

УДК 004.383.5

## ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БИТ В ПАРАУНИТАРНОМ СУБПОЛОСНОМ КОДЕРЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ АЛГЕБРЫ КВАТЕРНИОНОВ

Н.А. ПЕТРОВСКИЙ

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь*

*Поступила в редакцию 12 ноября 2013*

Рассматривается проблема распределения бит в контексте древовидной структуры 2D параунитарного банка фильтров на основе алгебры кватернионов – пакета 4-полосного вейвлет преобразования. Показано, что оптимальное распределение бит будет в случае, если дисперсии ошибок квантователей в каналах кодера равны.

*Ключевые слова:* параунитарный банк фильтров, многополосное вейвлет-преобразование, кватернион, изображение, дисперсия реконструкции сигнала.

### Постановка задачи

В последние несколько десятилетий банки фильтров рассматриваются как наиболее эффективная техника компрессии данных мультимедиа [1]. Банки фильтров применяются в кодировании аудиосигналов, изображений и видеопотока в таких стандартах как JPEG, JPEG2000, JPEG XR, MPEG и H.264/AVC.

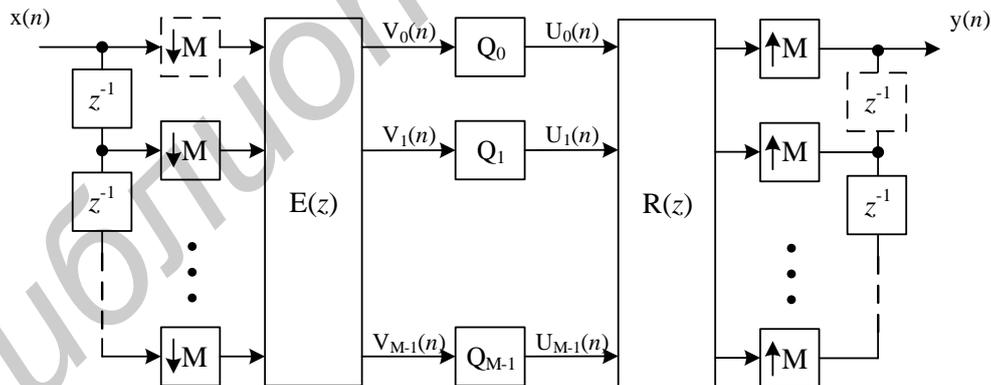


Рис. 1. Схема субполосного кодирования на основе полифазных матриц

На рис.1 показана схема субполосного кодирования на основе максимально децимированного  $M$ -канального банка фильтров, состоящего из систем анализа и синтеза, полифазных матриц  $\mathbf{E}(z)$  и  $\mathbf{R}(z)$  соответственно. Полифазная структура банка фильтров формулируется следующим образом [1]:

$$[\mathbf{H}_0(z) \quad \mathbf{H}_1(z) \quad \dots \quad \mathbf{H}_{M-1}(z)]^T = \mathbf{E}(z^M)\mathbf{e}(z)^T,$$

$$[\mathbf{F}_0(z) \quad \mathbf{F}_1(z) \quad \dots \quad \mathbf{F}_{M-1}(z)]^T = \mathbf{R}(z)\mathbf{R}(z^M),$$

где  $\mathbf{e}(z) = [1 \ z^{-1} \ \dots \ z^{-(M-1)}]$ ,  $\mathbf{H}_k(z)$  и  $\mathbf{F}_k(z)$  – передаточные функции  $k$ -го канала банка фильтров анализа и синтеза соответственно. Если матрица  $\mathbf{E}(z)$  обратима, то полифазная матрица синтеза  $\mathbf{R}(z)$  может быть выбрана как обратная матрица  $\mathbf{E}(z)$ , тогда совершенная реконструкция достигается. Такой банк фильтров называется совершенно реконструированным банком фильтров или биортогональным банком фильтров. Если  $\mathbf{E}^T(z^{-1})\mathbf{E}(z) = \mathbf{I}$  и  $\mathbf{R}(z) = \mathbf{E}^T(z^{-1})$ , то это специальный класс банка фильтров – параунитарный банк фильтров (ПУБФ). Структура ПУБФ получается путем факторизации его полифазной матрицы  $\mathbf{E}(z)$  на элементарные математические преобразования, как правило, это планарные обороты Гивенса. Для ПУБФ анализа с линейной ФЧХ и четного числа каналов  $M$  хорошо известна факторизация передаточной полифазной матрицы  $\mathbf{E}(z)$  [2]:

