МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Дайнеко Е. Н.

Жавнерчик В. Э. – канд. физ.- мат. наук, доцент

Тот, кто хочет решать вопросы естественных наук без помощи математики, ставит неразрешимую задачу. Следует измерять то, что измеримо, и делать измеримым то, что таковым не является.
Г. Галилей

Современную науку невозможно представить без широкого применения математического моделирования. Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта его «образом» – математической моделью – и дальнейшем изучении модели с помощью реализуемых на компьютерах вычислительно-логических алгоритмов.

Недавно, 26 марта 2013 года в журнале «SIAM Journal on Applied Dynamical Systems» была опубликована статья, в которой была представлена математическая модель, позволяющая изучать процесс распространения инновационных технологий среди людей, связанных между собой сетью, в которой все имеют равноценное влияние, как например, реальное сообщество или жители пригорода. Одной из мотиваций этого исследования (моделирование эффекта социальных сообществ на принятие энергетических технологий) было помочь сократить потребление энергии в городах, где потребляется свыше 66% энергии, производимой в мире, и выпускается более 70% мировых выбросов углекислого газа.

Другим примером математического моделирования является внедрение математики в геологию и практику геологоразведочных работ, которое подняло научные и практические исследования в этой области на новый качественный уровень. В настоящее время для решения задач прогнозирования, поисков, разведки и оценки месторождений полезных ископаемых, используется широкий спектр математических методов, среди которых основными являются методы теории вероятностей и математической статистики. При решении задач геоэкологии используется статистический анализ данных, корреляционный анализ для выявления взаимосвязей между географическими объектами, регрессионный анализ и методы интерполяции для прогнозирования развития тех или иных природных процессов.

В качестве примера математического моделирования экономической задачи рассмотрим процесс роста выпуска продукции. Предположим, что цена продукции *P* фиксированная. Обозначим через $Q(t)$ количество продукции, реализованной на момент времени t. Тогда $PQ(t)$ – доход на этот момент времени. $I(t) = mPQ(t)$ – инвестиции в производство, $0 < m < 1$. Если исходить из предположения о ненасыщаемости рынка или о полной реализации производимой продукции, то в результате расширения производства будет получен прирост дохода, часть которого опять будет использована для расширения выпуска продукции. Это приведет к росту скорости выпуска (акселерации), причем скорость выпуска пропорциональна увеличению инвестиций, то есть $Q' = II$, где $1/I$ – норма акселерации. Если обозначить $k = ImP$, то $Q' = kQ(t)$. Общим решением этого дифференциального уравнения будет $Q = Ce^{kt}$, учитывая начальные параметры, получим $Q = Q_0 e^{k(t-t_0)}$. Это и есть искомая математическая модель.

Следует заметить, что математические модели обладают свойством общности. Так, из результатов биологических опытов следует, что процесс размножения бактерий также описывается дифференциальным уравнением $Q' = kQ(t)$. Процесс радиоактивного распада подчиняется закономерности $Q = Q_0 e^{k(t-t_0)}$.

Одним из примеров математического моделирования в астрономии является разработка учеными математической модели слияния черных дыр. Астроном Келли Холи–Бокелман представила результаты моделирования на собрании Американского Астрономического Сообщества 9 января 2008 года. Если предложенная модель корректна, то в Млечном Пути блуждают тысячи черных дыр, массой в тысячи солнечных каждая.

Вывод одной из исследовательских работ в области энергетики имеет следующий вид:

«В результате проведенного моделирования погрешность по температурному полю металла составляет 3 – 5%, по температурному полю кладки 5 – 7%, поэтому можно сказать, что построенная математическая модель печи в полной мере отражает теплообменные процессы, происходящие в реальном объекте, и может быть рекомендована к использованию на практике для разработки режимов работы камерной нагревательной печи кузнечного производства при изменении тепловых, гидродинамических, теплофизических и конструктивных особенностей установки. Также можно проводить расчетные исследования конструктивных и режимных параметров работы печи. Математическое моделирование и анализ позволили избежать дорогостоящих и длительных циклов разработки типа «проектирование – изготовление – испытания».

