

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ СУММОЙ СТЕПЕНЕЙ ДВУХ БАНКОВ ФИЛЬТРОВ НА ОСНОВЕ АЛГЕБРЫ КВАТЕРНИОНОВ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Рыбенков Е. В.

Петровский А. А. – д.т.н, профессор

Предлагается алгоритм синтеза кватернионных ПУБФ (Q-ПУБФ) на основе решения многокритериальной задачи оптимизации при заданных структурных ограничениях с помощью множителей Лагранжа.

Стандарт сжатия изображений JPEG2000 способен работать в режимах без потерь, так и с потерями, однако для этого необходимо применять различные типы фильтров. Фильтр 5/3 имеет целочисленные коэффициенты и позволяет сжимать изображения без потерь, однако обладает низким ослаблением в полосе задержки. Режим с потерями подразумевает устранение избыточности, содержащейся в изображении. При этом, в БФ используется фильтр 9/7. Однако в таких приложениях, как обработка снимков с космического аппарата, медицинских изображений, внесение искажений неприемлемо. В настоящее время представляют интерес схемы, работающие по принципу L2L (lossless-to-lossy), осуществляющие сжатие и восстановление изображений как без потерь, так и с контролируемым внесением искажений [1].

При квантовании коэффициентов Q-ПУБФ следует учитывать следующие особенности: вырождение параметров БФ; аппроксимация операции умножения сдвигами и сложениями. Последнее напрямую влияет на эффективность аппаратной реализации и вычислительную сложность БФ. Учесть данные ограничения можно только на этапе синтеза коэффициентов.

Факторизация 8-канального Q-ПУБФ с линейными фазочастотными характеристиками (ФЧХ) и попарно зеркальной симметрией частотных характеристик фильтров приведена в [2]. Ключевой операцией Q-ПУБФ, от эффективной реализации которой зависит характеристика всего преобразования, является умножение кватернионов. Применение блочной лестничной параметризации к оператору умножения кватернионов $M^{\pm}(Q)$ дает возможность уменьшить вычислительную сложность операции и выполнение обратимого «целое к целому» преобразования. Блочная лестничная параметризация приведена в [3].

Для заданной разрядности слова B и максимального числа K_{max} бит равных единице в двоичном коде лестничных коэффициентов, задача синтеза целочисленного Q-ПУБФ (Int-Q-ПУБФ) с представлением коэффициентов суммой степеней двух может быть задана следующим образом: найти набор кватернионов P_i и Q_i для Q-ПУБФ, при которых обеспечивается высокое значение показателя эффективности кодирования CG (coding gain) [2] при следующих ограничениях: 1) степень ослабления в полосе задержки каналов ε_{SBE} [2] больше минимально допустимой ε_{minSBE} ; 2) ошибка восстановления сигнала ε_q в результате квантования лестничных коэффициентов меньше максимально допустимой ε_{maxq} .

Полярная форма представления кватерниона позволяет сократить число степеней свободы до трех. Задание углов в пределах $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $-\pi \leq \psi \leq \pi$ и $-\pi \leq \chi \leq \pi$ достаточно, чтобы описать любой кватернион заданного модуля $|Q|$ и трех углов φ , ψ , χ в полярной форме:

$$Q = |Q| \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} \cdot e^{k\chi}. \quad (1)$$

Таким образом, задача синтеза может быть сформулирована как задача поиска условного экстремума: найти такую точку $x^* = [\varphi_1^*, \psi_1^*, \chi_1^*, \dots, \varphi_i^*, \psi_i^*, \chi_i^*]^T \in X$; $i = (0, \dots, 2N-1)$, в которой целевая функция $f(x^*) = \min_{x \in X} f(x)$, $f(x) = -CG(x)$ имеет локальный минимум при заданных ограничениях $X = \{x \mid g_j(x) \leq 0, j = (1, \dots, p)\}$:

$$g_1(x) = \varepsilon_{SBE}(x) - \varepsilon_{minSBE} \leq 0; \quad g_2(x) = \varepsilon_q(x) - \varepsilon_{maxq} \leq 0 \text{ и углы } \varphi, \psi, \chi \text{ (1)}.$$

Задача оптимизации решается на основе множителей Лагранжа [4]. Функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x, \mu^k, r^k) = f(x) + P(x, \mu^k, r^k), \quad (2)$$

$$P(x, \mu^k, r^k) = \frac{1}{2r^k} \sum_{j=1}^p \left\{ \left[\max(0, \mu_j^k + r^k g_j(x)) \right]^2 - (\mu_j^k)^2 \right\}, \quad (3)$$

где $P(x, \mu^k, r^k)$ – штрафная функция; $\mu^k = (\mu_1^k, \dots, \mu_p^k)$ – вектор множителей Лагранжа; r^k – параметр штрафа; k – номер итерации.

