ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В. П. Кузнецов, Е. В. Протченко, Н. В. Хаджинова
Кафедра информационных систем и технологий,кафедра информационных технологий автоматизированных систем, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Минск, Республика Беларусь
E-mail: vpk@bsuir.by, khajynova@bsuir.by, protchenko@bsuir.by

Рассматриваются дискретные динамические системы, описываемые разностными векторно-матричными уравнениями. Разрабатываются методы преобразования уравнений динамики и анализа устойчивости процессов в таких системах.

Рассматривается класс дискретных динамических систем в общем случае нестационарных и нелинейных, которые описываются системой разностных уравнений следующего вида

$$x(k+1) = A[k, x(k)]x(k), \qquad (1)$$

где $x = col[x_1, ..., x_n]$ - вектор состояния системы размерности n, x_i - переменные состояния, A - $n \times n$ матрица с элементами $a_{ij}(k, x)$, зависящими от дискретного времени $k = 0, 1, 2...$ и координат x_i.

I. Постановка задачи

Параметры системы и соответственно конкретный вид коэффициентов a_{ij} уравнения (1) неизвестен, а известны лишь пределы (границы) их изменения, т.е. заданы ограничения

$$a'_{ij} \le a_{ij}(k, x) \le a''_{ij}, \qquad (2)$$

справедливые для любых $k \in [0, \propto]$ и любых значениях координат x_i, а величины a'_{ij} и a''_{ij} являются заданными постоянными величинами.

Уравнениями (1) и (2) описывается исследуемая дискретная динамическая система с неопределенными параметрами. Иногда такие системы называют еще интервальными. Случай непрерывных систем подобного типа рассмотрен в [1, 2].

Ставится задача оценить два основных качественных показателя системы - это устойчивость положения равновесия и быстродействие системы, т.е. получить оценку величины времени затухания переходных процессов.

Предлагается исходное уравнение (1) преобразовать к новой форме, предварительно представив его в виде

$$x(k+1) = A_0x(k) + H_0[x, x(k)]x(k), \qquad (3)$$

В (3) матрица A_0 с постоянными коэффициентами $\bar{a_{ij}}$. Такое выделение возможно несколькими способами. Наиболее просто взять величины a_{ij} как некоторые средние значения интервалов (2), т.е. $\bar{a_{ij}} = (a'_{ij} + a''_{ij})/2$. Второй вариант – это в качестве $\bar{a_{ij}}$ выбрать некоторые величины, характеризующие рабочий или номинальный режим функционирования.

Единственным условием выделения матрицы A_0 является то, чтобы она была Гурвицевой матрицей, т.е. все ее собственные значения должны быть по модулю меньше единицы.

На втором этапе уравнение (3) преобразуется с помощью преобразования $x = Mz$ к виду

$$z(k+1) = Dz(k) + H[k, z]z(k), \qquad (4)$$

где M - модальная матрица, а $z = col[z_1, ..., z_n]$ - новый вектор состояния.

В полученном уравнении матрица $D = diag[\lambda_1, ..., \lambda_n]$, $\lambda_1 - n$ различных собственных чисел матрицы A_0. Алгоритм формирования модальной матрицы известен и изложен в литературе.

Очевидно, что если в (4) H=0, то имеем диагональную или каноническую форму уравнений состояния. Причем, чем уже (меньше) будут интервалы (2), то тем меньше в том или ином смысле будет матрица H в (4).

Совокупность параметров (коэффициентов) матрицы A уравнения (1) будем называть областью экспоненциальной устойчивости с показателем α (α - область), если любое решение уравнения (1) затухает не медленнее экспоненты с показателем α, т.е. $||x(k)|| \le ||x(k_0)||exp(-\alpha k)$. При $\alpha = 0$ имеем просто область асимптотической устойчивости.

II. Основные результаты

К уравнению (4) применимы оценки нормы решения, полученные в [3]. В результате сформулируем основные результаты работы.

1. Для существования α - области необходимо, чтобы максимальный по модулю λ_i был строго меньше единицы, т.е. $max|\lambda_i| < e^{-2\alpha} = d < 1$;

2. Достаточным существованием α - области является выполнение неравенства

$$(-1)^n det(B - e^{-2\alpha}E) > 0,$$

где $B = [D + H(k)] * [D + H(k)]$, $*$ -знак операции взятия эрмитово-сопряженной матрицы.