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{G}_{N-1}(z)\mathbf{G}_{N-2}(z)\dots\mathbf{G}_1(z)\mathbf{E}_0, \quad \text{где} \quad \mathbf{E}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{\Phi}_0\mathbf{W}\text{diag}(\mathbf{I}_{M/2}, \mathbf{J}_{M/2}), \quad \mathbf{G}_i(z) = \frac{1}{2}\mathbf{\Phi}_i\mathbf{W}\Lambda(z)\mathbf{W},$$

$$i=1, \dots, N-1, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M/2} & \mathbf{I}_{M/2} \\ \mathbf{I}_{M/2} & -\mathbf{I}_{M/2} \end{bmatrix}, \quad \Lambda(z) = \text{diag}(\mathbf{I}_{M/2}, z^{-1}\mathbf{I}_{M/2}), \quad \mathbf{\Phi}_i = \text{diag}(\mathbf{U}_i, \mathbf{V}_i), \quad \mathbf{U}_i \text{ и } \mathbf{V}_i$$

произвольные ортогональные матрицы размера  $M/2 \times M/2$ . Кроме того, для упрощения обозначенной выше факторизации для  $i > 0$  матрица  $\mathbf{U}_i$  может быть представлена единичной матрицей, тогда  $\mathbf{\Phi}_i = \text{diag}(\mathbf{I}, \mathbf{V}_i)$ . Как видно, ПУБФ может реализовываться на основе решетчатых и лестничных структур, которые, как известно, сохраняют совершенную реконструкцию и при реализации на арифметике с фиксированной запятой.

Положим, что входной сигнал  $x(n)$  стационарный, спектральная мощность которого  $S_{xx}(e^{j\omega})$ ,  $b_k$  количество бит представления сигнала  $V_k(n)$  на выходе  $k$ -го канала системы анализа, а  $\sigma_{V_k}^2$  есть дисперсия сигнала  $V_k(n)$ :

$$\sigma_{V_k}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(e^{j\omega}) |H_k(e^{j\omega})|^2 \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Динамический диапазон отсчета сигнала  $V_k(n)$  на входе  $k$ -го квантователя делится на  $2^{b_k}$  интервалов. Вес старшего значащего бита выбирается пропорционально дисперсии  $\sigma_{V_k}^2$  таким образом, чтобы вероятность переполнения была одинаковой во всех каналах. Дисперсия ошибки  $k$ -го квантователя при условии, что шум квантования аддитивный ко входному сигналу  $V_k(n)$  определяется следующим образом [3]:

$$\sigma_{q_k}^2 = \varepsilon_k 2^{-2b_k} \sigma_{V_k}^2,$$

где  $\varepsilon_k$  – константа, которая зависит от функции плотности вероятности сигнала  $V_k(n)$ . Для параунитарной системы, где сохраняется баланс энергий, шум квантования рассматривается на входе системы синтеза  $\mathbf{R}(z)$ , который усредняется в каналах синтеза и равен средней дисперсии ошибки реконструкции сигнала:

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sigma_{q_k}^2 = \sum_{k=0}^{M-1} \varepsilon_k 2^{-2b_k} \sigma_{V_k}^2 / M.$$

Итак, положим, что общее количество бит для квантователей всех  $M$  канальных сигналов  $V_k(n)$ ,  $k=0, \dots, M-1$  фиксировано и равно  $b$ . Проблема оптимального распределения бит квантователей может быть сформулирована следующим образом: найти  $b_0, \dots, b_{M-1}$  при условии, что общий ресурс битов  $b = \sum_{k=0}^{M-1} b_k / M = \text{const}$  и минимизации  $\min \sum_{k=0}^{M-1} \varepsilon_k 2^{-2b_k} \sigma_{V_k}^2 / M$ .

