О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

П. А. Желток
Кафедра веб-технологий и компьютреного моделирования, Белорусский государственный университет
Минск, Республика Беларусь
E-mail: pavelzheltok@gmail.com

В работе рассматривается приближенное решение характеристического СИУ второго рода с постоянными коэффициентами в различных классах функций по Мусхелишвили. Предварительно получены разложения характеристического оператора по многочленам Чебышева. На их основании построены вычислительные схемы приближенного решения характеристического СИУ в разных классах функций. Вычислительные схемы запрограммированы в виде стандартных модулей в СКМ Wolfram Mathematica. Проверена их эффективность на модельных примерах и отражена погрешность в виде графиков и таблиц.

Сингулярные интегральные уравнения (СИУ) широко применяются в механике и других вопросах естествознания.

Теория сингулярных интегральных уравнений изложена в [1] – [3].

Рассматривается характеристическое сингулярное интегральное уравнение второго рода:

$$a\varphi(x) + \frac{b}{\pi i}\int_{-1}^{1}\varphi(t)\frac{dt}{t-x} = f(x), \qquad (1)$$

$$-1 < x < 1,$$

где a и b – заданные комплекснозначные числа, $f(x)$ – заданная гельдеровская фукция, $\varphi(x)$ – неизвестная гельдеровская функция.

Согласно [3] в (1) перейдем к новой неизвестной функции $u(x)$ по правилу:

$$\varphi(x) = \frac{p(x)\,u(x)}{a^2 - b^2},$$

где

$$p(x) = (x-1)^{\alpha}(x+1)^{\beta},$$

α, β известным образом выражаются через коэффициенты уравнения (1) в зависимости от класса функций по Мусхелишвили, в котором разыскивается решение. Уравнение (1) примет вид:

$$K^0(u(x);x) \equiv$$

$$\equiv Ap(x)\,u(x) + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}Bp(t)\,u(t)\frac{dt}{t-x} = f(x), \quad (2)$$

$$A = \frac{a}{a^2 - b^2},$$

$$B = \frac{b}{a^2 - b^2}.$$

В [3] получены спректральные соотношения для характеристического оператора $K^0(x^k;x)$, которые показывают, что степенная функция оператором K^0 переводится в многочлен с коэффициентами, вычисляемыми известным образом через коэффициенты A и B.

В [4] получены разложения характеристического оператора K^0 для СИУ с произвольными коэффициентами по многочленам Чебышева. На их основании получены разложения в законченном виде оператора (2), имеющие вид:

$$K^0(P^{(\nu)}_{k-(\alpha+\beta)};x) =$$

$$= \gamma_0^{(k)}P_0^{(\mu)} + \gamma_1^{(k)}P_1^{(\mu)} + \ldots + \gamma_k^{(k)}P_k^{(\mu)}, \quad (3)$$

где $P_i^{(\nu)}, P_j^{(\mu)}$ – многочлены Чебышева первого или второго рода, $|\mu| = |\nu| = 1/2$.

Эти разложения позволяют построить численное решение СИУ второго рода с постоянными коэффициентами

Вычислительная схема получается на основании интерполирования функции $f(x)$ многочленами Чебышева первого или второго рода $(f_n(x))$ и точного решения приближенного уравнения

$$K^0(u_{n-(\alpha+\beta)}(x);x) = f_n(x),$$

где

$$u_{n-(\alpha+\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x)$$

или

$$u_{n-(\alpha+\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k U_k(x).$$

Следует отметить, что так как решение зависит от класса функций по Мусхелишвили, то в классах неограниченных функций для численного решения СИУ ставится задача единственности.

Используя (3), построены 16 вычислительных схем численного решения уравнения (2) в четырех разных классах функций по Мусхелишвили.

