

УДК 519.677

ПРИМЕНЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКИХ СТЕПЕНЕЙ

В.М. ИЛЬИН

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 20 января 2014

Дано краткое изложение сущности нового метода решения алгебраических уравнений с максимальным числом разных вещественных корней, равным степени n уравнения – четвертой и выше.

Ключевые слова: решение алгебраических уравнений высоких степеней, использование арифметических прогрессий, снижение трудоемкости, высокая доступность.

Введение

В высшей алгебре существует теорема Руффини-Абеля, которая гласит, что для алгебраического уравнения, выше степени 4, нельзя указать общей формулы решения, подобной формуле Кардано, т.е. в радикалах [1]. Вопрос об условиях, при которых данное уравнение разрешимо в радикалах, был исследован Э.Галуа в XIX веке [1]. Но, как справедливо отмечено в [2], «уже в случае уравнений степени 4 формулы корней практически не применимы». И по отношению к уравнениям не только пятой, но и четвертой степени, используются численные методы решения [3].

В современных условиях для этого применяются ЭВМ, и специалисты высказывают мнение, что на численные решения затрачивается большая доля машинного времени. Так что поиск путей эффективного аналитического решения алгебраических уравнений не потерял актуальности. Данная статья посвящена разработке нового пути в этом деле, отличающегося большей эффективностью: более широким диапазоном использования, значительно меньшей трудоемкостью и высокой точностью. При решении алгебраических уравнений любой степени (больше первой) первоначально составляется квадратное уравнение с учетом того, что первый коэффициент приведенного решаемого алгебраического уравнения – это сумма C со знаком минус, а последний коэффициент этого уравнения есть произведение Π его корней. Исходя только из этих двух коэффициентов определяются все корни решаемого уравнения. Наиболее простое объединение всех корней в этих двух коэффициентах уравнения является предпосылкой этого. От применения радикалов, исчерпавшего себя уравнениями четвертой степени, новый путь позволяет перейти к более гибкой системе арифметических прогрессий, к более совершенной процедуре вычисления корней.

Включение арифметических прогрессий в расчет алгебраических уравнений

Как уже отмечалось, первоначально составляем и решаем квадратное уравнение:

$$y^2 - Cy + \Pi = 0. \quad (1)$$

Откуда
$$y_{1,2} = \frac{C}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{C}{2}\right)^2 - \Pi} = \frac{C}{2} \mp P,$$

где $P = \sqrt{\left(\frac{C}{2}\right)^2 - \Pi} = \sqrt{D}$, D – дискриминант, Y_1 – меньший, а Y_2 – больший корни выражения (1).

$$\text{Проверка: } Y_1 + Y_2 = \frac{C}{2} - p + \frac{C}{2} + p = C,$$

$$Y_1 \times Y_2 = \left(\frac{C}{2} - p\right)\left(\frac{C}{2} + p\right) = \left(\frac{C}{2}\right)^2 - p^2 = \left(\frac{C}{2}\right)^2 - \left(\frac{C}{2}\right)^2 + \Pi = \Pi. \quad (2)$$

На основании соотношений (2) составляем базовую арифметическую прогрессию:

$$Y_1 \quad p \quad C_1 \quad p \quad Y_2 \quad (3)$$

Здесь p – разность прогрессии. В дополнение к базовой прогрессии (3) составляются вспомогательные прогрессии. В общем виде это может быть представлено как:

	$Y_1 = C_1 - p$	p	C_1	p	$Y_2 = C_1 + p$
–	$C_1 - p - C_3 = C_2 - p$	p	C_2	p	$C_1 + p - C_3 = C_2 + p$
	C_3	0	C_3	0	C_3

В общем виде представлены: сверху базовая арифметическая прогрессия со средним членом $C_1 = C_2 + C_3 = \frac{C}{2} = \text{const}$; сумма ее крайних членов: $C_1 - p + C_1 + p = C = \text{const}$. Из базовой прогрессии вычитается вспомогательная прогрессия, в ее центре C_2 – это часть C_1 , зависящая от числа пар корней решаемого алгебраического уравнения, что будет показано на конкретных примерах. Крайние члены этой прогрессии $C_1 - p - C_3 = C_2 - p$ и $C_1 + p - C_3 = C_2 + p$ описывают с двух направлений – вертикального и горизонтального – искомые корни заданного алгебраического уравнения: x_1 и x_2 , x_3 и x_4 и т.д. В конечном счете в этом участвуют все члены представленной совокупности прогрессий, их всего восемь: три горизонтальные и пять вертикальных, разности которых вычитаются из членов верхней базовой прогрессии. Дополнительная информация о сущности использования прогрессий содержится в примерах.

