УДК 519.853

# УСЛОВИЯ РЕГУЛЯРНОСТИ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Л. И. МИНЧЕНКО, А. Е. ЛЕЩЕВ

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники*
*П. Бровки 6, Минск, 220013, Беларусь*

*Поступила в редакцию 22 января 2014*

Условия регулярности играют важную роль в задачах нелинейного программирования, поскольку гарантируют выполнение необходимых условий оптимальности Куна-Таккера. Среди условий регулярности наиболее известным и широко применяемым является условие Мангасаряна-Фромовица. В то же время, несмотря на сравнительную эффективность условий Мангасаряна-Фромовица, существуют достаточно широкие классы задач оптимизации, в которых это условие не выполняется, однако для которых можно указать более слабые условия регулярности, гарантирующие справедливость необходимых условий Куна-Таккера. Целью данной статьи является исследование задач оптимизации, удовлетворяющих ослабленным условиям регулярности.

*Ключевые слова:* оптимизация, нелинейное программирование, условия регулярности.

## Введение

Пусть $h_i$ $i=1, ..., p$ – непрерывно дифференцируемые функции из $R^m$ в $R$. Введем непустое множество допустимых точек
$C=\{y\in R^m \mid h_i(y)\le 0 \quad i\in I \ , \ \ h_i(y)=0 \quad i\in I_0\}$, где $I=\{1, \ldots, s\}$, $I_0=\{s+1,\ldots, p\}$ или $I_0=\varnothing$, и рассмотрим задачу *NLP* минимизации непрерывно дифференцируемой целевой функции $f(y)$ на множестве $C$.

Пусть $I(y)=\{i\in I \mid h_i(y)=0\}$ – множество индексов активных в точке $y\in C$ ограничений типа неравенства. Для задачи *NLP* определим в точке $y\in C$ множество множителей Лагранжа

$$\Lambda(y)=\{\lambda\in \mathrm{R}^p \mid \nabla f(y)+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\nabla h_i(y)=0,\ \lambda_i\ge 0 \ \ i\in I(y),\ \lambda_i=0 \ \ i\in I\setminus I(y)\}.$$

Известно, что основным необходимым условием оптимальности для задачи *NLP* является условие Куна-Таккера: если точка $y\in C$ является локальным решением задачи *NLP*, то в данной точке существуют множители Лагранжа, то есть $\Lambda(y)\ne\varnothing$. Проверка выполнения условия Куна-Таккера позволяет исключить из рассмотрения неоптимальные допустимые точки. Ключевое значение условия Куна-Таккера заключается также в том обстоятельстве, что на его основе строятся многочисленные вычислительные алгоритмы для нахождения оптимальных точек. Однако условие Куна-Таккера справедливо только при выполнении некоторых дополнительных требований к структуре ограничений множества допустимых точек $C$, так называемых условий регулярности (constraint qualifications or regularity conditions). Таким образом, условие Куна-Таккера теряет свой смысл в исследовании задачи оптимизации *NLP* , если в данной задаче не выполнены условия регулярности.

Наиболее общие условия регулярности формулируются в терминах касательных конусов к множеству допустимых точек. Введем касательный и контингентный конусы (называемые также в литературе соответственно нижним и верхним касательными конусами) к множеству $C$ в точке $y \in C$:

$T_C(y) = \{\bar{y} \in R^m \mid \exists$ *число* $t_0 > 0$ *и функция* $o(t)$ *такие,*

*что* $o(t)/t \to 0$ *при* $t \to 0$ *и* $y + t\bar{y} + o(t) \in C \quad \forall t \in [0, t_0]\}$,

$\widehat{T}_C(y) = \{\bar{y} \in R^m \mid \exists t_k \downarrow 0$ *и* $\bar{y}_k \to \bar{y}$ *такие, что* $y + t_k \bar{y}_k \in C \quad k = 1, 2, \ldots\}$,

и касательный конус Кларка

$T_C^{Cl}(y) = \{\bar{y} \in R^m \mid \forall t_k \downarrow 0$ *и* $\forall y^k \xrightarrow{C} y$

$\exists$ *последовательность* $\bar{y}^k \to \bar{y}$ *такая, что* $y^k + t_k \bar{y}^k \in C \quad \forall k = 1, 2, \ldots\}$.

В точке $y \in C$ также построим множество

$$\Gamma_C(y) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle \le 0 \quad i \in I(y), \ \ \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0\},$$

которое будем называть линеаризованным касательным конусом к множеству $C$ в данной точке. Известно, что все введенные выше касательные конусы замкнуты и $T_C^{Cl}(y^0) \subset T_C(y^0) \subset \widehat{T}_C(y^0) \subset \Gamma_C(y^0)$.

Говорят, что в точке $y \in C$ выполнено условие регулярности Абади (Abadie), если $\widehat{T}_C(y) = \Gamma_C(y)$. Хотя условие Абади имеет весьма общий характер и накладывает на ограничения множества $C$ сравнительно нежесткие требования, это условие практически не проверяемо. Одним из наиболее известных простых в проверке условий регулярности является условие линейной независимости в точке $y \in C$ градиентов $\nabla h_i(y) \ \ i \in I(y) \cup I_0$ всех активных в этой точке ограничений (будем обозначать его как LICQ). К достоинствам данного условия регулярности относится также простота множества множителей Лагранжа в случае его выполнения в точке $y$, именно $\Lambda(y) = \{\lambda\}$. Недостатком условия LICQ является его жесткий характер, данное условие может не выполняться уже в достаточно простых задачах. Более общий характер носит условие регулярности Мангасаряна-Фромовица (MFCQ) , выполнение которого в точке $y \in C$ требует, чтобы в этой точке система векторов $\nabla h_i(y) \ \ i \in I_0$ была линейно независимой и существовал вектор $\bar{y}^0$ такой, что $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^0 \rangle = 0, \ i \in I_0$, $\langle \nabla h_i(y), \ \bar{y}^0 \rangle < 0, \ i \in I(y)$.

При выполнении условия MFCQ в точке $y \in C$ множество $\Lambda(y)$ ограничено и замкнуто. Введем множество вырожденных множителей Лагранжа в точке $y \in C$:

$$\Lambda_0(y) = \{\lambda \in \mathrm{R}^p \mid \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y) = 0, \ \lambda_i \ge 0 \ \ i \in I(y), \ \lambda_i = 0 \ \ i \in I \setminus I(y)\}.$$

Известно, что условие регулярности Мангасаряна-Фромовица (MFCQ) в точке $y \in C$ равносильно требованию $\Lambda_0(y) = \{0\}$. Несмотря на широкую общность условия MFCQ и то, что оно достаточно удобно для проверки, существуют целые классы задач нелинейного программирования, в которых это условие не выполняется и для которых требуются условия регулярности более слабые в отношении жесткости требований к ограничениям задачи. Дальнейшая цель данной статьи – предложить слабые условия регулярности, обобщающие условие MFCQ, и исследовать взаимосвязь данных условий.

## Ранговые условия регулярности

В литературе известны условия регулярности независимые от MFCQ и имеющие природу отличную от MFCQ. В частности, к ним относятся условие постоянного ранга (CRCQ) и обобщающее его условие ослабленного постояннного ранга (RCRCQ) [1–4]. Говорят, что в точке $y^0 \in C$ выполняется условие регулярности постоянного ранга (CRCQ), если для любого множества индексов $J = K \cup S$, где $K \subset I(y^0),\ S \subset I_0$, система векторов $\{\nabla h_i(y),\quad i \in J\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности этой точки.

