$$ds^2 = 2\sum_{\alpha,\beta} \bar{g}^c_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha d\bar{z}^\beta,\ \bar{g}^c_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 u}{dz_\alpha d\bar{z}_\beta},$$

where u is a real-valued function on $\overline{U}$.

We have

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} = \frac{1}{4}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} - i\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial y_\beta}\right)\right\} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_\alpha \partial \bar{z}_\beta} = \frac{1}{4}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} + i\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial y_\beta}\right)\right\} = 0.$$

It follows that

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{\partial^2 u}{\partial y_\alpha \partial y_\beta},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial y_\beta} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y_\alpha \partial x_\beta}.$$

Further, we obtain

$$\bar{g}^c_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} = \frac{1}{4}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} + i\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial y_\beta} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_\alpha \partial x_\beta}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + i\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial y_\beta}\right),$$

$$\bar{g}^c_{\bar{\alpha}\beta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_\alpha \partial z_\beta} = \frac{1}{4}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} - i\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial y_\beta} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_\alpha \partial x_\beta}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - i\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial y_\beta}\right).$$

Finally, we get

$$\bar{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\beta}\right) = \frac{1}{2} Re\bar{g}^c\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\beta}\right) = \frac{1}{2} Re\bar{g}^c\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha} + \frac{\partial}{\partial z_\beta}, \frac{\partial}{\partial z_\beta} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\right) = Re\left(\bar{g}^c_{\alpha\beta} + \bar{g}^c_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + \right.$$

$$\left. + \bar{g}^c_{\alpha\bar{\beta}} + \bar{g}^c_{\bar{\alpha}\beta}\right) = Re\left(\bar{g}^c_{\alpha\bar{\beta}} + \bar{g}^c_{\bar{\alpha}\beta}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial y\beta}.$$

We can consider the restriction of $\bar{g}$ and the function u on the neighborhood U. So, we have obtained the theorem above.

References

1. A.A. Ermolitski, *Deformations of structures, embedding of a Riemannian manifold in a Kaehlerian one and geometric antigravitation* // Banach Center Publicantions. – Warszawa. – 2007 – V76 – P.505–514.
2. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of differential geometry*// V. 2. - , New York: Wiley. - 1969.

ФРАКТАЛЫ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Козырь И. Ю.

Ламчановская М. В. – ст. преподаватель

Фракталы широко применяются в физике, биологии, в компьютерной графике для построения изображений природных объектов, таких, как деревья, кусты, горные ландшафты, поверхности морей

Фрактал (лат. fractus – дробленый, сломанный, разбитый) – сложная геометрическая фигура, обладающая свойством самоподобия, то есть составленная из нескольких частей, каждая из которых подобна всей фигуре целиком. В более широком смысле под фракталами понимают множества точек в евклидовом пространстве, имеющие дробную метрическую размерность (в смысле Минковского или Хаусдорфа), либо метрическую размерность, строго большую топологической. Каждый фрагмент фрактала повторяется при уменьшении масштаба.

Термин «фрактал» был введён Бенуа Мандельбротом в 1975 г. и получил широкую популярность с выходом в 1977 году его книги «Фрактальная геометрия природы».

Классификация:

алгебраические фракталы (множество Мандельброта, множество Жюлиа, бассейны (фракталы) Ньютона, биоморфы);

геометрические фракталы (кривая Коха, кривая Леви, кривая Гильберта, ломаная дракона (Фрактал Хартера-Хейтуэя), множество Кантора, треугольник Серпинского, ковер Серпинского, дерево Пифагора);

стохастические фракталы;

рукотворные фракталы;

природные фракталы (бронхиальное дерево, сеть кровеносных сосудов, деревья);

детерминированные фракталы;

недетерминированные фракталы.

Фракталы, особенно на плоскости, популярны благодаря сочетанию красоты с простотой построения при помощи компьютера.

Применение фракталов:

естественные науки

В физике фракталы естественным образом возникают при моделировании нелинейных процессов, таких, как турбулентное течение жидкости, сложные процессы диффузии-адсорбции, пламя, облака и т. п. Фракталы используются при моделировании пористых материалов, например, в нефтехимии. В биологии они применяются для моделирования популяций и для описания систем внутренних органов (система кровеносных сосудов).

радиотехника (фрактальные антенны)

Использование фрактальной геометрии при проектировании антенных устройств было впервые применено американским инженером Натаном Коэном, который тогда жил в центре Бостона, где была запрещена установка внешних антенн на здания. Натан вырезал из алюминиевой фольги фигуру в форме кривой Коха и наклеил её на лист бумаги, затем присоединил к приёмнику.

информатика

сжатие изображений

Существуют алгоритмы сжатия изображения с помощью фракталов. Они основаны на идее о том, что вместо самого изображения можно хранить сжимающее отображение, для которого это изображение (или некоторое близкое к нему) является неподвижной точкой. Один из вариантов данного алгоритма был использован фирмой Microsoft при издании своей энциклопедии, но большого распространения эти алгоритмы не получили.

компьютерная графика

Фракталы широко примененяются в компьютерных играх, где рельефы местности зачастую являются фрактальными изображениями на основе трёхмерных моделей комплексных множеств и броуновского движения.

децентрализованные сети

Система назначения IP-адресов в сети Netsukuku использует принцип фрактального сжатия информации для компактного сохранения информации об узлах сети. Каждый узел сети Netsukuku хранит всего 4 Кб информации о состоянии соседних узлов, при этом любой новый узел подключается к общей сети без необходимости в центральном регулировании раздачи IP-адресов, что, например, характерно для сети Интернет. Таким образом, принцип фрактального сжатия информации гарантирует полностью децентрализованную, а следовательно, максимально устойчивую работу всей сети.

Разработана программа, позволяющая наглядно просматривать изображения фрактальной графики и сохранять фрактальные изображения в файл.

В ходе разработки программы были использованы графические средства среды разработки Borland Delphi и возможности языка Object Pascal.

Программа может использоваться на занятиях по математике либо информатике, как наглядная демонстрация фракталов.

Список использованных источников:

1. Мандельброт Б.Б., Фракталы и хаос.. Множество Мандельброта и другие чудеса. – М. – Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2009. – 392 с.
2. Морозов А.Д., Введение в теорию фракталов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 160 с.
3. Шупрута В.В., Delphi 2005. Учимся программировать / Шупрута В.В. – М.: НТ Пресс, 2005. – 352 с.