественным показателям. При этом частными случаями синтеза могут быть следующие задачи: обеспечения устойчивости (стабилизации), повышения точности, улучшения быстродействия, оптимизации каких-либо показателей качества.

К настоящему времени разработан ряд методов синтеза линейных систем. Их можно разделить на 3 группы. *Графоаналитическая группа* включает методы: корневые, стандартных переходных характеристик и частотные; *аналитическая* – синтез САУ по интегральным критериям качества, с использованием вариационного исчисления, динамического программирования, принципа максимума, аналитического конструирования регуляторов, модального управления; наконец, к третьей группе относятся методы *прямого синтеза* с использованием компьютерного моделирования. Наиболее распространенными являются частотный метод, относящийся к классическим, и метод модального управления, относящийся к современным. Естественно, что и тот, и другой дополняются расчетами на ПЭВМ.

При выборе метода синтеза необходимо учитывать режимы работы системы. Пусть модель САУ имеет вид [5]:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Hf, \\ y = Cx, \end{cases}$$

где f – возмущение, H – матрица возмущающих воздействий.

$$\text{Как известно, } y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Hf(\tau)d\tau.$$

Первая (свободная) составляющая в этом выражении соответствует режиму отработки начальных условий при $u = 0$, $f = 0$; вторая (вынужденная) составляющая соответствует режиму отработки входа при нулевых начальных условиях; третья (вынужденная) составляющая отражает процесс отработки возмущений при фиксированных начальных условиях и входном воздействии.

При расчете САУ, обрабатывающих входные воздействия, предпочтительнее частотный метод; при синтезе САУ, работающих в режиме отработки начальных условий и возмущений, – модальный метод.

При постановке задачи синтеза одномерной САУ в качестве цели работы системы выдвигается требование обеспечить с заданной точностью равенство выходной координаты $y(t)$ и входного воздействия $v(t)$ при $t \rightarrow \infty$ (условие статики) при выполнении требований к динамике: обеспечение заданного времени переходного процесса и перерегулирования. Если объект управления сложный, необходимо оценить возможность выполнения синтеза. При этом рассматриваются следующие ограничения:

- ресурсное ограничение, связанное с формированием управляющего воздействия на объект по мощности, величине линейной зоны и т.п.;
- устойчивость «обратных» объектов или его частей, связанная с сокращаемыми (передаточными или другими) сомножителями;
- условие управляемости, в случае не полностью управляемой системы – устойчивость неуправляемой части;
- условие наблюдаемости, в случае не полностью наблюдаемой САУ – устойчивость ненаблюдаемой части.

При решении задачи синтеза САУ центральным вопросом является проектирование регулятора по заданным требованиям к статическим и динамическим показателям САУ.

9.2. Корректирующие устройства

Любое устройство, включаемое в систему управления с целью изменения ее свойств для обеспечения заданных показателей качества, можно рассматривать как корректирующее. По способу включения корректирующие устройства делятся на *последовательные, параллельные, встречно-параллельные* (*местные обратные связи*), которые соответственно представлены на рис. 9.1, а, б, в. Обозначим передаточную функцию последовательного корректирующего устройства $W_{K_1}(s)$, параллельного $W_{K_2}(s)$ и встречно-параллельного $W_{K_3}(s)$.

При отсутствии корректирующего устройства любого типа передаточная функция разомкнутой системы, как это видно из рис. 9.1, будет равна $W_0(s) = W_1(s)W_2(s)W_3(s)$. Включение корректирующего устройства изменяет передаточную функцию прямой цепи, которая соответственно для рис. 9.1, а, б, в будет иметь следующий вид:

$$W(s) = W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_{K_1}(s), \quad (9.1)$$

$$W(s) = W_1(s)[W_2(s) + W_{K_2}(s)]W_3(s), \quad (9.2)$$

$$W(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)}{1 + W_2(s)W_{K_3}(s)}. \quad (9.3)$$

Приравнивая попарно соотношения (9.1)–(9.3), можно найти связь одного типа коррекции с любым другим и выбрать нужный тип коррекции, исходя из технических возможностей.

Отметим, что вид передаточной функции скорректированной системы зависит не только от вида передаточной функции корректирующего устройства $W_{K_i}(s)$, но и от места включения звеньев $W_{K_2}(s)$, $W_{K_3}(s)$ в прямой цепи.

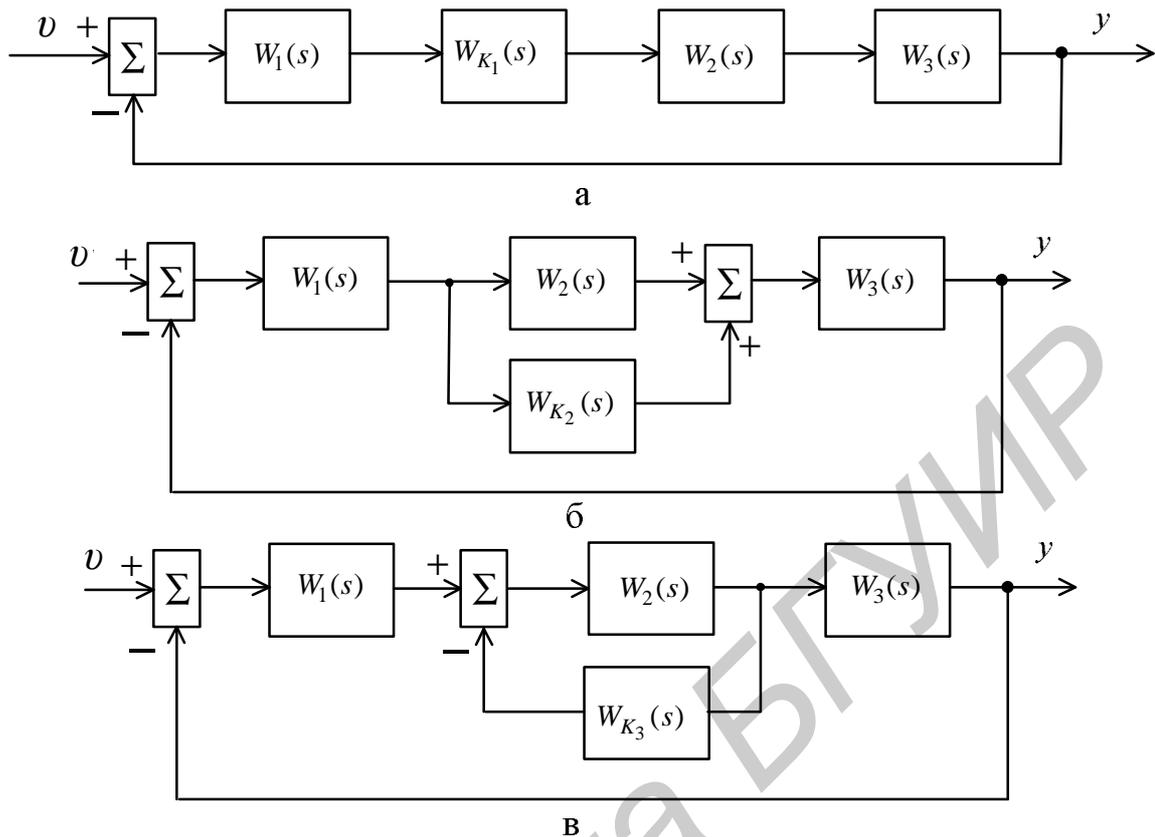


Рис. 9.1

Представленные на рис. 9.1 способы включения корректирующих устройств видоизменяют передаточную функцию прямой цепи, не изменяя принципов управления.

В качестве корректирующего устройства может использоваться любое устройство, реализующее требуемую передаточную функцию. Выбор того или иного устройства, а также способа коррекции часто обусловлен техническими возможностями и с этой точки зрения достаточно субъективен.

Наиболее часто в электромеханических системах управления корректирующие устройства реализуются в виде пассивных или активных четырехполюсников, содержащих резисторы, конденсаторы (реже индуктивности) и в случае активных четырехполюсников – операционные усилители. Такие четырехполюсники можно применять в системах управления, у которых сигналы управления представляют собой напряжение постоянного тока.

9.2.1. Последовательные корректирующие устройства.

Последовательные корректирующие устройства включаются в прямую цепь системы управления в соответствии с рис. 9.1, а.

При последовательной коррекции передаточная функция разомкнутой скорректированной системы будет равна $W(s) = W_{K1}(s)W_0(s)$. Выбором передаточной функции $W_{K1}(s)$ можно добиться требуемой передаточной функции $W(s)$, обеспечивающей желаемые свойства системы.