Впервые условие регулярности постоянного ранга CRCQ было предложено при изучении дифференцируемости по направлениям функции оптимального значения в задаче нелинейного программирования с возмущениями параметров. В дальнейшем это условие использовалось в исследовании задач с равновесными ограничениями (equilibrium constraints) , двухуровневой оптимизации (bilevel optimization) , теории вариационных неравенств, необходимых условий второго порядка. Легко видеть, что данное условие, как и MFCQ, является обобщением условия регулярности LICQ. В то же время, примеры показывают, что условия CRCQ и MFCQ независимы друг от друга, то есть выполнение одного из них не влечет выполнение другого.

В работах [1–4] получено ослабленное условие постоянного ранга (RCRCQ), которое слабее в своих требованиях по сравнению с CRCQ и существенно легче для проверки. Говорят, что в точке $y^0 \in C$ выполняется ослабленное условие постоянного ранга (RCRCQ), если для любого множества индексов $K \subset I(y^0)$ система векторов $\{\nabla h_i(y),\quad i \in K \cup I_0\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки $y^0$.

Таким образом, в отличие от CRCQ в условии RCRCQ рассматривается существенно меньшее множество различных систем градиентов $\nabla h_i(y)$. Отметим, что на RCRCQ переносится справедливость основных приложений CRCQ. В частности, при выполнении условия RCRCQ в работе [4] были доказаны теоремы о дифференцируемости по направлениям функции оптимального значения в задаче с возмущениями параметров и получены сильные достаточные условия оптимальности второго порядка. Большой интерес в свое время вызвала работа L. Qi и Z. Wei, в которой для доказательства сходимости численных алгоритмов оптимизации было введено условие постоянной положительно-линейной зависимости (CPLD), обобщающее одновременно условие регулярности Мангасаряна-Фромовица и условие постоянного ранга.

Говорят, что допустимая точка $y^0$ удовлетворяет условию CPLD, если она удовлетворяет условию регулярности Мангасаряна-Фромовица или, в противном случае, для всех подмножеств индексов $J_1 \subset I(y^0),\ \ J_2 \subset I_0,$ и чисел $\lambda_i \quad i \in J_1 \cup J_2$ таких, что

$$\lambda_i \geq 0 \quad i \in J_1 \text{ и } \sum_{i \in J_1 \cup J_2} \lambda_i \nabla h_i(y^0) = 0, \quad \sum_{i \in J_1} \lambda_i + \sum_{i \in J_2} |\lambda|_i > 0,$$

система векторов $\nabla h_i(y) \quad i \in J_1 \cup J_2$ является линейно зависимой при всех $y$ из некоторой окрестности $y^0$.

L.Qi и Z.Wei выдвинули предположение, что CPLD должно быть условием регулярности, т.е. гарантировать существование множителей Лагранжа в точках локального минимума задачи NLP. Позже R.Andreani, J.M.Martinez и M.Schuverdt доказали справедливость данной гипотезы. Различные аспекты приложений RCRCQ и CPLD и их связь с другими условиями изучались в [5–9].

Хотя условие CPLD обладает широкой общностью, его выполнение не влечет за собой выполнение RCRCQ и возникает вопрос о его соотношении с известными ранее условиями регулярности ослабленного постоянного ранга. Позже на основе развитого в [3–4] метода было получено новое условие, названное ослабленным CPLD (или RCPLD). Однако в работе [10] было предложено и обосновано новое условие регулярности, названное ослабленным (обобщенным) условием Мангасаряна-Фромовица (RMFCQ). RMFCQ представляет собой условие не только более слабое по отношению к MFCQ, но и относительно CRCQ и RCRCQ, а также CPLD и RCPLD. Условие RMFCQ также обладает значительным преимуществом в практическом применении по сравнению с CRCQ, RCRCQ, CPLD и RCPLD , сохраняя при этом их основные достоинства, к которым, в первую очередь, относится хорошая обусловленность (сохранение условия регулярности и в некоторой окрестности исследуемой точки) и наличие эффективных оценок расстояния до множества допустимых точек.

Отметим, что несколько позже условие регулярности, RMFCQ было независимо введено в работе [11] под названием CRSC (constant rank of the subspace component condition). Следуя [10], дадим определение условия RMFCQ и исследуем некоторые свойства точек, в которых RMFCQ выполняется.

Представим множество индексов $I(y)$ в точке $y \in C$ в виде разбиения на два множества $I(y) = I^a(y) \cup I^+(y)$, где $I^a(y) \cap I^+(y) = \varnothing$ и множество $I^a(y)$ состоит из тех и только тех индексов $i \in I(y)$, для которых $\langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0$ для всех $\bar{y} \in \Gamma_C(y)$, а $I^+(y) = I(y) \setminus I^a(y)$.

**Определение 1.** *Будем говорить, что в точке $y^0 \in C$ выполнено ослабленное условие регулярности Мангасаряна-Фромовица* RMFCQ, *если система векторов $\{\nabla h_i(y),\ i \in I_0 \cup I^a(y)\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности этой точки. Непосредственно из определения индексного множества $I^a(y)$ вытекает следующая лемма.*

**Лемма 1**. *Пусть $y^0 \in C$. Тогда существует вектор $\bar{y}^0$, такой, что* $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y}^0 \rangle = 0 \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0), \quad \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y}^0 \rangle < 0 \quad i \in I^+(y^0)$.

*Доказательство*. В случае если $I^+(y) = \varnothing$, оно будет выполнено тривиально. Пусть $I^+(y) \neq \varnothing$. Пусть $i \in I^+(y)$. Тогда $\langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle \le 0$ для всех $\bar{y} \in \Gamma_C(y)$. С другой стороны $i \notin I^a(y)$, следовательно, найдется вектор $\bar{y}^i \in \Gamma_C(y)$, такой, что $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^i \rangle < 0$. Построим вектор $\bar{y}^0 = \sum\limits_{i \in I^+(y)} t_i \bar{y}^i$, где все $t_i > 0$. Тогда $\bar{y}^0 \in \Gamma_C(y)$, и для любого $k \in I^+(y)$. Получим $\left\langle \nabla h_k(y), \bar{y}^0 \right\rangle = \sum\limits_{i \in I^+(y)} t_i \left\langle \nabla h_k(y), \bar{y}^i \right\rangle = \sum\limits_{i \in I^+(y) \setminus k} t_i \left\langle \nabla h_k(y), \bar{y}^i \right\rangle + t_k \left\langle \nabla h_k(y), \bar{y}^k \right\rangle < 0$.

Из леммы 1 следует, что для любой точки $y^0 \in C$ имеет место

**Утверждение 1.** Пусть $y^0 \in C$. Тогда

$$ri\Gamma_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \ \ i \in I_0 \cup I^a(y^0), \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle < 0 \quad i \in I^+(y^0)\},$$

$$aff\,\Gamma_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \ \ i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}.$$

Будем называть ограничения с индексами $i \in I^a(y)$ существенно активными для множества $\Gamma_C(y)$.

Следующая лемма получается незначительной модификацией теоремы 17.7 [12].