Библиотека БГУИР

В системе компьютерной математики Wolfram Mathematica данные вычислительные схемы представлены в виде стандартных модулей:

- **класс 1** (в окрестности точек $x = \pm 1$ допускается интегрируемая особенность). Для решения в этом классе построены модули: SIESecondAlfa1, SIESecondGamma1, SIESecondEta1, SIESecondRho1;
- **класс 2** (искомое решение ограничено вблизи точек $x = \pm 1$). Для решения в этом классе построены модули: SIESecondBeta2, SIESecondDelta2, SIESecondMu2, SIESecondSigma2;
- **класс 3** (интегрируемая неограниченность в окрестности точки $x = 1$). Для решения в этом классе построены модули: SIESecondAlfa3, SIESecondGamma3, SIESecondEta3, SIESecondRho3;
- **класс 4** (интегрируемая неограниченность в окрестности точки $x = -1$). Для решения в этом классе построены модули: SIESecondAlfa4, SIESecondGamma4, SIESecondEta4, SIESecondRho4.

Ключевое значение играет класс функций, в котором ищется решение. Вид схемы, применяемый при решении в рамках одного класса может быть любой.

Прототип модуля **для класса 1** имеет вид:

SIESecondNAME [a, b, f, alpha , NN, X].

Параметры:

a, b – комплекснозначные коэффициенты уравнения (1);

f – функция правой части уравнения;

alpha - условие единственности;

NN – количество узлов интерполирования;

X – массив точек-аргументов, в которых ищется решение.

Прототип модуля **для класса 2, класса 3** и **класса 4** имеет вид:

SIESecondNAME [a, b, f, NN, X].

В качестве результата работы модуль возвращает приближенное решение сингулярного интегрального уравнения второго рода с постоянными коэффициентами в заданном массиве точек-аргументов.

Стандартные модули были протестированы на модельных примерах в четырех разных классах функций и с различным числом узлов интерполирования.

Например, рассмотрим использование указанных модулей в системе Wolfram Mathematica на конкретном примере.

Пусть $v = \pi/4(1-i)$, $a = \cos v$, $b = -i \sin v$, $f(x) = \frac{3^{\frac{3}{4}+\frac{i}{4}}}{x-2}$ и решение ищется в третьем классе функций.

В системе Wolfram Mathematica задаются параметры:

```
X = Table[-0.99 + i*0.01, {i, 0, 198}];
(*Задаем функцию f и параметры a и b*)
cz = 3^(3/4 + i/4);
n = 10;
f[x_] = cz/(x - 2);
v = π/4 (1 - i);
a = Cos[v];
b = -i Sin[v];
(*Вызываем модуль*)
Solution = SIESecondAlfa3[a, b, f, n, X];
```

В виде массива возвращается результат.

Полученная погрешность отображена в виде таблиц и графиков:

Таблица абсолютных погрешностей для функции ϕ_n (Error_ϕ) при различных значениях параметра n

n	8	10	15	25
Error_ϕ	4.3×10^{-4}	3.2×10^{-5}	3.9×10^{-8}	2.9×10^{-13}

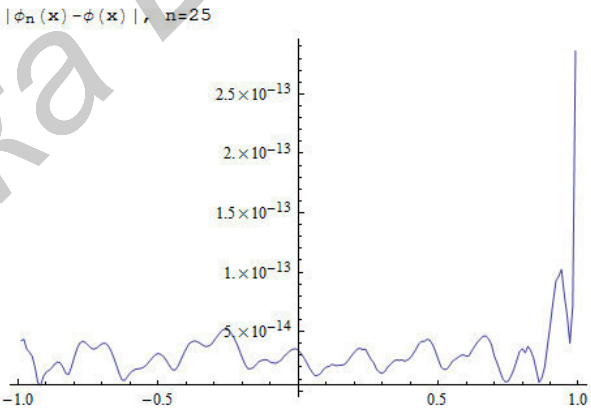

Рис. 1 – представление погрешности в виде графика

Следует отметить, что в систмах компьютерной математики (Wolfram Mathematica, Matlab, MathCAD) нет встроенных спедств для решения интегральных уравнений, в том числе и сингулярных.

Список литературы

1. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – Москва: Наука, 1977.
2. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – М., 1968.
3. Шешко, М. А. Сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши и Гильберта и их приближенное решение / М. А. Шешко. – Люблин, 2003.
4. Расолько, Г. А. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши методом ортогональных многочленов [Электронный ресурс] / Г .А. Расолько. – Минск: БГУ, 2015. – 262 с. http://elib.bsu.by/handle/123456789/118113

Библиотека БГУИР