Последовательная коррекция часто применяется для обеспечения заданной точности системы. В этом случае передаточная функция корректирующего устройства выбирается в виде $W_{K_1}(s) = \frac{K_1}{s^v}$, т.е. в прямую цепь системы вводится усилительное звено с коэффициентом усиления K_1 и интегрирующее звено с передаточной функцией $\frac{1}{s^v}$, так что $W(s) = \frac{K_1 W_0(s)}{s^v}$. Выбор величин K_1 и v обусловлен необходимой точностью системы в установившихся режимах. Пусть исходная система статическая, $W_0(s) = \frac{K_0 N(s)}{L(s)}$ и требуется, чтобы она имела статическую ошибку $e_y^o = 0$ и скоростную ошибку $e_y' \leq A$. В соответствии с результатами подразд. 6.1 требуется, чтобы скорректированная система обладала астатизмом первого порядка, а общий коэффициент усиления $K = K_0 K_1$ был выбран из условия $e_y' = \frac{v_1}{K} \leq A$, откуда $K \geq \frac{v_1}{A}$, где величина v_1 задана. Таким образом, параметры корректирующего устройства $W_{K_1}(s) = \frac{K_1}{s^v}$ следует выбрать из условия $K_1 \geq \frac{v_1}{AK_0}$, $v = 1$.

В случае задания точности системы при обработке гармонического сигнала требуемый общий коэффициент усиления $K = K_0 K_1$ (и соответственно величина K_1) и порядок астатизма можно найти аналогично, если воспользоваться выражениями (6.17), (6.19).

Наряду с использованием последовательных корректирующих устройств для повышения точности эти устройства могут использоваться и для улучшения показателей качества системы. В этом случае в соответствии с выражением (9.1) выбором $W_{K_1}(s)$ изменяют среднечастотную часть исходной частотной характеристики $W_0(j\omega)$, добиваясь требуемой частотной характеристики $W(j\omega)$.

Последовательные корректирующие устройства в виде пассивных или активных четырехполюсников обычно включаются после устройства сравнения или между каскадами предварительного усилителя. При этом применяют устройства с отставанием по фазе, с опережением по фазе и с отставанием и опережением по фазе.

На рис. 9.2, а представлены частотные характеристики системы при коррекции с отставанием по фазе. Здесь $L_0(\omega)$ – ЛАХ исходной системы, $L_{\text{жс}}(\omega)$ – ЛАХ желаемой (скорректированной) системы, $L_{K_1}(\omega)$ – ЛАХ корректирующего устройства. На рис. 9.2, б изображена цепочка, реализующая эту коррекцию.

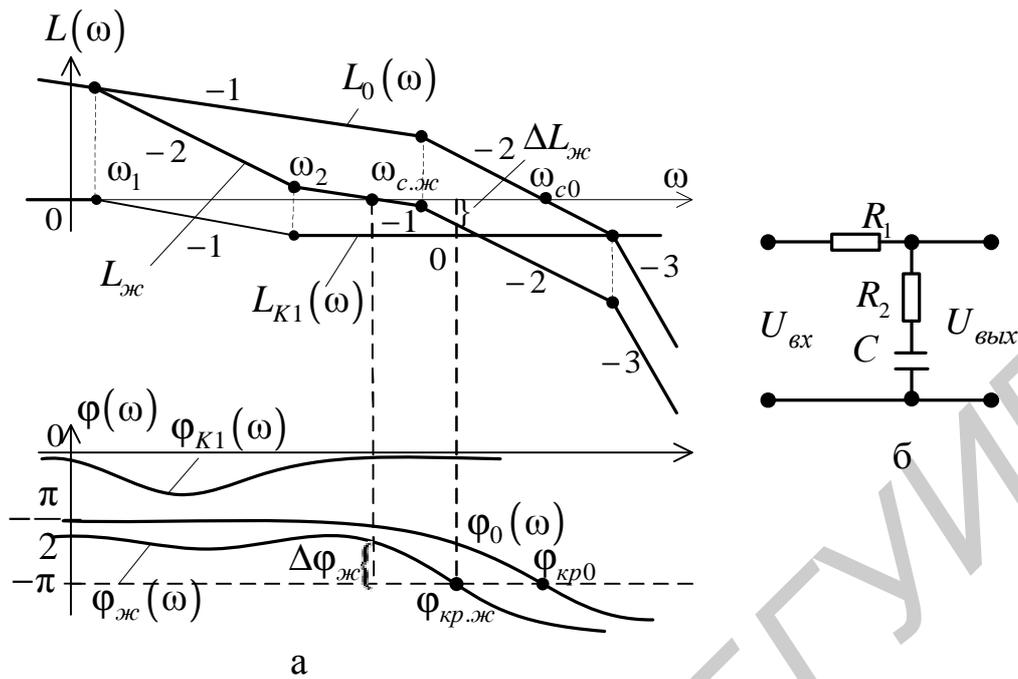


Рис. 9.2

Комплексная передаточная функция корректирующего устройства равна

$$W_{K1}(j\omega) = \frac{(1 + j\omega\alpha T)}{(1 + j\omega T)}, \quad T = (R_1 + R_2)C, \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad \omega = \frac{1}{T}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\alpha T}. \quad (9.4)$$

Эта коррекция приводит к повышению устойчивости, подавлению высокочастотных помех, но к снижению быстродействия.

На рис. 9.3 изображены частотные характеристики и цепочка при коррекции с опережением по фазе. Надо помнить, что цепочка вносит ослабление L_{K1} , которое необходимо скомпенсировать.

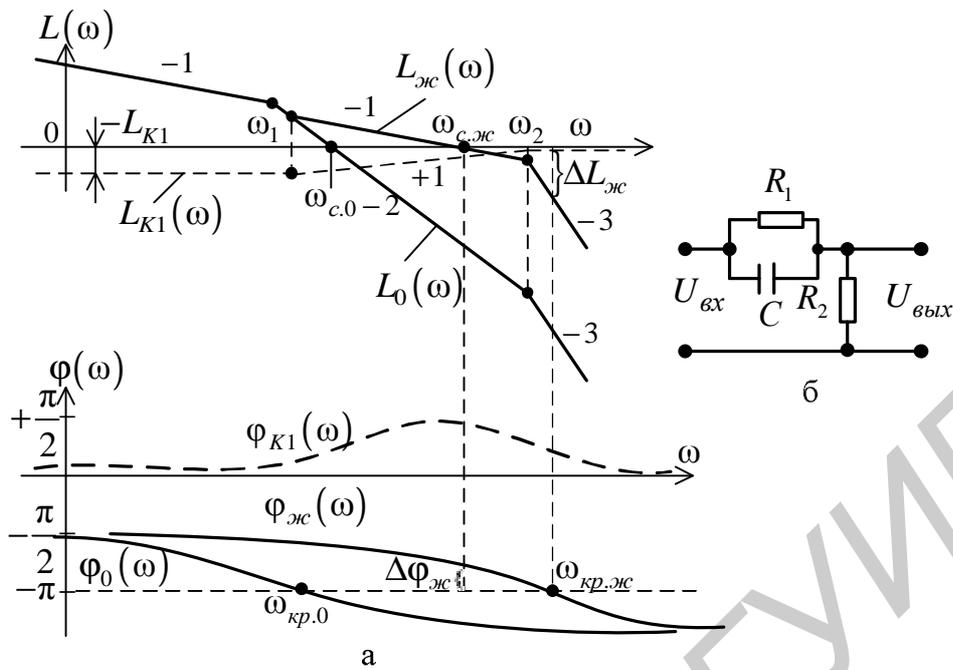


Рис. 9.3

Комплексная передаточная функция корректирующего устройства:

$$W_{K1}(j\omega) = \alpha \frac{(1 + j\omega T)}{(1 + j\alpha\omega T)}, \quad T = R_1 C, \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad \omega = \frac{1}{T}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\alpha T}. \quad (9.5)$$

Эта коррекция приводит к повышению устойчивости и быстродействия, но к снижению помехоустойчивости на высоких частотах.

Объединение этих двух видов коррекции позволяет расширить среднечастотную зону (рис. 9.4).

В этом случае

$$W_{K1}(j\omega) = \frac{(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_4)}, \quad (9.6)$$

где $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$, $T_2 = R_1 C_1$, $T_3 = R_2 C_2$, $T_2 T_3 = T_1 T_4$, $T_1 + T_4 = T_2 + \frac{R_1 + R_2}{R_2} T_3$.