Примеры решения уравнений 4 степени

Пример 1. Дано алгебраическое уравнение: $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$; $C = 10$; $\Pi = 24$. Требуется определить корни уравнения.

Решаем уравнение:

$$y^2 - 10y + 24 = 0. \quad (4)$$

Получим $y_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 24} = 5 \pm 1$; $y_1 = 4$; $y_2 = 6$ – корни (4).

Составляем базовую арифметическую прогрессию.

$$4 \quad 1 \quad 5 \quad 1 \quad 6. \quad (5)$$

Поскольку заданное уравнение содержит четыре корня составляем вспомогательные прогрессии со средним значением $5:2 = 2,5$:

$$1 \quad 1,5 \quad 2,5 \quad 1,5 \quad 4,$$

преобразуем базовую прогрессию (5) с разностью 1,5:

$$3,5 \quad 1,5 \quad 5 \quad 1,5 \quad 6,5.$$

Дописываем к ней предыдущую прогрессию и вычитаем ее из базовой:

–	3,5	1,5	5	1,5	6,5
	1	1,5	2,5	1,5	4
	2,5	0	2,5	0	2,5.

Здесь все три горизонтали – прогрессии (третья имеет равную 0 разность), все столбцы – прогрессии с отрицательными разностями во второй строке. Эта совокупность прогрессий полностью законченная, содержит два корня (1 и 4) уравнения 4-ой степени.

Чтобы определять два других его корня, составляем прогрессию со средним значением 2,5 и разностью 0,5, а над ней скорректированную базовую прогрессию с такой же разностью:

–	4,5	0,5	5	0,5	5,5
	2	0,5	2,5	0,5	3
	2,5	0	2,5	0	2,5.

Таким образом, к первым двум корням исходного уравнения добавилось еще два его корня: 2 и 3. Следовательно, имеем четыре корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Проверка: $S = 10$; $P = 24$, кроме того можно проверить решение подстановкой корней в исходное алгебраическое уравнение. Полученные решения можно проверять также через квадратные уравнения с корнями 1 и 4, 2 и 3:

$$x_2 - 5x + 4 = 0; x_{1,4} = 2,5 \pm \sqrt{6,25 - 4} = 2,5 \pm \sqrt{2,5} = 2,5 \mp 1,5 = 1 \text{ и } 4;$$

$$x_2 - 5x + 6 = 0; x_{2,3} = 2,5 \pm \sqrt{6,25 - 6} = 2,5 \pm \sqrt{0,25} = 2,5 \mp 0,5 = 2 \text{ и } 3.$$

Пример 2. Дано алгебраическое уравнение: $x^4 - 10x^3 + 32x^2 - 37,5x + 11,8125 = 0$. Требуется определить корни этого уравнения.

Решаем уравнение

$$y^2 - 10y + 11,8125 = 0.$$

$$\text{Получим } y_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 11,8125} = 5 \pm \sqrt{13,1875} = 5 \pm 3,6315.$$

Корни приведенного выше уравнения: 1,3685 – меньший, 8,6315 – больший.

Составляем базовую прогрессию:

1,3685	3,6315	5	3,6315	8,6315.
--------	--------	---	--------	---------

Упрощаем базовую прогрессию, не изменяя ее контрольного члена 5 и суммы крайних членов, отняв от правого крайнего члена 1,6315 и добавив это к крайнему левому члену. Дописываем к ней и вычитаем

–	3	2	5	2	7
	0,5	2	2,5	2	4,5
	2,5	0	2,5	0	2,5.

Получаем заверченный комплект продольных и вертикальных прогрессий; в нем 0,5 и 4,5 – это два корня исходного уравнения.

Для получения величин второй пары корней базовую и вторую прогрессии преобразуем к новой разности прогрессий, равной 1:

–	4	1	5	1	6
	1,5	1	2,5	1	3,5
	2,5	0	2,5	0	2,5.