Таким образом, целью оптимизации является минимизация дисперсии ошибки реконструкции сигнала  $\sigma_r^2$  при ограничении на общий ресурс битов.

В случае схемы кодирования на основе линейного преобразования, как показано в [3, 4], оптимальное распределение бит для каждого квантователя в каналах будет, когда дисперсии шума квантования канальных сигналов равны. Для параунитарного субполосного кодера важно как распределить общий ресурс бит между канальными квантователями и как выбрать/факторизовать параунитарную матрицу  $\mathbf{E}(z)$ , чтобы максимизировать коэффициент субполосного кодирования. Решение второй задачи показано в [5]. В данной работе определяется схема оптимального распределения бит в параунитарном субполосном кодере изображений, который реализован на основе алгебры кватернионов.

### Параунитарный субполосный кодер

Матрицы  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{R}_i$  в факторизации решетчатой структуры параунитарного банка фильтров анализа, как показано в [5], можно выразить через матрицы умножения кватернионов (левого и правого умножения) следующим образом:  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{M}^+(Q_0)\mathbf{M}^-(P_0)$ ,  $\mathbf{R}_i = \mathbf{M}^+(Q_i)$ ,  $i=1, \dots, N-1$ , где  $P_0$  и все  $Q_i$  – некоторые единичные кватернионы, тогда передаточная функция решетчатой структуры общего ПУБФ анализа будет равна:  $\mathbf{E}(z) = \mathbf{M}^+(Q_{N-1})\Lambda(z)\mathbf{M}^+(Q_{N-2})\Lambda(z)\dots\mathbf{M}^+(Q_1)\Lambda(z)\mathbf{M}^+(Q_0)\mathbf{M}^-(P_0)$ . В работе [5] утверждается, что для каждой ортогональной матрицы размерностью  $4 \times 4$  существует уникальная (с точностью до знака) пара единичных кватернионов  $P$  и  $Q$  таких, что:  $\mathbf{M}^+(P) \cdot \mathbf{M}^-(Q) = \mathbf{M}^-(Q) \cdot \mathbf{M}^+(P)$ . Данная факторизация всегда соответствуют ортогональному преобразованию сигналов, даже если ее компоненты квантованы. Это происходит потому, что столбцы каждой матрицы умножения кватернионов составлены из одних и тех же элементов с точностью до знака. Реализация параунитарного банка фильтров анализа с линейной ФЧХ на основе умножителей кватернионов предполагает определение  $\Phi_0$  и  $\Phi_i$  как [6]:  $\Phi_0 = \mathbf{M}^-(P_0)\mathbf{M}^+(Q_0)$ ,  $\Phi_i = \mathbf{M}^-(P_i)$ ,  $i=1, \dots, N-1$ , где все  $P_i$  и  $Q_0$  – некоторые единичные кватернионы.

Для схемы компрессии изображений 1D ПУБФ на кватернионах ( $N = 3$ ) [6] используется для построения 2D разделяемого ПУБФ (см. рис. 2). Соотношение децимации/интерполяции в 2D схеме ПУБФ, эквивалентной рис. 1, задается двумерной матрицей [1]  $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$  и коэффициент децимации определяется как ее определитель, т. е.  $M = 16$ .

На рис. 3 показаны результаты работы схемы (рис. 2): исходное изображение Lena ( $512 \times 512$ ) (а), декомпозиция изображения полифазной матрицей  $\mathbf{E}(z)$  (б); реконструированное изображение полифазной матрицей  $\mathbf{R}(z)$  (в). Эксперимент проводился для ПУБФ с линейной ФЧХ ( $q_0 = -231/512 + i459/1024 + j0 + k0$ ;  $p_0 = -7/8 - i3/8 + j0 + k0$ ;  $p_1 = -3/16 + i15/16 + j0 + k0$ ;  $p_2 = -9/16 - i13/16 + j0 + k0$ ), которому соответствует 4-х полосное вейвлет-преобразование. Вейвлет-фильтры имеют хорошую частотную избирательность: уровень АЧХ в полосе пропускания для низкочастотных и высокочастотных фильтров составляет около  $-35$  дБ, а для полосовых – около  $-20$  дБ. При этом показатель эффективности кодирования равен  $8,1845$  дБ. Пиковое значение отношения сигнал-шум здесь составило  $53,24$  дБ.