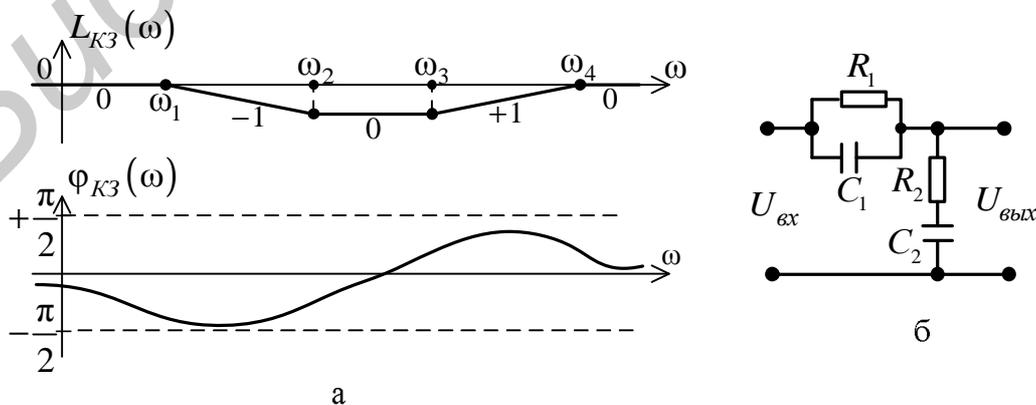


Рис. 9.4

Эта коррекция существенно улучшает качественные показатели САУ.

9.2.2. Параллельные корректирующие устройства. Одним из распространенных способов улучшения качества системы является введение производной от сигнала в прямой цепи. Пусть на рис. 9.1, б $W_2(s) = K_2$, $W_{K_2}(s) = Ts$, тогда передаточная функция прямой цепи скорректированной системы будет равна $W(s) = W_1(s)W_3(s)K_2(1 + T's) = W_0(s)(1 + T's)$, где $T' = T/K_2$.

Введение корректирующего устройства изменяет амплитудную и фазовую характеристики системы, которые примут вид

$$A(\omega) = A_0(\omega)\sqrt{1 + T'^2\omega^2}, \quad \varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) + \operatorname{arctg}T'\omega, \quad (9.7)$$

$$A_0(\omega) = |W_0(j\omega)|, \quad \varphi_0(\omega) = \arg W_0(j\omega).$$

Из (9.7) следует, что введение производной увеличивает положительные фазовые сдвиги и позволяет при соответствующем выборе T' в области частоты среза системы «поднять» фазовую характеристику и увеличить запасы устойчивости. При этом при малых частотах вид частотных характеристик исходной и скорректированной системы не изменится. Такая коррекция часто применяется для стабилизации или демпфирования систем.

Так как реализовать звено, осуществляющее чистое дифференцирование $W_{K_2}(s) = Ts$, достаточно сложно, то используют введение производной с инерционностью, что соответствует $W_{K_2}(s) = \frac{Ts}{T_1s + 1}$. При этом эффект демпфирования несколько ослабевает.

Другой вид параллельного корректирующего устройства, находящего широкое применение, – это введение интеграла и производной от сигнала прямой цепи. Пусть $W_2(s) = K_2$, а $W_{K_2}(s) = \frac{1}{Ts}$, тогда передаточная функция прямой цепи будет равна $W(s) = W_0(s)\frac{1 + T's}{T's}$, а ее частотные характеристики

$$A(\omega) = A_0(\omega)\frac{\sqrt{1 + T'^2\omega^2}}{T'\omega}, \quad \varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) - 90^\circ + \operatorname{arctg}T'\omega, \quad T' = K_2T. \quad (9.8)$$

В системе повышается порядок астатизма на единицу и соответственно увеличивается точность. При этом путем выбора величины T' , как следует из (9.8), отрицательный фазовый сдвиг в значительной степени можно на частоте среза скомпенсировать положительным $\operatorname{arctg}T'\omega$, что позволяет обеспечить устойчивость системы.

Пример 9.1. Пусть в нескорректированной системе (см. рис. 9.1, а) $W_1(s) = K_1$, $W_2(s) = \frac{K_2}{T_2s + 1}$, $W_3(s) = \frac{K_3}{T_3s + 1}$, $T_2 = 0,1$ с, $T_3 = 0,5$ с, $K_1 = 2$, $K_2 = 2$,

$K_3 = 3$. Требуется, чтобы статическая ошибка в системе была равной $e_y^o = 0$, а скоростная ошибка при скачке по скорости управляющего сигнала $v(t) = v_1 t$ и $v_1 = 1$ была $e_y^1 \leq 0,04$. Так как $e_y^o = 0$, то требуемый порядок астатизма системы ν должен быть не меньше единицы. Принимаем $\nu = 1$. Скоростная ошибка $e_y^1 = \frac{v_1}{K} = \frac{1}{K} \leq 0,04$, откуда требуемый коэффициент передачи разомкнутой системы $K \geq 25$. Принимаем $K = 30$. В прямую цепь введем последовательное корректирующее устройство с передаточной функцией $W_{K_1}(s) = \frac{2,5}{s}$, тогда передаточная функция разомкнутой скорректированной системы будет $W(s) = \frac{K_1 K_2 K_3 \cdot 2,5}{s(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} = \frac{30}{s(0,1s + 1)(0,5s + 1)}$.

По критерию Гурвица (см. пример 5.3) замкнутая система с такой передаточной функцией будет устойчива при выполнении условия $0 < K < \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3}$, которое при $K = 30$, $T_2 = 0,1$, $T_3 = 0,5$ не выполняется.

Итак, введение в прямую цепь последовательного корректирующего устройства с передаточной функцией $W_{K_1}(s) = \frac{2,5}{s}$ из условия обеспечения требуемой точности приводит к неустойчивости системы.

Попытаемся скорректировать систему с помощью параллельного корректирующего устройства, для чего параллельно звену с передаточной функцией $W_1(s)$ подключим звено с передаточной функцией $W_{K_1}(s) = \frac{K'}{s}$.

Тогда передаточная функция прямой цепи с учетом коррекции будет

$$W(s) = \frac{K' K_2 K_3 \left(\frac{K_1}{K'} s + 1 \right)}{s(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}.$$

Система становится астатической, и для обеспечения точности, как и выше, примем коэффициент передачи равным $K' K_2 K_3 = 30$, откуда $K' = 5$. С учетом этого передаточная функция $W(s) = \frac{30(0,4s + 1)}{s(0,1s + 1)(0,5s + 1)}$.

Проверим скорректированную систему на устойчивость. Характеристическое уравнение замкнутой системы будет иметь вид

$$D(\lambda) = \lambda(0,1\lambda + 1)(0,5\lambda + 1) + 30(0,4\lambda + 1) = a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0,$$

где $a_0 = 0,05$, $a_1 = 0,6$, $a_2 = 13$, $a_3 = 30$.

Условие устойчивости $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ для уравнения третьего порядка выполняется ($7,8 - 1,5 = 6,3 > 0$).

Итак, введение параллельной коррекции приводит к тому, что скорректированная система удовлетворяет заданным показателям по точности и является устойчивой.

9.2.3. Встречно-параллельные корректирующие устройства. Встречно-параллельные корректирующие устройства выполняются в виде местных обратных связей. Наиболее часто обратными связями охватывают силовую часть системы управления (исполнительные элементы и усилители мощности).

Рассмотрим общие свойства таких корректирующих устройств. Для рис. 9.1, в частотная характеристика участка, охватываемого обратной связью, имеет вид $W_2'(j\omega) = \frac{W_2(j\omega)}{1 + W_2(j\omega)W_{K_3}(j\omega)}$.

Обычно в диапазоне рабочих частот системы (в диапазоне низких частот) выполняется условие $|W_2(j\omega)W_{K_3}(j\omega)| \gg 1$ и частотная характеристика

$W_2'(j\omega) \cong \frac{1}{W_{K_3}(j\omega)}$, т.е. характеристика участка цепи, охваченного обратной

связью, определяется только видом частотной характеристики корректирующего элемента и не зависит от звена прямой цепи $W_2(s)$. В ряде случаев это позволяет скомпенсировать нежелательное влияние звена $W_2(s)$ на динамику системы, например, влияние малых нелинейностей или малого изменения параметров этого звена прямой цепи.