Моделирование работы (8×24) Int-Q-ПУБФ проводилось в арифметике с фиксированной запятой с помощью модуля Fixed Point пакета MATLAB. Из анализа основных характеристик (8×24) Int-Q-ПУБФ (см. таблицу 1) видно, что данный банк фильтров – перфективно реконструированный (ошибка восстановления ε_q практически равна нулю), характеризуется высоким показателем эффективности кодирования $CG = 9,59$ дБ.

Алгоритм расчета коэффициентов Int-Q-ПУБФ

1. Задать начальные значения следующих параметров: начальную точку $x = x_0$; начальное значение штрафа $r = [0.1; 1]$; шаг приращения параметра штрафа $C = [4; 10]$; погрешность решения $\varepsilon > 0$ (остановка алгоритма); начальное значение вектора множителей Лагранжа μ ; разрядность слова B лестничных коэффициентов; порядок факторизации N Q-ПУБФ; $\varepsilon_{\min SBE}$; $\varepsilon_{\max q}$; K_{\max} ; $k = 0$.
2. Составить функцию Лагранжа $L(x, \mu^k, r^k)$ (2).
3. Найти точку $x^*(\mu^k, r^k)$ безусловного минимума функции $L(x, \mu^k, r^k)$ по x : $L(x^*, \mu^k, r^k) = \min_{x \in R} L(x, \mu^k, r^k)$, при этом для определения параметров $CG(x)$, $\varepsilon_{SBE}(x)$, $\varepsilon_q(x)$, функций ограничений $g_j(x)$, выполнить:
 - преобразование вектора $x = [\varphi_1, \psi_1, \chi_1, \dots, \varphi_i, \psi_i, \chi_i]^T$ в кватернионы P_i , Q_i (1);
 - вычислить значения коэффициентов лестничных структур $F_i(\tilde{Q})$, $G_i(\tilde{Q})$, $H_i(\tilde{Q})$ для каждого кватерниона P_i и Q_i ;
 - вычислить для вектора параметров $x = [\varphi_1, \psi_1, \chi_1, \dots, \varphi_i, \psi_i, \chi_i]^T$ выход $y(n)$ Q-ПУБФ системы анализ-синтез и определить параметры $CG(x)$, $\varepsilon_{SBE}(x)$, $\varepsilon_q(x)$;
4. Вычислить значение функции штрафа $P(x^*, \mu^k, r^k)$ согласно (3):
если $|P(x^*(\mu^k, r^k), \mu^k, r^k)| \leq \varepsilon$ тогда
вернуть минимум функции Лагранжа $x^*(\mu^k, r^k)$ и переход к пункту 6.
иначе
пересчет параметров штрафа r^{k+1} , множителей Лагранжа μ_j^{k+1} для ограничений-неравенств:
$$r^{k+1} = C \cdot r^k; \mu_j^{k+1} = \max\{0, \mu_j^k + r^k g_j(x^*(\mu^k, r^k))\}.$$
5. Положить $x^{k+1} = x^*(\mu^k, r^k)$; $k = k + 1$ и переход к пункту 2.
6. Конец алгоритма

Арифметика	ε_{SBE} (дБ)	ε_q	CG (дБ)	$\min(H(0))$ (дБ)
Без квантования ($B = 64$, $K = 64$)	-21.4	$4.4 \cdot 10^{-16}$	9.36	-307
С квантованием ($B = 16$, $K = 3$)	-21.1	$2.2 \cdot 10^{-16}$	9.59	-36

Таблица 1 – Основные характеристики 8-канального (8×24) Int-Q-ПУБФ

Сравнение по показателю эффективности кодирования CG с известными преобразователями [5], такими как 8×8 DCT ($CG = 8.83$ дБ), 8×16 LOT ($CG = 9.22$ дБ) и 8×24 GenLOT ($CG = 9.35$ дБ), показывает, что предложенный метод расчета целочисленных Q-ПУБФ с блочной лестничной схемной параметризацией позволяет получать банки фильтров для вычислительных структур с фиксированной запятой с высоким показателем эффективности кодирования (8×24) Int-Q-ПУБФ ($CG = 9.59$ дБ). Таким образом, (8×24) Int-Q-ПУБФ представляет собой целочисленное преобразование, которое может быть использовано для кодирования изображений по схеме L2L: lossless-to-lossy.

Список использованных источников:

1. Rao K.R., Hwang J.J. Techniques and Standards for Image, Video and Audio Coding // Prentice Hall – 1996.
2. Парфенюк М., Петровский А.А. Параунитарные банки фильтров на основе алгебры кватернионов: теория и применение // Цифровая обработка сигналов. - 2008, № 1, с.22-36.
3. Parfieniuk M., Petrovsky A. Quaternion multiplier inspired by the lifting implementation of plane rotations // IEEE Trans. Circuits and systems – I: regular papers. – 2010. - Vol. 57, № 10. — P. 2708–2717.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1974.
5. Jain A., Goel A. A multiobjective optimization method for designing M-channel NPR cosine modulated filter bank for image compression // Engineering. – 2015. – Vol. 7. — P. 93–100