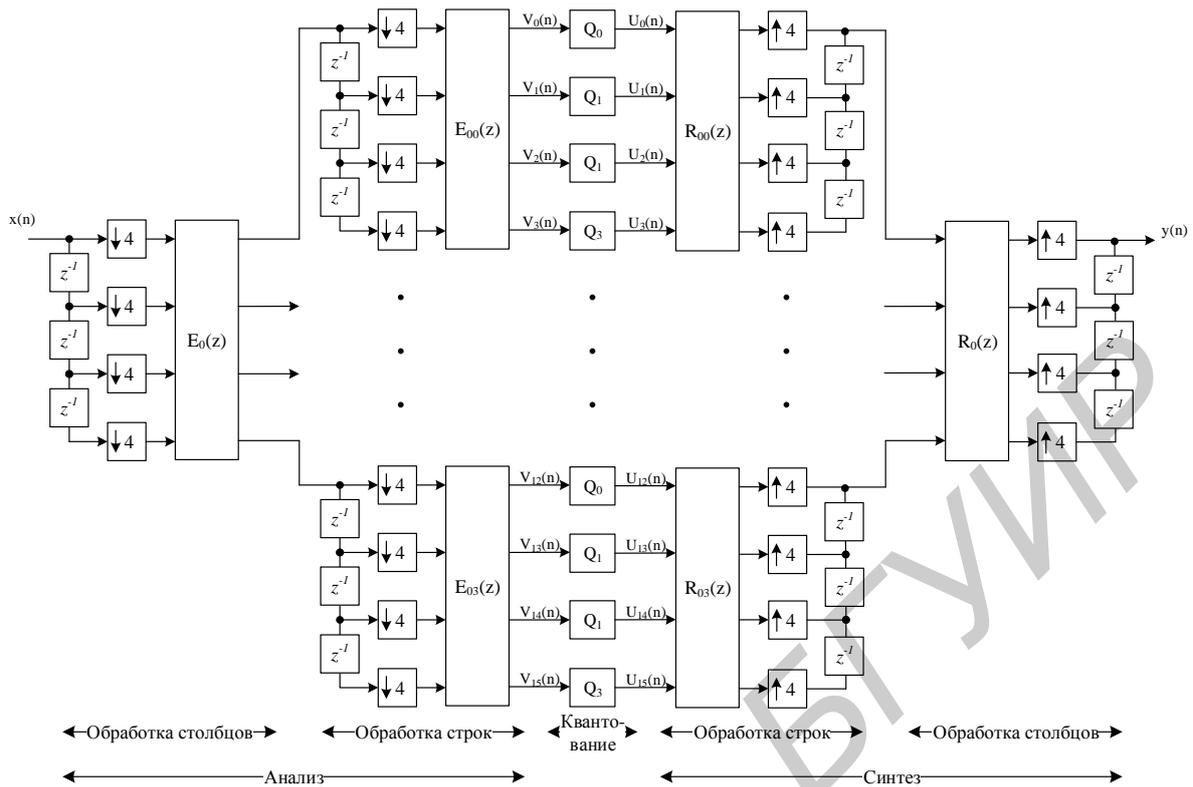


Рис. 2. Схема 2D параунитарного субполосного кодирования

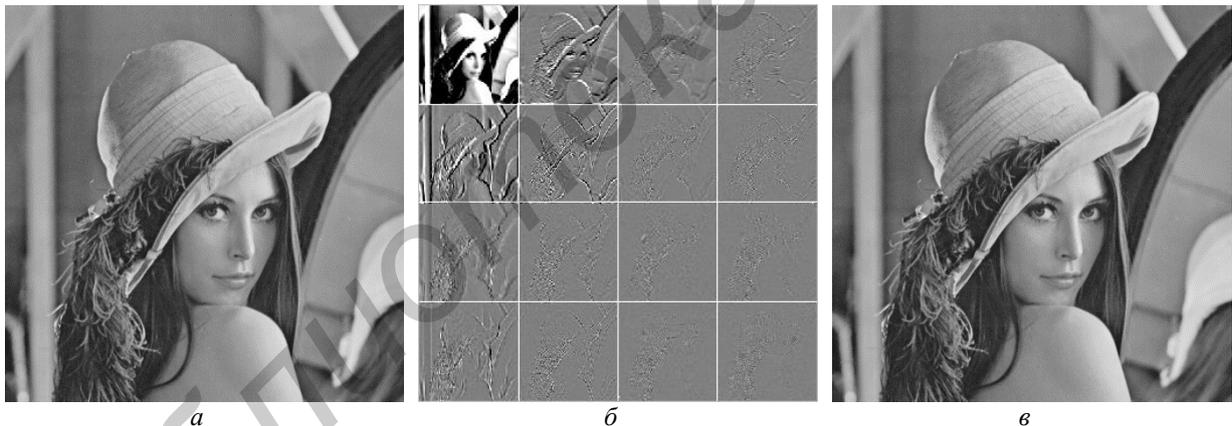


Рис. 3. Исходное изображение Lena (512×512) (а); декомпозиция изображения полифазной матрицей  $\mathbf{E}(z)$  (б); реконструированное изображение полифазной матрицей  $\mathbf{R}(z)$  (в)

Задача оптимального распределения бит по каналам в схеме на рис.2 формируется следующим образом:

найти  $b_0, b_1, \dots, b_{15}$  при условии, что  $b = (b_0 + b_1 + \dots + b_{15}) / 16 = \text{const}$  и минимизации ошибки реконструкции сигнала  $\min \sum_{k=0}^{15} \varepsilon_k 2^{-2b_k} \sigma_{V_k}^2 / 16$ .

С другой стороны, задачу оптимизации можно определить как поиск дисперсии сигнала на выходе квантователей при минимизации общей дисперсии ошибки реконструкции сигнала на выходе системы синтеза. Известно, что

$$2^{-2b} = \prod_{k=0}^{15} \left( 2^{-2b_k} \right)^{\frac{1}{16}}.$$