В зависимости от вида передаточной функции $W_{K_3}(s)$ корректирующие обратные связи делятся на *жесткие* и *гибкие*. Если звено $W_{K_3}(s)$ является статическим ($W_{K_3}(0) \neq 0$), то обратная связь называется жесткой. Если звено $W_{K_3}(s)$ является звеном дифференцирующего типа ($W_{K_3}(0) = 0$), то имеем гибкую обратную связь. Жесткая обратная связь действует как в переходных, так и в установившихся режимах, а гибкая – только в переходных.

Рассмотрим несколько частных задач коррекции с помощью обратных связей.

Пусть $W_2(s) = \frac{K_2}{Ts + 1}$, $W_{K_3}(s) = K_3$. Тогда передаточная функция участка цепи $W_2'(s)$, охваченного отрицательной обратной связью, будет иметь вид

$$W_2'(s) = \frac{K_2}{Ts + 1 + K_2 K_3} = \frac{K_2'}{T's + 1}, \text{ где } K_2' = \frac{K_2}{1 + K_2 K_3}, T' = \frac{T}{1 + K_2 K_3}.$$

Итак, структура звена не изменилась, оно осталось апериодическим, но произошло уменьшение коэффициента передачи и эквивалентной постоянной времени T' . Отсюда следует, что охват в прямой цепи наиболее инерционного звена позволяет уменьшить инерционность всей цепи, что благоприятно сказывается на показателях качества системы (быстродействию, устойчивости).

Уменьшение коэффициента передачи можно компенсировать введением дополнительного усилительного устройства.

Пусть $W_2(s) = K_2$, $W_{K_3}(s) = \frac{K_3}{Ts + 1}$, тогда $W_2'(s) = \frac{K_2'(Ts + 1)}{T's + 1}$,

$K_2' = \frac{K_2}{1 + K_2K_3}$, $T' = \frac{T}{1 + K_2K_3}$. В этом случае меняется тип звена. При $K_2K_3 \gg 1$, $T' = T$ и можно записать приближенное выражение для передаточной функции $W_2'(s) \cong K_2'(Ts + 1)$. Итак, получили эквивалентное форсирующее звено, влияние которого аналогично влиянию введения производной при параллельной коррекции.

Рассмотрим изменение свойств охваченного участка прямой цепи при охвате его гибкой обратной связью. Пусть $W_2(s) = \frac{K_2}{s(Ts + 1)}$,

$$W_{K_3}(s) = \frac{K_3s}{T_0s + 1}.$$

В этом случае передаточная функция участка цепи с обратной связью $W_2'(s) = \frac{K'(T_0s + 1)}{s(T_2^2s^2 + T_1s + 1)}$, где $K' = \frac{K_2}{1 + K_2K_3}$, $T_2^2 = \frac{TT_0}{1 + K_2K_3}$, $T_1 = \frac{T + T_0}{1 + K_2K_3}$.

Итак, при сохранении интегрирующих свойств эквивалентная передаточная функция обладает форсирующими свойствами из-за сомножителя $(T_0s + 1)$. Если сделать величину K_2K_3 достаточно большой, то малыми постоянными времени T_1 и T_2 можно пренебречь. При этом получим $W_2'(s) \cong \frac{K'(T_0s + 1)}{s}$, $K' \cong \frac{1}{K_3}$. В этом случае получаем в прямой цепи изодромное звено.

Пример 9.2. Рассмотрим нескорректированную систему, как и в примере 9.1. Передаточная функция системы без коррекции будет иметь вид $W(s) = \frac{K_1K_2K_3}{(T_2s + 1)(T_3s + 1)} = \frac{12}{(0,1s + 1)(0,5s + 1)}$. Требуется, чтобы статическая ошибка в системе при управляющем входном сигнале $v(t) = v_0 1[t]$, $v_0 = 1$ не превосходила величины 0,1, т.е. $e_y^o \leq 0,1$, а время регулирования $t_p \leq 0,25$ с.

При $K = K_1K_2K_3 = 12$ статическая ошибка в системе будет $e_y^o \cong 0,08$, т.е. будет удовлетворять заданным требованиям.

Оценим в системе время регулирования, базирываясь на корневых оценках качества. Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$D(\lambda) = (T_2s + 1)(T_3s + 1) + K = 0,05\lambda^2 + 0,6\lambda + 13 = 0.$$

Это уравнение имеет два комплексных корня, действительная часть которых $\operatorname{Re} \lambda_i = -6$, откуда следует, что система устойчива. Степень устойчивости системы $\eta = 6$ и в соответствии с (7.4) $t_p \cong \frac{3}{\eta} = 0,5$ с. Таким

образом, время регулирования в системе не удовлетворяет заданному. Для уменьшения времени регулирования следует уменьшить максимальную постоянную времени. Для этого охватим последнее звено с передаточной функцией $W_3(s)$ жесткой отрицательной обратной связью с передаточной функцией $W_{K_3}(s) = K'$, $K' = 2$. Тогда передаточная функция скорректированного участка цепи будет

$$W_3'(s) = \frac{W_3(s)}{1 + K'W_3(s)} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{0,5}{7}s + 1},$$

а передаточная функция разомкнутой скорректированной системы будет

$$W(s) = W_1(s)W_2(s)W_3'(s) = \frac{\frac{12}{7}}{(0,1s + 1)\left(\frac{0,5}{7}s + 1\right)}.$$

Для компенсации уменьшения общего коэффициента усиления и обеспечения заданной точности в прямую цепь введем дополнительное усилительное звено с коэффициентом усиления, равным 7 (фактически это последовательная коррекция). В этом случае окончательно передаточная

функция скорректированной системы $W(s) = \frac{12}{(0,1s + 1)\left(\frac{0,5}{7}s + 1\right)},$

характеристическое уравнение замкнутой системы

$$D(\lambda) = (0,1\lambda + 1)\left(\frac{0,5}{7}\lambda + 1\right) + 12 = 0$$

имеет два комплексных корня с действительной частью $\operatorname{Re} \lambda_i = -12$.

Таким образом, $\eta = 12$, время регулирования $t_p \cong 3/\eta = 0,25$ с, и после коррекции система удовлетворяет заданным показателям качества.

9.3. Корректирующие устройства по внешнему воздействию

При изменении передаточной функции прямой цепи с помощью последовательных, параллельных или встречно-параллельных корректирующих устройств для достижения заданных показателей качества неизменным остается главный принцип построения системы – принцип обратной связи (управление по отклонению). Учет внешнего воздействия при коррекции, в частности применение принципа компенсации (управление по

возмущению) совместно с управлением по отклонению, позволяет расширить возможности коррекции системы.

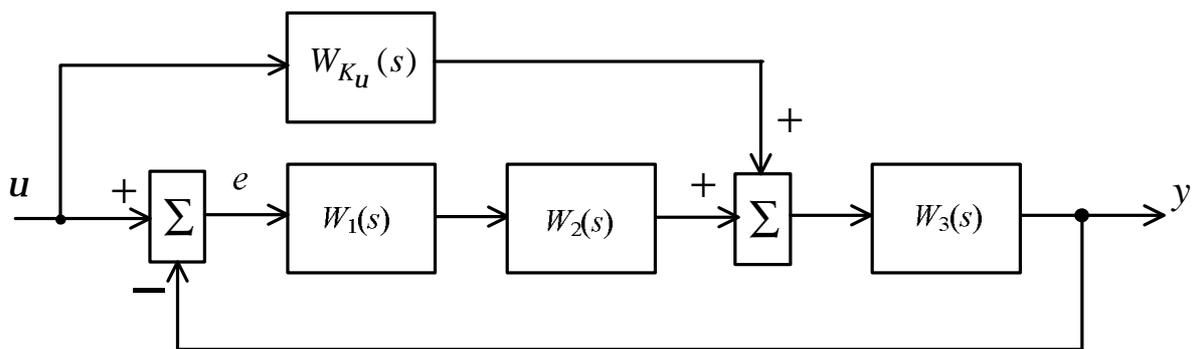
Системы, использующие как управление по отклонению, так и по возмущению, относятся к классу комбинированных систем управления (см. подразд. 1.1). Наиболее часто комбинированное управление применяется для повышения точности системы управления и уменьшения установившейся ошибки. При определенных условиях с помощью комбинированного управления можно свести установившуюся ошибку к нулю при любой форме внешнего воздействия. Такое свойство называется *инвариантностью системы* по отношению к внешнему воздействию.

На рис. 9.5, а представлена структура комбинированной системы с корректирующим устройством по управляющему воздействию, а на рис. 9.5, б – с корректирующим устройством по возмущению, где в первом случае передаточная функция корректирующего устройства обозначена через $W_{K_u}(s)$, а во втором – через $W_{K_f}(s)$.