Технические, экологические, экономические и иные системы, изучаемые современной наукой, больше не поддаются исследованию (в нужной полноте и точности) обычными теоретическими методами. Прямой натурный эксперимент над ними долог, дорог, часто либо опасен, либо попросту невозможен, так как многие из этих систем существуют в «единственном экземпляре». Цена ошибок и просчетов в обращении с ними недопустимо высока. Поэтому математическое моделирование является неизбежной составляющей научно-технического прогресса.

Список использованных источников:

1. Красс, М. С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов / Учебник. – М.: Дело, 2001. – 688 с.
2. Материалы МНТК ЭНЕРГИЯ. – 2012.
3. Чесалин, В. И. Роль математического моделирования при изучении высшей математики студентами геофака БГУ заочной формы обучения [Электронный ресурс]. – Электронные данные. – Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/10403. – Дата доступа 23.03.2013.
4. Инновационные исследования; причина принятия неверных решений [Электронный ресурс]. – Электронные данные. – Режим доступа: http://innoros.ru/news/foreign. – Дата доступа 23.03.2013.
5 Математическая модель слияния чёрных дыр [Электронный ресурс]. – Электронные данные. – Режим доступа: http://it-day.ru/blog/archives/625. – Дата доступа 23.03.2013.

A LOCAL CONSTRUCTION OF RIEMANNIAN METRIC

Belorusian State University of Informatics and Radioelectronics
Minsk, Belarus

Ermolitski A.A., Rusetski V.A.

Ermolitski A.A. - docent

A local construction of a Riemannian metric on a smooth manifold is given by the following theorem

Theorem. Let (M, g) be a Riemannian manifold and x_1, …, x_n be coordinates is some coordinate neighborhood $U \subset M$. There exists a smooth function u: $U \to \boldsymbol{R}$ that $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ on U.

Proof. We consider a Riemannian manifold (M, g) as a totally geodesic subanifold of the Kaehlerian manifold $Tb\left(M, \frac{\varepsilon(p)}{2}, \overline{J} = J_1, \overline{g}\right)$ (see theorem 3 in **[1]**) then $\overline{g}\,|_M = g$.

Let x_1, …, x_n be coordinates in some coordinate neighborhood $U \subset M$ and $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ be the corresponding vector fields. We can choose a neighborhood $\overline{U} = U \times D = \bigcup_{p \in U} D(p; \varepsilon) \subset Tb\left(M, \frac{\varepsilon(p)}{2}\right)$ where $\varepsilon \leq \frac{\varepsilon(p)}{2}$ for every point $p \in U$. It is easy to see that $U \times D$ is a Riemannian product with respect the metric $\overline{g}$. For every point $x \in \overline{U}$ where $\pi(x) = p$ we denote $Y_{jx} = \overline{J}\frac{\partial}{\partial x_{jx}}$, $j = \overline{1, n}$ and the vector fieds Y_j define the coordinates y_1, …, y_n on $D_{(p;\varepsilon)}$ hence $Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j}$ is tangent to $D_{(p;\varepsilon)}$ for $j = \overline{1, n}$.

So, $\overline{U}$ is an coordinate neighborhood of the Kaehlerian manifold $\left(Tb\left(M, \frac{\varepsilon(p)}{2}\right), \overline{J}, \overline{g}\right)$, with complex coordinates $z_j = x_j + i y_j$, $j = \overline{1, n}$, $i^2 = -1$, and the vector fields $\frac{\partial}{\partial z_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right), \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right), \alpha, \beta = \overline{1, n}$. It is known **[2]** that the Kaehlerian metric $\overline{g}^c$ has on $\overline{U}$ the following decomposition