Завершенность прогрессий говорит о том, что в них содержатся два корня (1,5 и 3,5) исходного алгебраического уравнения. Таким образом, корни решаемого уравнения имеют величины: $x_1 = 0,5$; $x_2 = 4,5$; $x_3 = 1,5$; $x_4 = 3,5$. Порядок их определения такой же, как и в первом примере. Он полностью согласуется с намеченным в общем виде порядком использования обобщенных прогрессий.

Проверка такая же как и в первом примере, в частности: $S = 0,5 + 4,5 + 1,5 + 3,5 = 10$; $\Pi = 0,5 \times 4,5 \times 1,5 \times 3,5 = 11,8125$.

Пример 3. Дано алгебраическое уравнение: $x^4 - 9,3x^3 + 30,3x^2 - 39,8x + 16,8 = 0$. Требуется определить его корни.

Решаем уравнение

$y^2 - 9,3y + 16,8 = 0$, получаем:

$$y_{1,2} = 4,65 \pm \sqrt{4,65^2 - 16,8} = 4,65 \pm \sqrt{21,6225 - 16,8} = 4,65 \pm \sqrt{4,8225} = 4,65 \pm 2,196.$$

Корни – 2,454 и 6,846. Этому соответствует арифметическая прогрессия базовая:

2,454 2,196 4,65 2,196 6,846

или, как было отмечено выше, она может быть преобразована без изменения средней величины (4,65) и суммы корней $2,454 + 6,846 = 9,3$ в следующую базовую прогрессию с добавлением частной прогрессии:

	3,3	1,35	4,65	1,35	6
–	0,8	1,35	2,15	1,35	3,5
	2,5	0	2,5	0	2,5.

Корни 0,8 и 3,5, их сумма 4,3, а среднее 2,15. Поэтому на два других корня остается $4,65 - 2,15 = 2,5$ общего среднего суммы всех корней. Следовательно, для их определения имеем прогрессию:

	4,15	0,5	4,65	0,5	5,15
–	2	0,5	2,5	0,5	3
	2,15	0	2,15	0	2,15.

Здесь корни – это 2 и 3, всего же в заданном алгебраическом уравнении четвертой степени четыре корня: $x_1 = 0,8$; $x_2 = 3,5$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$. Их сумма – 9,3, произведение – 16,8.

Для получения пары корней составлен баланс восьми прогрессий: трех горизонтальных, одна из них базовая и две частные, и пять коротких одношаговых вертикальных прогрессий с отрицательными разностями: –2, –0,5; –2,5; –0,5; –3 (все они отнимаются от соответствующих членов базовой прогрессии) – баланс всех восьми прогрессий подтверждает величины корней.

Кроме того, они могут быть легко проверены подстановкой в решаемое уравнение, а также решением квадратных уравнений из пар корней (как в примере 2):

$$x_{12} = \frac{4,3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4,3}{2}\right)^2 - 2,8} = 2,15 \pm \sqrt{1,8225} = 2,15 \pm 1,35 = 3,5 \text{ и } 0,8,$$

$$x_{34} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} = 2,5 \pm \sqrt{6,25 - 6} = 2,5 \pm \sqrt{0,25} = 2,5 \pm 0,5 = 3 \text{ и } 2.$$

Пример 4. Дано алгебраическое уравнение: $x^6 - 15x^5 + 87,25x^4 - 247,5x^3 + 352,75x^2 - 232,5x + 54 = 0$.

Требуется определить корни заданного уравнения.

Решаем укороченное уравнение:

$$y^2 - 15y + 54 = 0,$$

$$y_{12} = 7,5 \mp \sqrt{56,25 - 54} = 7,5 \mp \sqrt{2,25} = 7,5 \mp 1,5; \text{ корни } - 6 \text{ и } 9.$$

Составляем базовую прогрессию:

6 1,5 7,5 1,5 9.

Среднее от 15 равно 7,5, т.е. на каждую пару из 6 корней приходится $7,5:3 = 2,5$, или 1,3 общей средней величины, входящей в частную арифметическую прогрессию. Таким образом, от первой базовой прогрессии надо отнять частную прогрессию

6	1,5	7,5	1,5	9
1	1,5	2,5	1,5	4
5	0	5	0	5.