После умножений левой и правой части данного выражения на  $\prod_{k=0}^{15} (2^{-2b_k})^{\frac{1}{16}}$  получается,

$$\text{что } 2^{-2b} \prod_{k=0}^{15} (\varepsilon_k \sigma_{V_k}^2)^{\frac{1}{16}} = \prod_{k=0}^{15} (2^{-2b_k} \varepsilon_k \sigma_{V_k}^2)^{\frac{1}{16}}.$$

Здесь левая часть не зависит от числа битов квантователя  $b_k$ , т.е. это константа. Пусть  $D_k = \varepsilon_k 2^{-2b_k} \sigma_{V_k}^2$  дисперсия сигнала на выходе  $k$ -го квантователя, тогда равенство представляется следующим образом:  $\text{const} = \prod_{k=0}^{15} D_k^{\frac{1}{16}}$ . После возведения левой и правой части в степень 16 получается, что  $\text{const} = \prod_{k=0}^{15} D_k$ .

Таким образом, задача оптимального распределения бит квантователей в каналах схемы параунитарного субполосного кодирования формулируется следующим образом:

найти  $D_0, \dots, D_{15}$  при условии, что  $\text{const} = \prod_{k=0}^{15} D_k^{\frac{1}{16}}$  и минимизации  $\min \sum_{k=0}^{15} D_k / 16$ .