**Лемма 2 .** *Пусть $y \in C$. Для того чтобы $i \in I^a(y)$ достаточно, чтобы существовал вектор $\lambda \in \Lambda_0(y)$ такой, что $\lambda_i > 0$. Если $I^a(y) \neq \varnothing$, то данное условие является и необходимым.*

Пусть $y^0 \in C$. Рассмотрим индексное множество $I^\#$ такое, что $I^a(y^0) \subset I^\# \subset I(y^0)$. Введем множество $C_\# = \{y \in R^m \mid h_i(y) \le 0 \quad i \in I^\#,\ h_i(y) = 0 \quad i \in I_0\}$. И его линеаризованный касательный конус в точке $y^0 \in C_\#$ $\Gamma_{C_\#}(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle \le 0 \quad i \in I^\#, \ \ \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0\}$.

Обозначим через $I^{a\#}(y^0)$ множество индексов всех существенно активных ограничений для $\Gamma_{C_\#}(y^0)$. Иными словами, пусть $I^{a\#}(y^0) = \{i \in I^\# \mid \ \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \ \ \forall \bar{y} \in \Gamma_{C_\#}(y^0)\}$.

**Лемма 3.** *Пусть* $I^a(y^0) \subset I^{\#} \subset I(y^0)$. *Тогда* $I^a(y^0) = I^{a\#}(y^0)$.

*Доказательство*. Покажем, что $I^a(y^0) \subset I^{a\#}(y^0)$. Действительно, если $I^a(y^0) = \varnothing$, то данное включение выполняется. Пусть $I^a(y^0) \neq \varnothing$ и $i \in I^a(y^0)$. Тогда по лемме 2 существует вектор $\lambda \in \Lambda_0(y^0)$ такой, что $\lambda_i > 0$ , при этом $\lambda_j = 0$ как для всех $j \in I \setminus I(y^0)$, так и для $j \in I(y^0) \setminus I^a(y^0)$ (иначе в силу леммы 2 эти ограничения были бы тоже существенно активными для $\Gamma_C(y^0)$, что невозможно в виду определения множества $I^a(y^0)$). Тогда существует вектор $\lambda \in \Lambda_0^{\#}(y^0) = \{\lambda \in \mathrm{R}^p \mid \sum\limits_{j \in I_0 \cup I^{\#}} \lambda_j \nabla h_j(y) = 0,\ \lambda_j \geq 0 \quad j \in I^{\#}\}$ такой, что $\lambda_i > 0$. В таком случае по лемме 2 $i \in I^{a\#}(y^0)$. Таким образом, $I^a(y^0) \subset I^{a\#}(y^0)$. Обратно, поскольку $\Gamma_{C_{\#}}(y^0) \supset \Gamma_C(y^0)$, то все существенно активные ограничения для $\Gamma_{C_{\#}}(y^0)$ останутся существенно активными и для $\Gamma_C(y^0)$. Следовательно, $I^a(y^0) \supset I^{a\#}(y^0)$.

**Лемма 4** ([10,11]). *Если в точке* $y^0 \in C$ *выполнено условие* $RMFCQ$, *то*

1) $T_C(y^0) = \Gamma_C(y^0)$;

2) условие $\mathrm{RMFCQ}$ выполняется и в некоторой окрестности этой точки на $C$ ;

3) существует окрестность $V(y^0)$ точки $y^0$ такая, что $h_i(y) = 0$ при $i \in I^a(y^0)$ для всех точек $y \in C \cap V(y^0)$.

**Лемма 5**. *Пусть условие* $RMFCQ$ *выполнено в точке* $y^0 \in C$ . *Тогда для всех* $y \in C$ *из некоторой окрестности* $y^0$ *справедливо включение* $I^a(y^0) \subset I^a(y)$.

*Доказательство.* Пусть в точке $y^0 \in C$ выполнено условие $\mathrm{RMFCQ}$. Тогда в силу леммы 4 оно выполнено и для любой точки $y \in C$ из достаточно малой окрестности точки $y^0$ , причем $T_C(y) = \Gamma_C(y)$. Принимая во внимание определение касательного конуса $T_C(y)$, получим $y + t\bar{y} + o(t) \in C$ при достаточно малых $t > 0$ для любого $\bar{y} \in \Gamma_C(y)$. Отсюда по лемме 4 $h_i(y + t\bar{y} + o(t)) = 0,\ h_i(y) = 0$ и, следовательно, $\langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0$ при всех $i \in I^a(y^0)$. Последнее означает, что $I^a(y^0) \cap I(y) \subset I^a(y)$. Но поскольку $h_i(y) = 0$ для всех $i \in I^a(y^0)$, то $I^a(y^0) \subset I(y)$ и, следовательно, $I^a(y^0) \subset I(y)$, что означает $I^a(y^0) \subset I^a(y)$

Пусть $X \subset R^n$. Рассмотрим многозначное отображение $G : x \mapsto G(x)$, ставящее в соответствие каждому $x \in X$ множество $G(x) \subset R^m$. Следуя [13], определим топологические нижний и верхний пределы многозначного отображения $G$.

Нижним топологическим пределом многозначного отображения $G$ в точке $x^0 \in clX$ на множестве $X$ называется множество

$$\liminf_{x \xrightarrow{X} x^0} G(x) = \{y \in R^m \mid \forall x^k \to x^0, x^k \in X,\ \textit{найдется}$$
$$\textit{последовательность } y^k \in G(x^k)\ \ k = 1,2,...\ \textit{такая,что } y^k \to y\}.$$

Верхним топологическим пределом многозначного отображения $G$ в точке $x^0 \in clX$ на множестве $X$ называется множество

$$\limsup_{x \xrightarrow{X} x^0} G(x) = \{y \in R^m \mid \textit{существуют последовательность } x^k \to x^0, x^k \in X,$$
$$\textit{и последовательность } y^k \in G(x^k)\ \ k = 1,2,...\ \textit{такая,что } y^k \to y\}.$$

Многозначное отображение $G$ называется полунепрерывным снизу (п.н.сн.) в точке $x^0 \in clX$ на множестве $X$, если $\liminf\limits_{x \xrightarrow{X} x^0} G(x) \supset G(x^0)$. Многозначное отображение $G$ называется полунепрерывным сверху (п.н.св.) в точке $x^0 \in clX$ на множестве $X$, если $\limsup\limits_{x \xrightarrow{X} x^0} G(x) \subset G(x^0)$.

Пусть $K \subset R^m$ выпуклый конус. Обозначим $K^* = \{\hat{y} \in R^m \mid \langle \hat{y}, \bar{y} \rangle \le 0 \quad \forall \bar{y} \in K\}$ конус двойственный к конусу $K$.

Рассмотрим многозначное отображение $K(\cdot)$, ставящее в соответствие каждой точке $y \in C$ конус $K(y) \subset R^m$, и многозначное отображение $K^*(\cdot)$, ставящее в соответствие каждой точке $y \in C$ конус $K^*(y)$.