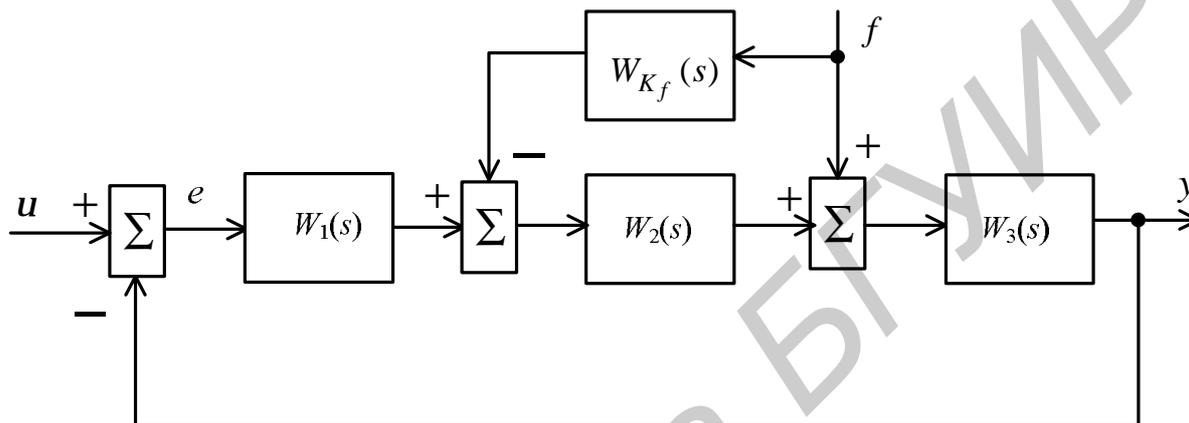
Передаточная функция замкнутой системы без коррекции, связывающая выход y со входом u , для обоих случаев имеет вид

$$\Phi(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_3(s)}. \quad (9.9)$$

Найдем связь изображений выходного сигнала y с внешними воздействиями.



а



б

Рис. 9.5

Для структуры, изображенной на рис. 9.5, а, имеем

$$Y(s) = \frac{W_3(s)[W_{K_u}(s) + W_1(s)W_2(s)]}{1 + W_1(s)W_2(s)W_3(s)} V(s), \quad (9.10)$$

а для структуры на рис. 9.5, б имеем

$$Y(s) = \frac{W_3(s)[1 - W_2(s)W_{K_f}(s)]}{1 + W_1(s)W_2(s)W_3(s)} F(s). \quad (9.11)$$

Задача любой системы автоматического управления – как можно более точно воспроизвести управляющий (полезный) сигнал $u(t)$ и максимально ослабить влияние возмущения на выходной сигнал. С этой точки зрения желательно, чтобы в (9.10) передаточная функция, связывающая $Y(s)$ и $V(s)$, была равна единице (тогда $u(t) = y(t)$), а передаточная функция в (9.11), связывающая $Y(s)$ и $F(s)$, была равна нулю (тогда $f(t)$ не влияет на $y(t)$).

Выполнением этих условий будут соответственно следующие соотношения:

$$W_{K_u}(s) = \frac{1}{W_3(s)}, \quad (9.12)$$

$$W_{K_f}(s) = \frac{1}{W_2(s)}. \quad (9.13)$$

Условия (9.12), (9.13) соответствуют так называемой полной *инвариантности системы*. При выполнении (9.12) передаточная функция, связывающая ошибку e и входной сигнал u , как это нетрудно проверить, будет равна нулю, т.е. ошибка в системе не зависит (инвариантна) от управляющего сигнала и всегда равна нулю. При выполнении (9.13) выход системы y не зависит (инвариантен) от возмущения f .

Отметим, что условия (9.12), (9.13) гарантируют инвариантность соответствующих координат с точностью до свободной составляющей, т.е. процессы, вызванные начальными отклонениями соответствующих координат и их производных, компенсироваться не будут.

Сравнивая (9.9)–(9.11), приходим к выводу, что характеристическое уравнение нескорректированной системы (9.9) и скорректированных систем (9.10), (9.11) одно и то же:

$$D(\lambda) = 1 + W_1(\lambda)W_2(\lambda)W_3(\lambda) = 0, \quad (9.14)$$

т.е. коррекция по внешнему воздействию не изменяет характеристического уравнения системы и соответственно свойств устойчивости (запасов устойчивости), а также ряда других показателей качества переходных процессов.

В силу этого контур управления по отклонению, как правило, используют для придания определенных динамических свойств системе, а контуры коррекции по внешним воздействиям – для обеспечения точности.

Точное выполнение условий инвариантности (9.12), (9.13) практически невозможно из условий физической реализуемости. Действительно, если в (9.12), (9.13) передаточные функции $W_2(s)$, $W_3(s)$ соответствуют физически реализуемым звеньям, т.е. степени полиномов относительно s их числителя меньше степеней знаменателя, то передаточные функции $W_{K_u}(s)$ и $W_{K_f}(s)$, обратные им, будут соответствовать физически нереализуемым звеньям.

Поэтому (9.12), (9.13) выполняются на практике с некоторой погрешностью, в силу чего и инвариантность систем будет неполной, но ошибки в системе с помощью корректирующих устройств по внешнему воздействию могут быть значительно уменьшены.

9.4. Синтез САУ на основе логарифмических частотных характеристик

Общий порядок синтеза системы включает следующие этапы:

1. По виду передаточной функции исходной системы $W_0(s)$ строится ЛАХ исходной системы $L_0(\omega)$. При этом исходная система должна иметь функционально необходимые элементы и должна быть минимально-фазовой.

2. На основании требований к САУ строится желаемая ЛАХ $L_{\text{жс}}(\omega)$.

3. Путем сравнения характеристик $L_{\text{жс}}(\omega)$ и $L_0(\omega)$ определяется $L_K(\omega) = L_{\text{жс}}(\omega) - L_0(\omega)$ (если коррекция последовательная). Эту коррекцию также можно пересчитать к параллельной или встречно-параллельной.

4. По виду $L_K(\omega)$ определяется структурная схема и параметры коррекции.

5. Производится моделирование системы на ЦВМ (например в среде Matlab), уточняются параметры САУ.

6. Производится реализация коррекции с помощью регуляторов или программно.

Построение ЛАХ исходной системы не вызывает затруднений. Рассмотрим подробнее построение желаемой ЛАХ.

Учет требований точности САУ:

а) Пусть даны рабочая частота ω_p и амплитуда u_p задающего воздействия $u(t)$, а также допустимая ошибка $e_{\text{дон}}$.

Так как для низких частот $\Delta e(\omega) \cong \frac{u}{|W(j\omega)|}$, то при $\omega = \omega_p$, $u = u_p$

$W(j\omega) = W(j\omega_p)$. Тогда

$$K_u = |W(j\omega_p)| \geq \frac{u_p}{e_{\text{дон}}} \quad (9.15)$$

б) Пусть даны ω_{max} , u_{max} , $e_{\text{дон}}$. Тогда

$$\omega_p = \frac{u_{\text{max}}}{\omega_{\text{max}}}, \quad u_p = \frac{u_{\text{max}}^2}{\omega_{\text{max}}}, \quad K_u = |W(j\omega_p)| \geq \frac{u_{\text{max}}^2}{\omega_{\text{max}} e_{\text{дон}}} \quad (9.16)$$

в) Пусть для астатической САУ даны $\omega_{\text{max}} = \Omega_{\text{max}}$ и $e_{\text{дон}}$.

Тогда $\Delta e(\omega) = \frac{\omega^v}{K}$ и при $v=1$ $\Delta e(\omega) = \frac{\omega}{K}$ и

$$K_u \geq \frac{\Omega_{\text{max}}}{e_{\text{дон}}} \quad (9.17)$$

С помощью выражений (9.15)–(9.17) строится низкочастотная область $L_{\text{жс}}(\omega)$ (рис. 9.6).