Так как  $D_k = \varepsilon_k 2^{-2b_k} \sigma_{V_k}^2 \geq 0$ , то значения  $D_k$  являются неотрицательными величинами. Известно, что сумма неотрицательных значений минимальна, когда их произведение будет постоянной величиной при условии, если все они равны:  $D_0 = D_1 = \dots = D_{15} = D$ , где  $D$  некая наперед заданная величина. Физическая интерпретация данного результата следующая: дисперсия сигналов  $D_k = \varepsilon_k 2^{-2b_k} \sigma_{V_k}^2$  на выходах квантователей всех каналов равна, или другими словами, дисперсия ошибки реконструкции изображения минимальна, когда дисперсии ошибок, внесенные каждым квантователем, равны.

Величина  $D$  определяется в процессе задания степени сжатия изображения. Пусть  $D_k = D$ , тогда

$$2^{-2b_k} = \frac{D}{\varepsilon_k \sigma_{V_k}^2}.$$

Далее следует, что

$$2^{-2b} = \prod_{k=0}^{15} \left( \frac{D}{\varepsilon_k \sigma_{V_k}^2} \right)^{\frac{1}{16}} = \frac{D^{\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}}}{\prod_{k=0}^{15} (\varepsilon_k \sigma_{V_k}^2)^{\frac{1}{16}}}, \text{ тогда}$$

$$D = 2^{-2b} \prod_{k=0}^{15} (\varepsilon_k \sigma_{V_k}^2)^{\frac{1}{16}}.$$

Таким образом, оптимальное распределение бит квантователей по каналам параунитарного субполосного кодера будет следующим:

$$b_k = b + \frac{1}{2} \log_2 \frac{\varepsilon_k \sigma_{V_k}^2}{\prod_{k=0}^{15} (\varepsilon_k \sigma_{V_k}^2)^{\frac{1}{16}}}.$$

Как следует из приведенных рассуждений, оптимальное распределение бит для каждого квантователя в каналах 2D параунитарного субполосного кодера будет, когда дисперсии шума квантования канальных сигналов равны.

## Заключение

Обосновано оптимальное распределение бит в схеме 2D параунитарного субполосного кодера на основе алгебры кватернионов. Так, если число бит представления субполосного сигнала фиксировано, то дисперсии ошибок квантователей в каналах кодера должны быть равны для оптимального распределения бит в параунитарном субполосном кодере. В приложениях кодирования изображений важнее использовать критерий минимизации ошибки реконструкции, чем минимизировать ее дисперсию. Например, можно добавить различные неотрицательные веса для каждого канала и затем пытаться минимизировать взвешенную сумму дисперсий ошибок квантователей. В задаче оптимизации еще можно использовать факт, что среднее арифметическое неотрицательных величин больше или равно их среднему геометрическому. Легко доказать: чтобы минимизировать сумму взвешенных слагаемых, они должны быть равны. Другими словами, дисперсии ошибок квантования в каналах кодера обратно пропорциональны соответствующим весам.

## OPTIMAL BIT ALLOCATION IN THE PARAUNITARY SUBBAND IMAGE CODER BASED ON THE QUATERNION ALGEBRA

N.A. PETROVSKY

### Abstract

The problem of bit allocation in the context of the tree structure 2D paraunitary filter bank based on the quaternion algebra, i.e. 4-band packet wavelet transform, is considered. It was shown that the bit allocation is optimal if the quantizers error variances in the encoder channels are equaled.

### Список литературы

1. *Vaidyanathan P.P.* Prentice-Hall. NJ. 1993.
2. *Chen Y.-J., Amaratunga K.S.* IEEE Trans. CAS - II. 2003. Vol. 50, № 12. P. 963–976.
3. *Jayant N.S., Noll P.* Prentice-Hall. NJ. 1993.
4. *Soman A.R., Vaidyanathan P.P.* IEEE Trans. Signal processing. 1993. Vol. 41, № 5. P. 1824–1835.
5. *Parfieniuk M., Petrovsky A.* Signal Processing. 2010. Vol. 90. P. 1755–1767.
6. *Петровский Н.А., Парфенюк М.* // Докл. БГУИР. 2011. № 1 (55). С. 70–74.