**Лемма 6.** *Пусть многозначное отображение $K(\cdot)$ п.н.сн. в точке $y^0 \in C$ на множестве $Y \subset C$. Тогда отбражение $K^*(\cdot)$ п.н.св. в данной точке на данном множестве.*

*Доказательство.* Возьмем любой вектор $\bar{y} \in K(y^0)$. Пусть $\hat{y} \in \limsup\limits_{y \xrightarrow{Y} y^0} K^*(y)$. Тогда найдутся последовательности $y^k \to y^0$ такая, что $y^k \in Y$ при всех $k = 1, 2, \ldots$, и $\hat{y}^k \to \hat{y}$ такая, что $\hat{y}^k \in K^*(y^k)$ $k = 1, 2, \ldots$ . С другой стороны, поскольку $\bar{y} \in K(y^0)$, из полунепрерывности снизу многозначного отображения $K(\cdot)$ в точке $y^0 \in C$ на множестве $Y$ следует, что существует последовательность $\bar{y}^k \in K(y^k)$ $k = 1, 2, \ldots$ такая, что $\bar{y}^k \to \bar{y}$. В таком случае $\langle \hat{y}^k, \bar{y}^k \rangle \le 0$ при всех $k = 1, 2, \ldots$, откуда $\langle \hat{y}, \bar{y} \rangle \le 0$ для любого $\bar{y} \in K(y^0)$. Следовательно, $\hat{y} \in K^*(y^0)$ и $\limsup\limits_{y \xrightarrow{Y} y^0} K^*(y) \subset K^*(y^0)$.

## Условие *R*-регулярности

При исследовании задач оптимизации важную роль играет также следующее условие, являющееся достаточно общим условием регулярности, и одновременно обладающее полезным в практическом плане свойством, которое позволяет оценить расстояние до множества допустимых точек. Условию R-регулярности (или error bound property во многих публикациях) и его приложениям посвящено большое число исследований [13–17].

Пусть $|y|$ — евклидова норма вектора $y$, $d_C(y) = \inf\limits_{v \in C} |v - y|$. Через $V_\delta(y)$ будем обозначать окрестность точки $y$ радиуса $\delta$.

**Определение 2.** *Следуя [13–17], будем говорить, что множество $C$ R-регулярно в точке $y^0 \in C$ (или в данной точке имеет место error bound property), если найдутся число $\alpha > 0$ и окрестность $V(y^0) = V_\delta(y^0)$ точки $y^0$, такие, что $d_C(y) \le \alpha \max\{0,\ h_i(y) \quad i \in I,\ |h_i(y)| \quad i \in I_0\}$ для всех $y \in V(y^0)$.*

В работах [3, 4] при дополнительных предположениях на ограничения задачи получено двойственное описание определения R-регулярности в терминах множителей Лагранжа. Докажем его справедливость, не прибегая к дополнительным предположениям о виде ограничений.

Пусть $v \in R^m$, $v \notin C$. Обозначим через $\Pi_C(v)$ множество точек из $C$, ближайших к точке $v$. Очевидно, эти точки являются решениями задачи нелинейного программирования $f_v(y) \to \min$, $y \in C$, где $f_v(y) = |y - v|$. Обозначим $L_v(y, \lambda) = f_v(y) + \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(y)$, где $\lambda_i \ge 0$ $i \in I$ .

Пусть

$$\Lambda_v(y)=\{\lambda\in \mathrm{R}^p \mid \nabla f_v(y)+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\nabla h_i(y)=0,\ \lambda_i\geq 0\ \ i\in I(y),\ \lambda_i=0\ \ i\in I\setminus I(y)\},$$

$$\Lambda_v^M(y)=\{\lambda\in\Lambda_v(y) \mid \ \sum_{i=1}^{p}|\lambda_i|\leq M\}.$$

**Теорема 1.** Следующие утверждения равносильны:

*a*) множество *C* *R*-регулярно в точке $y^0\in C$;

*b*) существуют числа $M>0$ и $\delta>0$ такие, что $\Lambda_v^M(y)=\{\lambda\in\Lambda_v(y) \mid \ \sum_{i=1}^{p}|\lambda_i|\leq M\}\neq\varnothing$ для всех $v\in V_\delta(y^0)\setminus C$ и всех $y=y(v)\in\Pi_C(v)$.

*Доказательство.* 1) $(a)\Rightarrow(b)$. Возьмем $\alpha>0$ и $\delta>0$ из определения *R*-регулярности. Пусть $v\in V_\delta(y^0)\setminus C$ и $y=y(v)\in\Pi_C(v)$. Тогда в силу предложения 2.4.3 [18] $y=y(v)$ является решением следующей задачи: $f_v(z)+d_C(z)\to\min,\ z\in R^m$.

Положим $M=\alpha,\ \bar\Lambda_M(y)=\{\lambda\in R^p \mid \ \lambda_i h_i(y)=0,\ \ \lambda_i\geq 0\ i\in I,\ \sum_{i=1}^{p}|\lambda_i|\leq M\}$.

Возьмем положительное число $\varepsilon$ такое, что $\varepsilon<\delta$, $V_\varepsilon(y)\subset V_\delta(y^0)$ и $h_i(z)<0$ для всех $z\in V_\varepsilon(y)$ и всех $i\in I(y)$. Тогда

$$\begin{aligned}
f_v(y)&\leq f_v(z)+d_C(z)\leq f_v(z)+\alpha\max\left\{0,\ h_i(z)\quad i\in I,\ |h_i(z)|\quad i\in I_0\right\}=\\
&=f_v(z)+M\max\left\{0,\ h_i(z)\quad i\in I(y),\ |h_i(z)|\quad i\in I_0\right\}=\\
&=f_v(z)+\max\{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i h_i(z) \mid \ \lambda\in\bar\Lambda_M(y)\}=\\
&=\max\{L_v(z,\lambda) \mid \ \lambda\in\bar\Lambda_M(y)\},
\end{aligned}$$

для всех $z\in V_\varepsilon(y)$.

Поскольку $L_v(y,\lambda)=f_v(y)$, функция $Q(z)=\max\{L_v(z,\lambda) \mid \ \lambda\in\bar\Lambda_M(y)\}$ имеет локальный минимум в точке $y$ и, следовательно, ее производная по направлениям неотрицательна в данной точке, то есть $Q'(y;\bar y)\geq 0$ для всех $\bar y\in R^m$. Принимая во внимание [13], что $Q'(y;\bar y)=\max\{\langle\nabla L_v(y,\lambda),\bar y\rangle \mid \ \lambda\in\bar\Lambda_M(y)\}$, получаем $\delta^*(\bar y\mid\nabla L_v(y,\bar\Lambda_M(y)))\geq 0$ для всех $\bar y\in R^m$ , где через $\delta^*(\bar y\mid A)$ обозначена опорная функция множества $A$. Данное неравенство означает, что $0\in\nabla L_v(y,\bar\Lambda_M(y))$ или иными словами $\Lambda_v^M(y)\neq\varnothing$.