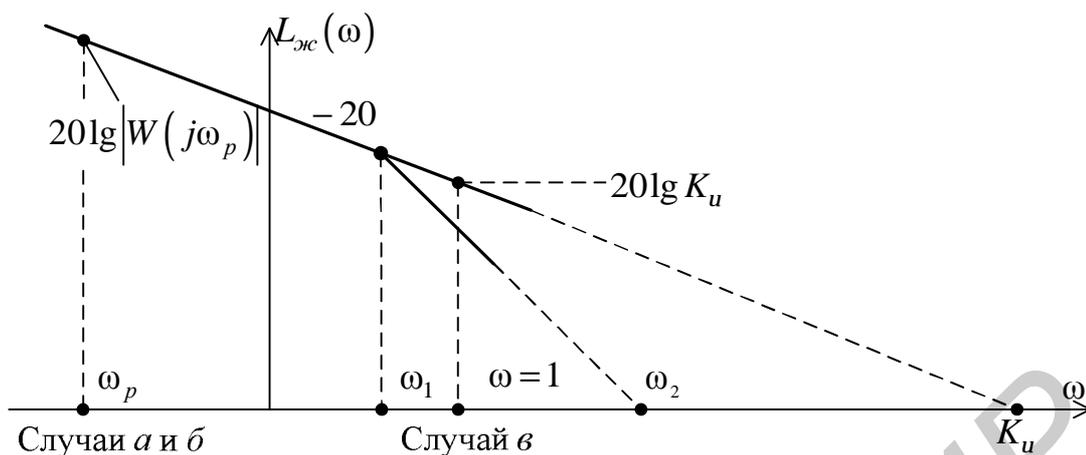


Рис. 9.6

Значение частоты $K_u \left[\frac{1}{c} \right]$ называют добротностью САУ по скорости.

Первый излом $L_{жс}(\omega)$ на частоте ω_1 при однократном изломе (при изменении наклона на -20 дБ/дек) определяется как $\omega_1 = \frac{K_a}{K_u}$, где $K_a = \omega_2^2 = \frac{\Omega_{\max}}{e_{\text{дон}}} \left[\frac{1}{c^2} \right]$

называют добротностью системы по скорости; при двукратном изломе $\omega_1 = 2 \frac{K_a}{K_u}$.

Учет требований качества переходного процесса: t_p , σ , колебательности, запасов устойчивости. Эти показатели учитываются при формировании среднечастотной области $L_{жс}(\omega)$. Здесь можно воспользоваться графиками (рис. 9.7, а, б).

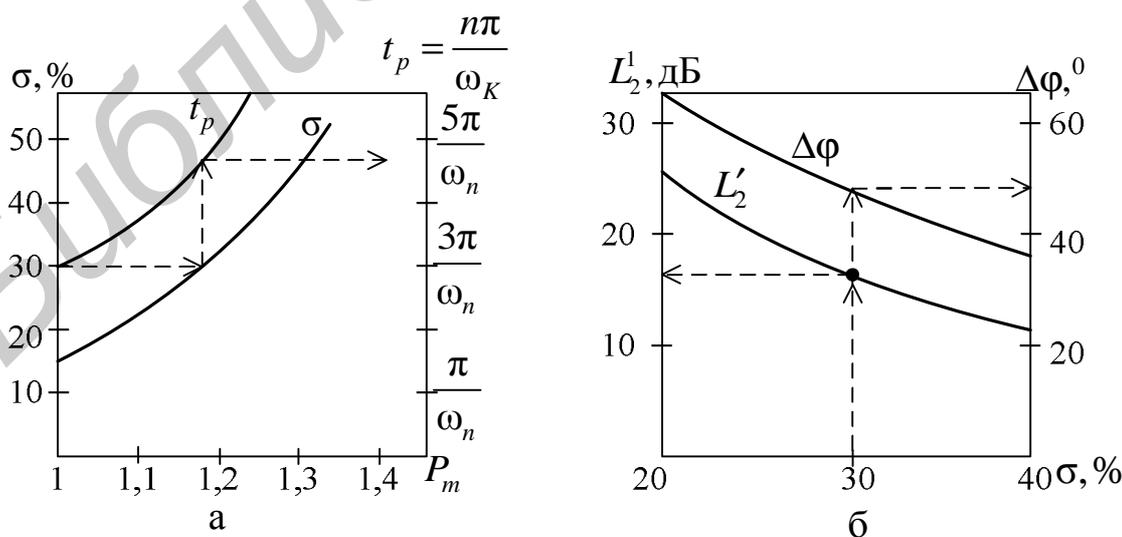


Рис. 9.7

По графику (см. рис. 9.7, а) для заданных значений σ и t_p находят ω_n и затем из соотношения $\omega_c \cong (0,6\mathbf{K}0,9)\omega_n$ частоту среза ω_c .

Например: (как показано на рис. 9.7, а) для $\sigma = 30\%$, $t_p \approx \frac{4,7\pi}{\omega_n}$, откуда для заданного значения t_p (допустим, что оно равно 0,01 с), определяются значения $\omega_n = \frac{4,7\pi}{0,01} = 160 \text{ с}^{-1}$ и $\omega_c \approx 0,8\omega_n \cong 128 \text{ с}^{-1}$.

По графику (см. рис. 9.7, б), где установлены зависимости $\Delta\phi$ от σ и ординат L_1 и L_2 среднечастотной части $L_{жс}(\omega)$ от σ , находят для заданного значения σ необходимые L_1 , L_2 и $\Delta\phi$.

Сопряжение среднечастотного участка с низкочастотным и высокочастотным (рис. 9.8) должно быть таким, чтобы была проще коррекция и изломы, по возможности, были однократными.

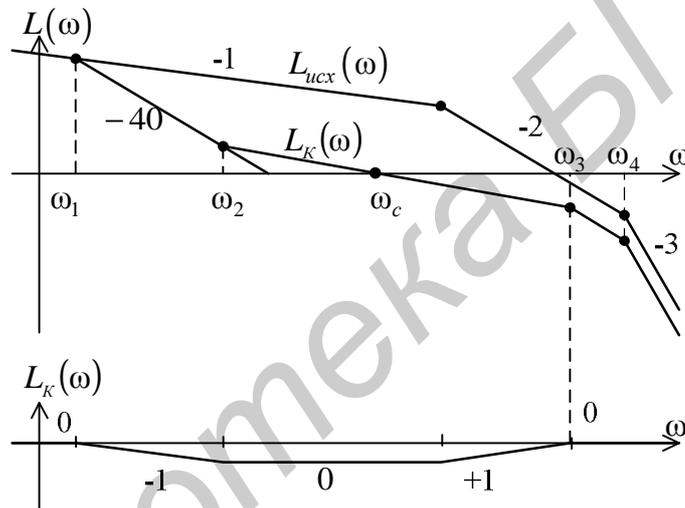


Рис. 9.8

Для облегчения процедуры синтеза коррекции вводятся типовые передаточные функции исходной системы и соответствующие им передаточные функции желаемой системы:

$K_0(s)^*$	$K_{жс}(s)$
$\frac{K_{жс}}{s(Ts+1)}$	$\frac{K_{жс}(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_3s+1)}$
$\frac{K_{жс}}{s(T_1's+1)(T_2's+1)}$	$\frac{K_{жс}(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}$
$\frac{K_{жс}}{s(T_1's+1)(T_2's+1)(T_3's+1)}$	$\frac{K_{жс}(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)(T_5s+1)}$

* $K_0 = K_{жс}$ с учётом требований по точности; $T_1 > T_2 > T_3 > T_4 > T_5$.

Остановимся на коррекции. Вычитая из $L_{\text{жс}}(\omega)$ ординаты $L_0(\omega)$, получим $L_K(\omega)$. Вид ЛАХ коррекции соответствует случаю коррекции с опережением и отставанием по фазе.

Передаточная функция коррекции будет с учётом обеспечения показателей точности иметь вид

$$W_K(s) = K_K \frac{(T_2s + 1)(T_3s + 1)}{(T_1s + 1)(T_4s + 1)}, \quad (9.18)$$

где $T_1 = \frac{1}{\omega_1}$, $T_2 = \frac{1}{\omega_2}$, $T_3 = \frac{1}{\omega_3}$, $T_4 = \frac{1}{\omega_4}$, $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$; $K_K = \frac{K_u}{K_0}$, причём K_0 – коэффициент передачи исходной системы.

Так как реализовать дифференцирующие звенья сложно, переходят к схеме коррекции с использованием интеграторов. Для этого необходимо представить (9.18) в виде

$$W_K(s) = K_K \frac{T_2T_3s^2 + (T_2 + T_3)s + 1}{T_1T_4s^2 + (T_1 + T_4)s + 1} = \frac{K_K}{T_1T_4} \frac{T_2T_3s^2 + (T_2 + T_3)s + 1}{s^2 + \frac{T_1 + T_4}{T_1T_4}s + \frac{1}{T_1T_4}}.$$

Схема реализации коррекции представлена на рис. 9.9.