Если матрица систем (1) А является матрицей Фробениуса, т.е.

$$A[k, x(k)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_n(k,x) & \dots & \dots & \dots & -b_1(k,x) \end{bmatrix},$$

то показано, что граница искомой α - области относительно произвольно выбранного коэффициента b_k представляется в виде квадратного уравнения

$$e_2 b_k^2 + e_1 b_k + e_0 = 0, \qquad (5)$$

где коэффициенты e_i являются аналитическими функциями величин b_i, $i \neq k$.

Для уравнения (5) разработаны алгоритмы, позволяющие строить α - области на плоскости двух произвольных коэффициентов b_i .

III. Пример

В качестве примера рассмотрим динамическую систему второго порядка

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b_2(k,x) & -b_1(k,x) \end{bmatrix} x(k), \qquad (6)$$

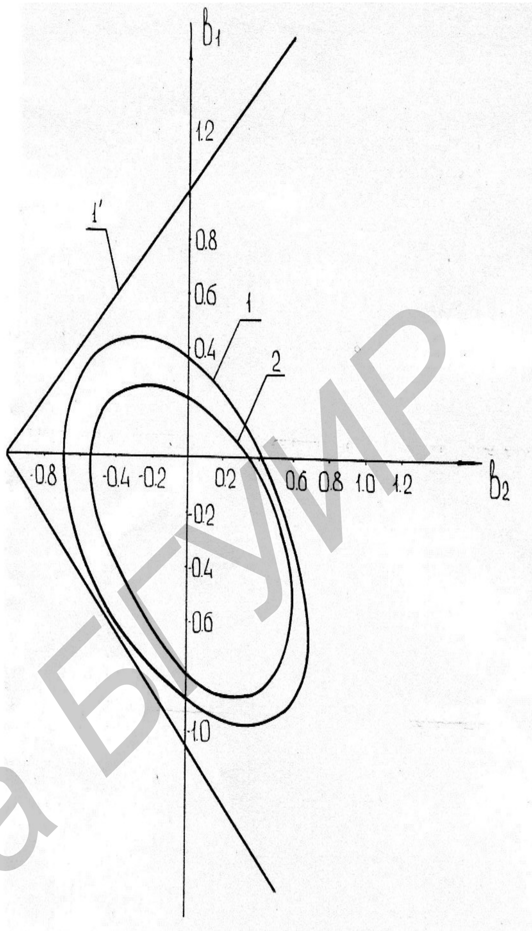
Выбирая $\bar{b_1}, \bar{b_2}$ постоянными величинами, получим соответствующие формулы для вычисления коэффициентов e_i. Например, если $\bar{b_1}^2 < 4\bar{b_2}$, то

$$e_2 = 4\frac{d}{\Delta}, e_1 = -4\frac{(\bar{b_2} + \bar{b_2})\bar{b_1}}{\Delta}(1 - b_2 + d),$$

$$e_0 = b_2^2 + 2d[2\frac{(b_2 - \bar{b_1})^2 + b_2\bar{b_1}^2}{\Delta} - b_2] + d,$$

где $\Delta = b_1^2 - 4\bar{b_2}$.

На рисунке приведены α - области для значений $\bar{b_1}$=-0,5 , $\bar{b_2}$=0,51, α=0; 0,2 (кривые 1, 2)



1. Кузнецов В.П. Оценки процессов в нелинейных нестационарных непрерывных интервальных системах.//Избранные научные статьи в 10-летию Минского института управления.-Мн.:МИУ,2001-с.12-16.
2. Кузнецов В.П., Протченко Е.В., Хаджинова Н.В. Анализ непрерывных динамических систем с неопределенными параметрами. //Информационные технологии и системы 2015 (ИТС 2015): материалы м-н-т-к (БГУИР, Минск 2015).- Минск: БГУИР, 2015 – с.56-57.
3. Кузнецов В.П. Численные процедуры получения экспоненциальных оценок в линейных системах. // Автоматика и телемеханика, №5, 1987.