2) $(b)\to(a)$. Если $y^0\in\operatorname{int}C$, утверждение (a) верно. Пусть $y^0\in bdC$. Возьмем $v\in V_\delta(y^0)\setminus C$ и $y=y(v)\in\Pi_C(v)$. Тогда $y=y(v)\in V_\delta(y^0)$ и существует вектор $\lambda\in\Lambda_v(y)$ такой, что

$$\frac{y-v}{|y-v|}+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\nabla h_i(y)=0,\ \lambda_i\geq 0\ \ i\in I(y),\ \lambda_i=0\ \ i\in I\setminus I(y)\quad .$$

Отсюда следует, что найдется число $\varepsilon>0$ такое, что $\varepsilon\leq\delta$ и для всех $v\in V_\varepsilon(y^0)\setminus C$ и соответствующих $y=y(v)\in\Pi_C(v)$ справедливо следующее:

$$|y-v| = \langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y), v-y \rangle \le \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (h_i(v) - h_i(y) + o(|v-y|)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(v) + (\sum_{i=1}^{p} \lambda_i) o(|v-y|)) \le \sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(v) + \frac{1}{2}\ \ |v-y|.$$

Следовательно,

$$d_C(v) = |v-y| \le 2\sum_{i\in I} |\lambda_i| \max(0, h_i(v) + \sum_{i\in I_0} |\lambda_i| |h_i(v)| \le 2M(\sum_{i\in I} \max(0, h_i(v) + \sum_{i\in I_0} |h_i(v)|).$$

Из последнего неравенства следует, что $d_C(v) \le 2Mp \max\{0, h_i(v)\ \ i\in I, |h_i(v)|\ \ i\in I_0\}$ для всех $v \in V_\varepsilon(y^0)$.

**Теорема 2.** *Пусть множество* $C$ *R-регулярно в точке* $y^0 \in C$. *Тогда* $T_C^{Cl}(y^0) = T_C(y^0) = \widehat{T}_C(y^0) = \Gamma_C(y^0)$.

*Доказательство*. Пусть $\bar{y} \in \Gamma_C(y^0)$ и $\bar{y} \ne 0$. Из *R*-регулярности множества $C$ в точке $y^0 \in C$ следует его *R*-регулярность в некоторой $\delta_0$-окрестности этой точки на множестве $C$. Возьмем число $\delta$ такое, чтобы $0 < \delta < 2^{-1}\delta_0$ и при всех $i \notin I(y^0)$ выполнялось неравенство $h_i(y) < 0$ для всех $y \in V_{2\delta}(y^0)$. Положим $t_0 = \delta|\bar{y}|^{-1}$. Тогда при всех $i \notin I(y^0)$ выполняется неравенство $h_i(y + t\bar{y}) < 0$ для всех $y \in V_\delta(y^0)$ и всех $t \in [0, t_0]$. В таком случае при всех $y \in V_\delta(y^0) \cap C$ и всех $t \in [0, t_0]$ в силу *R*-регулярности множества $C$ справедливо неравенство

$$d_C(y + t\bar{y}) - d_C(y) \le \alpha \max\{0,\ h_i(y+t\bar{y})\ \ \ i\in I,\ |h_i(y+t\bar{y})|\ \ \ i\in I_0\} =$$

$$= \alpha \max\{0,\ h_i(y+t\bar{y})\ \ \ i\in I(y^0),\ |h_i(y+t\bar{y})|\ \ \ i\in I_0\} =$$

$$= \alpha \max\{0,\ h_i(y) + t\langle \nabla h_i(y), \bar{y}\rangle + t\gamma_i\ \ \ i\in I(y^0),\ |h_i(y) + t\langle \nabla h_i(y), \bar{y}\rangle + t\gamma_i|\ \ \ i\in I_0\} \le$$

$$\le t\alpha \max\{0,\ \langle \nabla h_i(y), \bar{y}\rangle\ \ \ i\in I(y^0),\ |\langle \nabla h_i(y), \bar{y}\rangle|\ \ \ i\in I_0\} + t\gamma,$$

где

$$\gamma_i = \langle \nabla h_i(y + \tau_i t\bar{y}) - \langle \nabla h_i(y), \bar{y}\rangle,\ \tau_i \in (0,1),\ \gamma = \max\{|\gamma_i|\ \ \ i \in I_0 \cup I(y^0)\}.$$

Из данного неравенства следует

$$\xi(\bar{y}) = \limsup_{y \xrightarrow{C} y^0, t\downarrow 0} t^{-1}[d_C(y+t\bar{y}) - d_C(y)] \le$$

$$\le \alpha \max\{0,\ \langle \nabla h_i(y), \bar{y}\rangle\ \ \ i\in I(y^0),\ |\langle \nabla h_i(y), \bar{y}\rangle|\ \ \ i\in I_0\} = 0.$$

Таким образом, для любых последовательностей $t_k \downarrow 0$ и $y^k \xrightarrow{C} y^0$ справедливо $\lim_{k\to\infty} t_k^{-1} d_C(y^k + t_k\bar{y}) = 0.$

Последнее означает, что существует последовательность $v^k \to 0$ такая, что $y^k + t_k\bar{y} + t_k v^k \in C$ при всех $k = 1, 2, \ldots$ . Отсюда следует, что $\bar{y} \in T_C^{Cl}(y^0)$. Таким образом, $\Gamma_C(y^0) \subset T_C^{Cl}(y^0)$ и, поскольку обратное включение всегда справедливо, следовательно, $\Gamma_C(y^0) = T_C^{Cl}(y^0)$ и утверждение теоремы справедливо.

**Лемма** 7. *Пусть множество* $C$ *R-регулярно в точке* $y^0 \in C$. *Тогда* $\liminf_{y \xrightarrow{C} y^0} \Gamma_C(y) = \Gamma_C(y^0).$

*Доказательство*. Поскольку условие *R*-регулярности остается справедливым и в окрестности точки $y^0$ на множестве $C$, то в силу теоремы 2 $\Gamma_C(y) = T_C^{Cl}(y)$ для всех $y$ из данной окрестности. С другой стороны известно [13], что $\liminf\limits_{y \xrightarrow{C} y^0} \hat{T}_C(y) = T_C^{Cl}(y^0)$. С учетом теоремы 2 получаем требуемое утверждение.

**Ослабленное условие Мангасаряна-Фромовица и *R*-регулярность**

Докажем, что выполнение условия RMFCQ влечет наличие *R*-регулярности в исследуемой точке.

**Теорема 3.** *Пусть множество* $C$ *удовлетворяет в точке* $y^0 \in C$ *условию* RMFCQ. *Тогда множество* $C$ *R-регулярно в данной точке.*

*Доказательство.* Если $y^0 \in \operatorname{int} C$, то доказываемое утверждение верно. Пусть $y^0 \in bdC$.

1. Будем рассуждать от противного и предположим, что множество $C$ не является *R*-регулярным в точке $y^0 \in C$. Тогда существует последовательность $v^k \to y^0$, $v^k \notin C$, такая что $d_C(v^k) > k\max\{0, h_i(v^k)\ \ i \in I, \left|h_i(v^k)\right|\ \ i \in I_0\}$ для всех $k = 1, 2, \dots$ .

Пусть $y^k = y(v^k) \in \Pi_C(v^k)$, $\bar{v}^k = (v^k - y^k)\left|v^k - y^k\right|^{-1}$. Тогда $y^k \to y^0$, $\left|\bar{v}^k\right| = 1$.

Ввиду конечности индексного множества $I$ можно извлечь из последовательностей $\{v^k\}$ и $\{y^k\}$ подпоследовательности, на которых $I(y^k) \subset I(y^0)$ и множество индексов $I(y^k)$ постоянно. Поэтому, для простоты записи сохранив для этих подпоследовательностей те же обозначения $\{v^k\}$ и $\{y^k\}$, можно положить $I(y^k) = I^\# \subseteq I(y^0)$, где $I^\#$ не зависит от $y^k$.