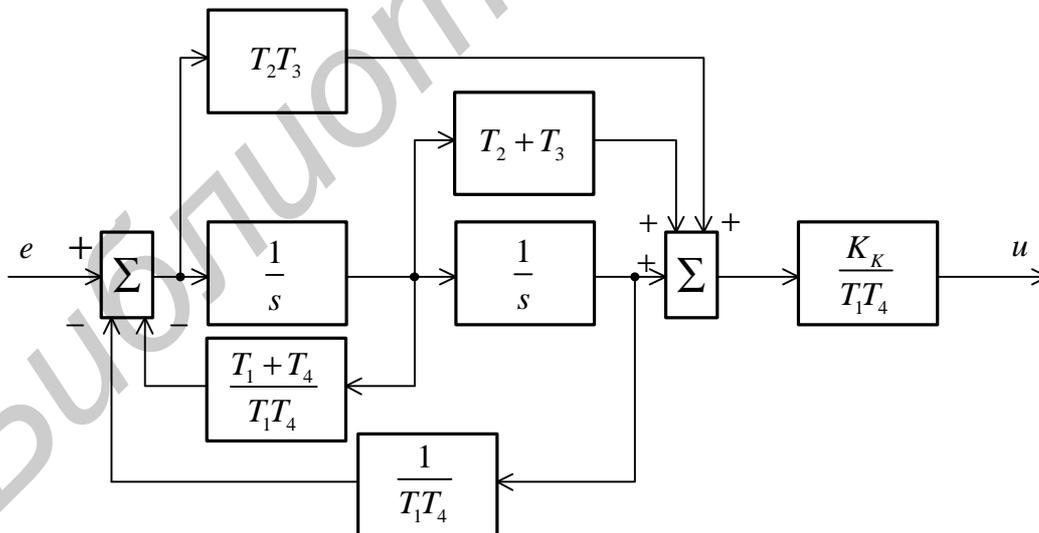


Рис. 9.9

9.5. Модальный метод синтеза (метод размещения полюсов)

Рассмотрим САУ с одним входом и одним выходом, будем считать $u = 0$. Пусть модель объекта имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (9.19)$$

При этом методе синтеза [6] закон управления выражается формулой

$$u = -Kx, \quad (9.20)$$

где K – вектор коэффициентов $[k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]$.

Структура замкнутой САУ приведена на рис. 9.10.

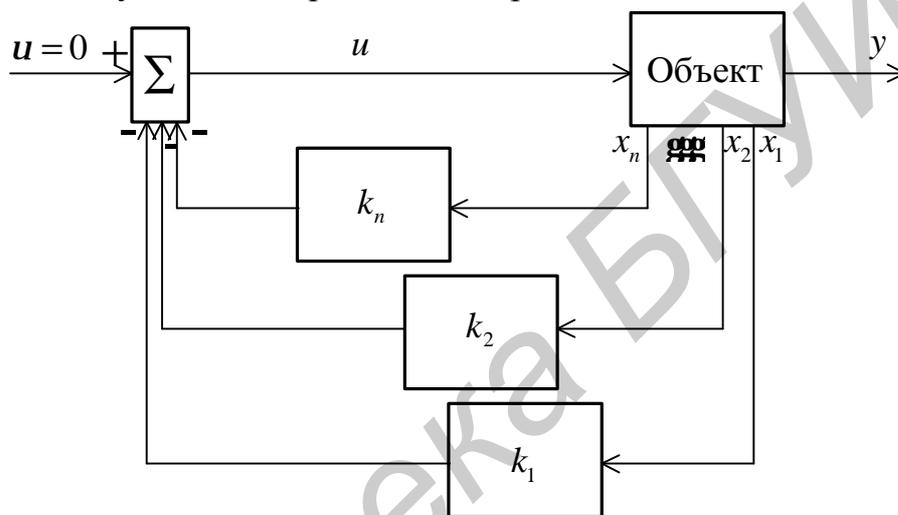


Рис. 9.10

Так как $u = 0$, то назначение САУ поддерживать значение $y = 0$. Такую САУ называют регулятором состояния.

Рассмотрим пример спутника (рис. 9.11) с передаточной функцией $\frac{1}{s^2}$ [6].

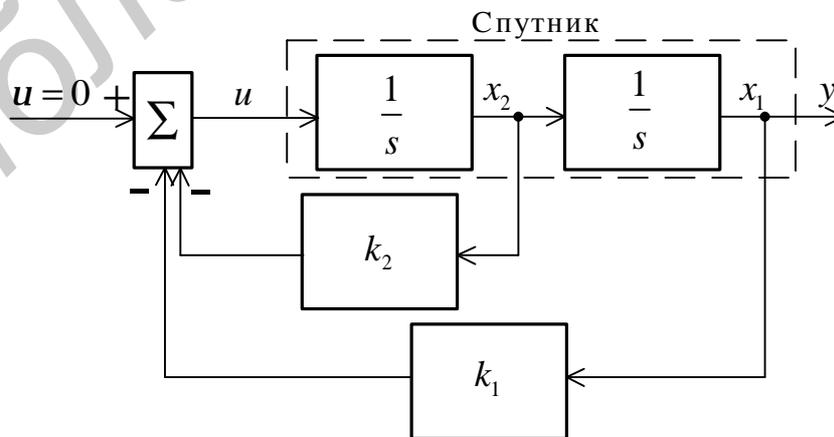


Рис. 9.11

Модель объекта (спутника) будет иметь вид

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = x_2 \\ \mathbf{x}_2 = u \end{cases} \text{ или } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Для замкнутой САУ, где $u = -Kx$, имеем

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = x_2 \\ \mathbf{x}_2 = -k_1 x_1 - k_2 x_2 \end{cases} \text{ или } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x = A_3 x, \quad (9.21)$$

где A_3 – матрица коэффициентов замкнутой САУ.

Характеристическое уравнение замкнутой САУ имеет вид

$$|\lambda E - A_3| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ k_1 & \lambda + k_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + k_2 \lambda + k_1 = 0. \quad (9.22)$$

Пусть корни его будут $-\lambda_1$ и $-\lambda_2$, тогда характеристическое уравнение желаемой замкнутой системы имеет вид

$$D_{жс}(\lambda) = \lambda^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2 = 0. \quad (9.23)$$

Синтез системы заключается в выборе k_1 и k_2 в (9.22), которые бы соответствовали коэффициентам уравнения (9.23), т.е.

$$\begin{aligned} k_1 &= \lambda_1 \lambda_2, \\ k_2 &= \lambda_1 + \lambda_2. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Рассмотрим общий принцип синтеза САУ.

Пусть

$$\mathbf{x} = Ax + Bu, \quad (9.25)$$

$$u = -Kx, \quad K = [k_1 \ k_2 \ \mathbf{K} \ k_n]. \quad (9.26)$$

Подставляя (9.26) в (9.25), получим

$$\mathbf{x} = Ax - BKx = (A - BK)x = A_3 x. \quad (9.27)$$

Характеристическое уравнение замкнутой САУ имеет вид

$$|\lambda E - A_3| = |\lambda E - A + BK| = 0. \quad (9.28)$$

Если корни $-\lambda_1, -\lambda_2, \mathbf{K}, -\lambda_n$, то желаемое характеристическое уравнение замкнутой САУ будет иметь вид

$$D_{жс}(\lambda) = (\lambda + \lambda_1)(\lambda + \lambda_2)\mathbf{K}(\lambda + \lambda_n) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \mathbf{K} + \alpha_n = 0. \quad (9.29)$$

Приравнявая (9.28) и (9.29), имеем

Последняя система представляет собой общее решение задачи синтеза путём размещения полюсов для САУ с одним входом и одним выходом, но для этого исходная модель САУ должна быть в нормальной форме (матрица A – фробениусова).

Аккерман предложил формулу, которая позволяет перейти от произвольной формы уравнений состояния к нормальной, затем найти k_i , а потом перейти к исходной структуре.

Формула Аккермана имеет вид

$$K = [0 \ 0 \ \mathbf{K} \ 0 \ 1] [B \ AB \ \mathbf{K} \ A^{n-2}B \ A^{n-1}B]^{-1} D_{жс}(A), \quad (9.34)$$

где $D_{жс}(A)$ – матричный полином, образованный путём использования коэффициентов желаемого характеристического уравнения

$$D_{жс}(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \mathbf{K} + \alpha_{n-1} A + \alpha_n E. \quad (9.35)$$

Последние выражения (при $n > 3$) рассчитываются на компьютере.