В этой завершенной сбалансированности всех продольных и поперечных прогрессий (их всех 8) крайние величины второй прогрессии (1 и 4) являются корнями уравнения.

Если же от измененной базовой прогрессии с большей разностью (на 0,5) отнять частную прогрессию,

5,5	2	7,5	2	9,5
0,5	2	2,5	2	4,5
5	0	5	0	5.

то в этой сбалансированной прогрессии получим корни 0,5 и 4,5.

Далее, если от изменений базовой прогрессии с разностью 0,5 отнять частную прогрессию с такой же разностью, т.е.

7	0,5	7,5	0,5	8
2	0,5	2,5	0,5	3
5	0	5	0	5.

Получим третью пару корней: 2 и 3. Следовательно, процедура определения корней алгебраического уравнения степени 6 та же, что и для степени 4.

Корни – это разности между верхними величинами столбцов 1и 5 и их нижними величинами, с учетом того, что вторая прогрессия вычитается из первой (верхней), знаки ее членов положительные.

Следовательно заданному алгебраическому уравнению шестой степени соответствуют корни: $x_1 = 1; x_2 = 4; x_3 = 0,5; x_4 = 4,5; x_5 = 2; x_6 = 3$.

Проверку правильности решения уравнения можно осуществить одним из способов:

- через определение суммы и произведения корней;
- через подстановку их в исходное уравнение;
- через решение квадратных уравнений, соответствующих парам корней. В частности:

$$x_{12} = 2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 4} = 2,5 \pm \sqrt{6,25 - 4} = 2,5 \pm \sqrt{2,25} = 2,5 \pm 1,5 = 4 \text{ и } 1;$$

$$x_{34} = 2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 2,25} = 2,5 \pm \sqrt{6,25 - 2,25} = 2,5 \pm \sqrt{4} = 2,5 \pm 2 = 4,5 \text{ и } 0,5;$$

$$x_{56} = 2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 6} = 2,5 \pm \sqrt{6,25 - 6} = 2,5 \pm \sqrt{0,25} = 2,5 \pm 0,5 = 3 \text{ и } 2.$$

Здесь четко видно, что пары корней формируются и определяются как пары, в которые входят меньшие и большие величины, что предопределяется меньшим началом базовой арифметической прогрессии по сравнению с ее концом и постоянным средним членом, равным $C/2 = C_1$. Это соотношение сохраняется при всех преобразованиях базовой прогрессии. Следует также отметить, что возможность преобразования базовой прогрессии:

- 1) упрощает ее, освобождая в расчете от образующихся дробей;
- 2) позволяет в необходимых пределах регулировать величину разности прогрессий p и

тем самым добиваться баланса всей совокупности продольных и поперечных прогрессий и получать четкий, точный результат по определению корней.

Следует также подчеркнуть, что кроме решения начальных квадратных уравнений, все остальные расчетные действия являются линейными, т.е. практически невыполнимыми в методе, использующем радикалы даже невысоких, 3 и 4, степеней. Отсюда значительное снижение затрат времени и труда на решение многих задач. Ключ открывший новый путь решения алгебраических уравнений – восемь небольших арифметических прогрессий в гармоничном регулируемом сочетании. При этом регулирование арифметических прогрессий, приводящее к выявлению корней алгебраических уравнений, выполняется изменением одинаковых разностей базовой и частных прогрессий вокруг разности, которая возникает в решении первоначального квадратного уравнения (см. примеры: 1–4).

Заключение

По-новому определены корни алгебраических уравнений четвертой и шестой степеней. Основа метода-применение арифметических прогрессий, позволяющие выявлять корни алгебраических уравнений с высокой точностью и с небольшими затратами труда и времени. Намечены пути расширения возможностей этого метода.

ARITHMETIC PROGRESSION APPLICATION FOR SOLVING OF HIGH DEGREES ALGEBRAIC EQUATIONS

V.M. ILYIN

Abstract

A new method for solving of algebraic equations with the maximum number of different real roots equal degree n (fourth and above) is given.

Список литературы

1. Мишина А.П., Проскураков И.В. Высшая алгебра. Л., 1962.
2. Малая математическая энциклопедия. Будапешт, 1976.
3. Андре Анго. Математика для электро-и радиоинженеров. М., 1964.