Без потери общности рассуждений мы можем также предположить, что $\bar{v}^k \to \bar{v}$. Тогда

$$\left|v^k - y^k\right| > k\max\{0, \langle \nabla h_i(\tilde{v}^k), v^k - y^k\rangle\ \ i \in I^\#, \left|\langle \nabla h_i(\tilde{v}^k), v^k - y^k\rangle\right|\ \ i \in I_0\},$$

где $\tilde{v}^k = y^k + \tau_k(v^k - y^k)$, $0 \le \tau_k \le 1$. Из данного неравенства следует

$$\frac{1}{k} > \max\{0, \langle \nabla h_i(\tilde{v}^k), \bar{v}^k\rangle\ \ i \in I^\#, \left|\langle \nabla h_i(\tilde{v}^k), \bar{v}^k\rangle\right|\ \ i \in I_0\}$$

и, следовательно, $\max\{0, \langle \nabla h_i(y^0), \bar{v}\rangle\ \ i \in I^\#, \left|\langle \nabla h_i(y^0), \bar{v}\rangle\right|\ \ i \in I_0\} \le 0$.

Положив $C_\# = \{y \in R^m \mid h_i(y) \le 0\quad i \in I^\#\ ,\ h_i(y) = 0\quad i \in I_0\}$, получаем из последнего неравенства:
$\bar{v} \in \Gamma_{C_\#}(y^0)$, где $\Gamma_{C_\#}(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y}\rangle \le 0\quad i \in I^\#,\ \ \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y}\rangle = 0,\quad i \in I_0\}$.

2. С другой стороны, поскольку условие RMFCQ в точке $y^0$ влечет в силу леммы 4 выполнение условия RMFCQ и в некоторой ее окрестности, то, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что RMFCQ выполняется и в точках $y^k$ и, следовательно, существуют множители Лагранжа $\lambda^k \in R^p$, для которых

$$\frac{v^k - y^k}{\left|v^k - y^k\right|} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k),\ \lambda_i^k \ge 0\quad i \in I,\ \text{и}\ \lambda_i^k = 0\ \text{для}\ i \in (I \setminus I^\#)\ .$$

Последнее условие можно переписать в виде

$$\bar{v}^k = \sum_{i \in I_0 \cup I^\#} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k),\ \lambda_i^k \ge 0\quad i \in I^\#,$$

откуда с учетом теоремы о двойственном конусе многогранного конуса следует, что $\bar{v}^k \in [\Gamma_{C_\#}(y^k)]^*$.

Нетрудно видеть, что

$$\Gamma_{C_\#}(y^k) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^k), \bar{y}\rangle \le 0\quad i \in I^\#,\ \ \langle \nabla h_i(y^k), \bar{y}\rangle = 0,\quad i \in I_0\},$$

следовательно, $\Gamma_{C_\#}(y^k) = \Gamma_C(y^k)$ при всех $k = 1, 2, \ldots$.

В силу леммы 4 $I^a(y^0) \subset I^\#$. Тогда по лемме 3 , условия которой выполнены для выбранного множества $I^\#$, и согласно утверждению 1, получаем $ri\Gamma_{C_\#}(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle < 0 \quad i \in I^\# \setminus I^a(y^0), \ \ \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}$.

Возьмем произвольный вектор $\bar{y} \in ri\Gamma_{C_\#}(y^0)$. Данный вектор удовлетворяет системе $\langle \nabla h_i(y^0), \ \bar{y} \rangle = 0, \ i \in I_0 \cup I^a(y^0), \ \langle \nabla h_i(y), \ \bar{y} \rangle < 0, \ i \in I^\# \setminus I^a(y^0).$

В силу условия RMFCQ для множества $C$ в точке $y^0 \in C$ можно, не ограничивая общности, считать, что $rank\{\nabla h_i(y^k) \ \ i \in I_0 \cup I^a(y^0)\} = rank\{\nabla h_i(y^0) \ \ i \in I_0 \cup I^a(y^0)\} = l$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ . Следовательно, существует максимальная линейно независимая подсистема $\{\nabla h_i(y^0) \ \ i \in J \subset I_0 \cup I^a(y^0)\}$ системы $\{\nabla h_i(y^0) \ \ i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}$, которая остается максимальной линейно независимой подсистемой $\{\nabla h_i(y^k) \ \ i \in J \subset I_0 \cup I^a(y^0)\}$ в системе векторов $\{\nabla h_i(y^k) \ \ i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}$. Для простоты будем считать, что $J = \{1, \ldots, l\}$.

Тогда система уравнений $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)$ равносильна системе

$$\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \quad i \in J \ . \tag{1}$$

Для определенности считаем, что базисный минор системы уравнений (1) расположен в верхнем левом углу соответствующей матрицы . Тогда систему (1) можно записать в виде $B_1(y^0)\bar{y}^1 + B_2(y^0)\bar{y}^2 = 0,$ где $\bar{y} = (\bar{y}^1, \bar{y}^2), \ \bar{y}^1 = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_l), \ \ \bar{y}^2 = (\bar{y}_{l+1}, \ldots, \bar{y}_m)$ ,

$$B_1(y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1(y)}{\partial y_1} \ldots\ldots \dfrac{\partial h_1(y)}{\partial y_l} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial h_l(y)}{\partial y_1} \ldots\ldots \dfrac{\partial h_l(y)}{\partial y_l} \end{bmatrix}, \quad B_2(y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1(y)}{\partial y_{l+1}} \ldots\ldots \dfrac{\partial h_1(y)}{\partial y_m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial h_l(y)}{\partial y_{l+1}} \ldots\ldots \dfrac{\partial h_l(y)}{\partial y_m} \end{bmatrix}.$$

Отсюда $\bar{y}^1 = -B_1^{-1}(y^0)B_2(y^0)\bar{y}^2$. Построим вектор $\bar{y}^k = (\bar{y}^{1k}, \bar{y}^{2k})$ следующим образом: $\bar{y}^{1k} = -B_1^{-1}(y^k)B_2(y^k)\bar{y}^2, \ \bar{y}^{2k} = \bar{y}^2.$ Тогда $\langle \nabla h_i(y^k), \bar{y}^k \rangle = 0 \quad i \in J$ и $\bar{y}^k \to \bar{y}$ при $k \to \infty$. Кроме того, при $i \in I^\# \setminus I^a(y^0)$ справедливо $\left| \langle \nabla h_i(y^k), \bar{y}^k \rangle - \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle \right| \to 0$ и, следовательно, $\langle \nabla h_i(y^k), \bar{y}^k \rangle < 0$ при достаточно больших $k$. Таким образом, для любого $\bar{y} \in ri\Gamma_{C_\#}(y^0)$ существует последовательность $\bar{y}^k \in \Gamma_{C_\#}(y^k)$ такая, что $\bar{y}^k \to \bar{y}$. Последнее означает, что $\liminf\limits_{k\to\infty} \Gamma_{C_\#}(y^k) \supset ri\Gamma_{C_\#}(y^0)$, откуда с учетом замкнутости множеств $\liminf\limits_{k\to\infty} \Gamma_{C_\#}(y^k)$ и $\Gamma_{C_\#}(y^0)$ получаем $\liminf\limits_{k\to\infty} \Gamma_{C_\#}(y^k) \supset \Gamma_{C_\#}(y^0)$. Следовательно, многозначное отображение $\Gamma_{C_\#}(y)$ полунепрерывно снизу в точке $y^0$ на последовательности $y^k \to y^0$. В таком случае по лемме 6 конус $[\Gamma_{C_\#}(y)]^*$ двойственный к $\Gamma_{C_\#}(y)$ будет полунепрерывным сверху в точке $y^0$ на последовательности $y^k \to y^0$. С учетом доказанного ранее включения $\bar{v}^k \in [\Gamma_{C_\#}(y^k)]^*$ и того, что $\bar{v}^k \to \bar{v}$, отсюда следует $\bar{v} \in [\Gamma_{C_\#}(y^0)]^*$. Но, с другой стороны, в первой части доказательства получено включение $\bar{v} \in \Gamma_{C_\#}(y^0)$. Поскольку $|\bar{v}| \neq 0$, последнее невозможно. Полученное противоречие говорит о справедливости утверждения теоремы.