Пример 9.3. Для спутника $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$; характеристическое уравнение

$$D_{жс}(\lambda) = \lambda^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0.$$

Используем формулу Аккермана. Определим $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, затем

$[B \ AB]^{-1} = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Образует матричный полином

$$\begin{aligned} D_{жс}(A) &= A^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)A + \lambda_1\lambda_2 E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (\lambda_1 + \lambda_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_1\lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 & \lambda_1\lambda_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

По формуле Аккермана $K = [0 \ 1] [B \ AB]^{-1} D_{жс}(A) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 & \lambda_1\lambda_2 \end{bmatrix} =$
 $= [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix} = [\lambda_1\lambda_2 \ \lambda_1 + \lambda_2]$. Как видим, результаты совпали с (9.24).

Остановимся на вопросе формирования полюсов передаточной функции замкнутой САУ, исходя из заданных показателей качества на основе корневых оценок.

Определим границу расположения желаемых полюсов (корней) САУ. Исходя из заданного времени переходного процесса t_p , в силу (7.4) находим

$\eta \geq \frac{3}{t_p}$, если ближайший к мнимой оси корень вещественный и $\sigma = 0$.

Угол сектора комплексных корней связан с перерегулированием в силу (7.6) соотношением $\sigma = 100e^{-\frac{\pi}{\mu}}$, где $\mu = \frac{\beta}{\eta} = \text{tg}\alpha$, если ближайшая к мнимой оси – пара комплексных сопряжённых корней и $\sigma > 0$.

Из соотношения $\sigma = 100e^{-\frac{\pi}{\text{tg}\alpha}}$ следует

$$\text{tg}\alpha = \frac{\beta}{\eta} = \frac{\pi}{\ln \frac{100}{\sigma}}. \quad (9.36)$$

Пример 9.4. Рассмотрим оба случая для САУ из предыдущего примера.

1. Если $\sigma = 0$ (ближайший корень – вещественный) и $t_p = 16$ с, то $\eta \geq 3$.

Возьмём оба корня вещественных: $-\lambda_1 = -\lambda_2 = -4$. Тогда $D_{ж}(\lambda) = (\lambda + 4)^2 = \lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$; $k_1 = \lambda_1\lambda_2 = 16$; $k_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = 8$.

2. Пусть $\sigma \approx 37\%$, а $t_p = 1$ с, т.е. $\eta = 4$. Тогда $\text{tg}\alpha = \frac{\beta}{\eta} = \frac{\pi}{\ln \frac{100}{37}} \approx \pi = 3,14$.

При $\eta = 4$ значение $\beta = 3,14 \cdot 4 \approx 12,5$; $-\lambda_1 = -4 + j12,5$, $-\lambda_2 = -4 - j12,5$.

$$k_1 = \lambda_1\lambda_2 = (4 + j12,5)(4 - j12,5) = 16 + 156 = 172.$$

$$k_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = 4 + j12,5 + 4 - j12,5 = 8.$$

Примечание. При определении полюсов не следует чрезмерно увеличивать $|\text{Re } \lambda_i|$, так как при этом увеличиваются значения k_i , а для повышения реакции инерционных объектов надо на их вход подавать большие сигналы, что может привести к насыщению элементов и сделать САУ нелинейной [6].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Преобразование Лапласа и его свойства

Область оригиналов $f(t) = L^{-1}[F(s)]$	Область изображений $F(s) = L[f(t)]$
$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) = \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} f^{(i)}(0)$
$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{F(s)}{s}$
$\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)$	$\sum_{i=0}^n a_i F_i(s)$
$f(t - \tau)$	$e^{-s\tau} F(s)$
$e^{-\alpha t} f(t)$	$F(s + \alpha)$
$\int_0^t f_1(t - \lambda) f_2(\lambda) d\lambda$	$F_1(s) F_2(s)$
$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
$\delta(t)$	1
$1[t]$	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{s(s + \alpha)}$
$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$
$\cos \alpha t$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов, В. П. Линейные непрерывные системы : тексты лекций по курсу «Теория автоматического управления» для студ. спец. «Автоматика и управление в технических системах» / В. П. Кузнецов. – Минск : МРТИ, 1995.
2. Востриков, А. С. Теория автоматического управления : учеб. пособие для вузов / А. С. Востриков, Г. А. Французова. – М. : Высш. шк., 2004.
3. Ерофеев, А. А. Теория автоматического управления : учебник для вузов / А. А. Ерофеев. – СПб. : Политехника, 2003.
4. Теория автоматического управления. В 2 ч. / под ред. А. А. Воронова. – М. : Высш. шк., 1986.
5. Бесекерский, В. А. Теория автоматического управления / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – СПб. : Профессия, 2004.
6. Филипс, Ч. Системы управления с обратной связью / Ч. Филипс, Р. Харбор. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2001.
7. Электронный учебно-методический комплекс по дисц. «Теория автоматического управления». Ч. 1: Линейные непрерывные системы / А. Т. Доманов [и др.]. – Минск : БГУИР, 2006.
8. Андриевский, Б. Р. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков. – СПб. : Наука, 1999.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Общие сведения о системах автоматического управления	5
1.1. Основные понятия и определения	5
1.2. Классификация систем автоматического управления	7
1.3. Примеры систем автоматического управления	9
2. Математическое описание звеньев систем автоматического управления.....	11
2.1. Уравнения звеньев.....	11
2.2. Линеаризация уравнений динамики звеньев.....	13
2.3. Передаточная функция и временные характеристики звеньев.....	15
2.4. Частотные характеристики звеньев.....	17
2.5. Элементарные звенья и их характеристики.....	20
2.6. Особенности и физическая реализуемость звеньев.....	26
3. Математическое описание систем автоматического управления	27
3.1. Структурные схемы и структурные преобразования.....	27
3.2. Передаточные функции и уравнения систем.....	31
3.3. Частотные характеристики систем.....	34
4. Процессы в системах автоматического управления.....	36
4.1. Общее описание процессов.....	36
4.2. Аналитические методы вычисления процессов.....	39
4.3. Моделирование переходных процессов на ПЭВМ.....	43
5. Устойчивость процессов в системах автоматического управления....	45
5.1. Понятие устойчивости линейных систем.....	45
5.2. Алгебраические критерии устойчивости.....	47
5.3. Критерий устойчивости Михайлова.....	50
5.4. Критерий устойчивости Найквиста.....	53
5.5. Построение областей устойчивости.....	57
6. Точность систем автоматического управления.....	60
6.1. Понятие точности. Постоянные ошибки.....	60
6.2. Установившиеся ошибки при произвольном входном сигнале.....	63
6.3. Установившиеся ошибки при гармоническом воздействии.....	66
7. Оценки качества переходных процессов.....	68
7.1. Корневые оценки качества.....	69
7.2. Интегральные оценки качества.....	73
7.3. Частотные оценки качества.....	76
8. Уравнения состояния линейных систем.....	82
8.1. Описание систем управления с помощью уравнений состояния... ..	82
8.2. Схемы моделирования и виды уравнений состояния.....	84
8.3. Преобразование уравнений состояния.....	87
8.4. Нормальная форма уравнений состояния одномерной системы... ..	90
8.5. Каноническая форма уравнений состояния одномерной системы.....	93
8.6. Переходная матрица состояния.....	95

8.7. Передаточная и весовая матрицы.....	98
8.8. Устойчивость, управляемость и наблюдаемость линейных систем.	99
9. Синтез систем автоматического управления.....	105
9.1. Предварительные замечания.....	105
9.2. Корректирующие устройства.....	106
9.2.1. Последовательные корректирующие устройства.....	108
9.2.2. Параллельные корректирующие устройства.....	111
9.2.3. Встречно-параллельные корректирующие устройства.....	113
9.3. Корректирующие устройства по внешнему воздействию.....	115
9.4. Синтез САУ на основе логарифмических частотных характеристик.	118
9.5. Модальный метод синтеза (метод размещения полюсов).....	122
Приложение.....	128
Литература.....	129

Библиотека БГУИР

Учебное издание

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

В 2-х частях

Кузнецов Владимир Петрович
Лукьянец Степан Валерьянович
Крупская Марина Александровна

Часть 1

Линейные непрерывные системы

Редактор Т. П. Андрейченко
Корректор М. В. Тезина

Подписано в печать
Гарнитура «Таймс».
Уч.-изд.л. 8,0.

Формат 60×84 1/16.
Печать ризографическая.
Тираж 200 экз.

Бумага офсетная.
Усл. печ. л. .
Заказ 259.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ № 02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП № 02330/0131666 от 30.04.2004.
220013, Минск, П.Бровки, 6