Следующий пример показывает, что утверждение теоремы 3 не допускает обращения и из *R*-регулярности в исследуемой точке вообще говоря не следует условие RMFCQ в этой точке.

**Пример 1.** Пусть $C=\{y\in\mathbb{R}^2 \left| y_2-y_1^3\le 0,\ -y_2-y_1^3\le 0,\ y_1=0\right\},\quad y^0=(0,0).$ Тогда
$\nabla h_1(y)=\begin{pmatrix}-3y_1^2\\ 1\end{pmatrix},\ \nabla h_2(y)=\begin{pmatrix}-3y_1^2\\ -1\end{pmatrix}.\ \nabla h_3(y)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$

Поскольку $\Gamma_C(y^0)=\{\bar y\in R^2 \mid \ \bar y_1=\bar y_2=0\}$, то все ограничения типа неравенства являются существенно активными в точке $y^0$.

Далее, $rank\{\nabla h_1(y),\nabla h_2(y),\nabla h_3(y)\}=rank\begin{pmatrix}-3y_1^2 & -3y_1^2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}=2$,

следовательно, выполнено условие RMFCQ. С другой стороны, возьмем последовательность положительных чисел $\varepsilon_k\to 0$. Тогда для $v^k=(-\varepsilon_k,0)$ получим $\max\{0,h_1(v^k),h_2(v^k),\left|h_3(v^k)\right|\}=\max\{0,\varepsilon_k^3,\varepsilon_k^3,\left|0\right|\}$, в то время как $d_C(v^k)=\varepsilon_k$. То есть, условие *R*-регулярности не может выполняться.

**Лемма 8.** *Если в точке* $y^0\in C$ *выполнено условие R-регулярности, то существует окрестность* $V(y^0)$ *точки* $y^0$ *такая, что* $I^a(y)\subset I^a(y^0)$ *для всех* $y\in V(y^0)\cap C$ .

*Доказательство.* Предположим противное. Тогда найдется последовательность $\{y^k\}\subset C$ такая, что $y^k\to y^0$ и для каждого $k$ найдется индекс $i_k\in I^a(y^k)$ такой, что $i_k\notin I^a(y^0)$. Поскольку число элементов в $I$ конечно, не ограничивая общности можно считать $I(y^k)=I^\#\subset I(y^0)$ и $I^a(y^k)=I^{\#a}$, где $I^\#$ и $I^{\#a}$ не зависит от $k$. Далее, из последовательности $\{i_k\}$ можно выделить постоянную подпоследовательность $\{i_0\}$ (для простоты обозначений можно считать, что это сама $\{i_k\}$, то есть $i_k=i_0$ для всех $k$). Таким образом, существует $i_0\in I^{\#a}$, но $i_0\notin I^a(y^0)$. Возьмем произвольный вектор $\bar y\in\Gamma_C(y^0)$. Тогда из леммы 7 следует, что существует последовательность $\bar y^k\in\Gamma_C(y^k)$ такая, что $\bar y^k\to\bar y$ при $k\to\infty$. Перейдем к пределу в системе равенств и неравенств

$$\langle\nabla h_i(y^k),\bar y^k\rangle=0\quad i\in I_0\cup I^{\#a},\langle\nabla h_i(y^k),\bar y^k\rangle\le 0\quad i\in I^\#\setminus I^{\#a}$$

при $k\to\infty$. Получим $\langle\nabla h_i(y^0),\bar y\rangle=0\quad i\in I_0\cup I^{\#a},\langle\nabla h_i(y^0),\bar y\rangle\le 0\quad i\in I^\#\setminus I^{\#a}$, для любого $\bar y\in\Gamma_C(y^0)$. Таким образом, $\langle\nabla h_{i_0}(y^0),\bar y\rangle=0$ для всех $\bar y\in\Gamma_C(y^0)$. Это означает, что $i_0\in I^a(y^0)$. Полученное противоречие позволяет сделать вывод о справедливости утверждения леммы.

**Следствие 1.** Пусть в точке $y^0\in C$ выполнено условие RMFCQ. Тогда существует окрестность $V(y^0)$ данной точки такая, что $I^a(y^0)=I^a(y)$ для всех $y\in V(y^0)\cap C$.

Справедливость следствия непосредственно следует из теоремы 3 с учетом лемм 5 и 8.

Следует отметить то обстоятельство, что условия регулярности описывают качество ограничений, дающих описание множества допустимых точек, а не свойства самого этого множества. В этом плане их суть точнее выражается термином constraint qualifications. Выше говорилось о том, что условия MFCQ и CRCQ независимы друг от друга, то есть существуют примеры, где выполняется MFCQ и не выполняется CRCQ и обратно. В то же время в работе [19] показано, что если условие CRCQ выполнено в точке $y^0\in C$, то удалением части ограничений и преобразованием некоторых ограничений из неравенств в равенства можно получить множество локально не отличающееся от $C$, для которого однако будет справедливо условие MFCQ в точке $y^0$. Аналогичный характер, хотя и более сложный, имеют связи CRCQ и RCRCQ. Если условие RCRCQ выполнено в точке $y^0 \in C$, то существуют локальные диффеоморфизмы, переводящие множество $C$ в множества с другой параметризацией, для которых в отвечающей $y^0$ точке выполняются соответственно CRCQ и MFCQ. Следующее утверждение демонстрирует связь RMFCQ с MFCQ.

**Теорема 4**. *Пусть условие регулярности RMFCQ выполнено в* $y^0 \in C$. *Тогда существует окрестность* $V(y^0)$ *такая, что множество* $C \cap V(y^0)$ *может быть записано с помощью ограничений, для которых в точке* $y^0$ *выполняется условие Мангасаряна-Фромовица.*

*Доказательство*. Пусть RMFCQ выполнено в $y^0 \in C$. То существует окрестность $V(y^0)$ такая, что $rank\{\nabla h_i(y),\ i \in I_0 \cup I^a(y)\} = l$ для всех $y \in C \cap V(y^0)$. Следовательно, существует индексное множество $J \subset I_0 \cup I^a(y^0)$ такое, что $rank\{\nabla h_i(y)\ \ i \in J\} = l$ во всех точках $y \in C \cap V(y^0)$. Положим

$C' = \{y \in R^m \mid\ h_i(y) \le 0 \quad i \in I \setminus I^a(y^0),\ \ h_i(y) = 0 \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}$ и

$C'' = \{y \in R^m \mid\ h_i(y) \le 0 \quad i \in I \setminus I^a(y^0),\ \ h_i(y) = 0 \quad i \in J\}$.

Очевидно $C' \subset C$. С другой стороны в силу леммы 4 можно выбрать окрестность $V(y^0)$ столь малой, что $C \cap V(y^0) \subset C' \cap V(y^0)$. Следовательно, $C \cap V(y^0) = C' \cap V(y^0)$.

Для простоты будем считать, что $N = \left| I_0 \cup I^a(y^0) \right|$ и $J = \{1, \ldots, l\}$. Тогда (см. [20], стр. 504-505) в системе функций $h_i(y)\ i \in I_0 \cup I^a(y^0)$ первые $l$ уравнений функционально независимы, а остальные в некоторой окрестности точки $y^0$ ( которую мы можем, не ограничивая общности, считать совпадающей с $V(y^0)$) выражаются через них

$h_i(y) = G_i(h_1(y), \ldots\ldots, h_l(y)) \quad i = l+1, \ldots., N$,

где $G_i(z)\ \ i = l+1, \ldots., N$ – гладкие в некоторой окрестности точки $z^0 = (h_1(y^0), \ldots., h_l(y^0)) = (0, \ldots., 0)$ функции. В таком случае $G_i(0, \ldots\ldots, 0) = 0 \quad i = l+1, \ldots., N$ и система уравнений $h_i(y) = 0\ i \in I_0 \cup I^a(y^0)$ в окрестности $V(y^0)$ равносильна системе $h_i(y) = 0 \quad i \in J$ с дополнительными условиями $G_i(h_1(y), \ldots\ldots, h_l(y)) = 0 \quad i = l+1, \ldots., N$. Следовательно, $V(y^0)$ можно выбрать столь малой, что при $y \in C'' \cap V(y^0)$ получаем $h_i(y) = 0 \quad i \in J$ и значит $G_i(h_1(y), \ldots\ldots, h_l(y)) = 0 \quad i = l+1, \ldots., N$. Это означает, что $y \in C'$ и, следовательно, $C'' \cap V(y^0) \subset C'$. Поскольку $C' \subset C''$, отсюда $C'' \cap V(y^0) = C' \cap V(y^0)$. Таким образом, существует окрестность $V(y^0)$ такая, что $C \cap V(y^0) = C'' \cap V(y^0)$. Тогда в силу леммы 1 в точке $y^0 \in C'' \cap V(y^0)$ выполняется условие MFCQ . ?

Отметим, что связь условий RMFCQ и R-регулярности и их приложения и обобщения изучались в работах [21–25].

### *R*-регулярность и ограниченное ослабленное условие Мангасаряна-Фромовица

Недавно опубликованная работа [26] посвящена доказательству интересного результата, касающегося системы решений нелинейных уравнений. Именно в [26] доказано, что из *R*-регулярности множества с ограничениями типа равенства $C = \{y \in R^m \mid\ h_i(y) = 0 \quad i = 1, \ldots, p\}$ в точке $y^0$ этого множества следует выполнение условия

$rank\{\nabla h_i(y) \;\; i=1,...,p\} = rank\{\nabla h_i(y^0) \;\; i=1,...,p\}$ для всех точек $y$ из некоторой окрестности точки $y^0$ на множестве $C$.

Цель работы – показать, что справедливо гораздо более общее утверждение, касающееся множества допустимых точек $C=\{y\in R^m \mid h_i(y)\le 0 \quad i\in I \;,\; h_i(y)=0 \quad i\in I_0\}$ в задаче NLP.

**Определение 3.** *Будем говорить, что в точке $y^0\in C$ выполнено ограниченное ослабленное условие регулярности Мангасаряна-Фромовица ($RMF_C$), если для всех точек $y$ из некоторой окрестности $y^0$ на множестве $C$ имеет место равенство*
$rank\{\nabla h_i(y) \;\; i\in I_0\cup I^a(y^0)\} = rank\{\nabla h_i(y^0) \;\; i\in I_0\cup I^a(y^0)\}$.

Следующий пример показывает, что условия RMFCQ и $\mathrm{RMF_C}$, вообще говоря, не совпадают.

**Пример 2.** Пусть $C=\{y\in R^2 \mid \; y_2=0,\; y_2^2e^{y_1^2}\le 0\}$, $y^0=(1,0)$. Тогда

$\Gamma_C(y^0)=\{\bar y\in R^2 \mid \; \bar y_2=0\}$. Далее, $h_1(y)=y_2,\; h_2(y)=y_2^2e^{y_1^2}$, $\langle\nabla h_2(y^0),\bar y\rangle=0$ для любого $\bar y\in\Gamma_C(y^0)$, и , следовательно, $I^a(y^0)=\{2\}$. Тогда

$rank\{\nabla h_i(y) \;\; i=1,2\} = rank\begin{pmatrix} 0 & 2y_1y_2^2e^{y_1^2} \\ 1 & 2y_2e^{y_1^2}\end{pmatrix}=1$ на множестве $C$.

С другой стороны, на последовательности $y^k=(1,1/k)\to y^0$ получаем $rank\{\nabla h_i(y^k) \;\; i=1,2\}=2$.

Пусть $B=\{y\in R^m \mid |y|<1\},\; \bar B=\{y\in R^m \mid |y|\le 1\}$.

**Лемма 9.** *Пусть множество $C$ R-регулярно в точке $y^0\in C$. Тогда для любого положительного числа $\varepsilon$ найдется число $\delta>0$ такое, что $\Gamma_C(y^0)\cap\bar B\subset\Gamma_C(y)+\varepsilon B$ при всех $y\in(y^0+\delta B)\cap C$.*

*Доказательство.* Допустим противное. Тогда существуют число $\mu>0$ и последовательность $\{y^k\}$ в $C$, которая сходится к $y^0$, причем для любого $k=1,2,...$ найдется $\bar y^{0k}\in\Gamma_C(y^0)\cap\bar B$ и $d_{\Gamma_C(y^k)}(\bar y^{0k})\ge\mu>0$. Поскольку последовательность $\{\bar y^{0k}\}$ ограничена, то, не ограничивая общности, можно считать, что $\bar y^{0k}\to\bar y^0$, где $\bar y^0\in\Gamma_C(y^0)\cap\bar B$. Но из леммы 7 следует существование последовательности $\bar y^k\in\Gamma_C(y^k)$ такой, что $\bar y^k\to\bar y^0$. Следовательно, $0<\mu\le|\bar y^{0k}-\bar y^k|\le|\bar y^{0k}-\bar y^0|+|\bar y^k-\bar y^0|$ для всех $k=1,2,...$, что невозможно.

**Теорема 5.** *Пусть множество $C$ R-регулярно в точке $y^0\in C$. Тогда в этой точке выполняется условие $RMF_C$.*

*Доказательство.* Пусть множество $C$ *R*-регулярно в точке $y^0\in C$. Тогда в силу леммы 2 для любого вектора $\bar y\in\Gamma_C(y^0)$ и любой последовательности $y^k\to y^0$ такой, что $y^k\in C$, существует последовательность $\bar y^k\in\Gamma_C(y^k)$ такая, что $\bar y^k\to\bar y$. Будем рассуждать от противного и предположим, что условие $\mathrm{RMF_C}$ не выполняется в точке $y^0\in C$. Последнее означает, что найдется последовательность $y^k\to y^0$, где $y^k\in C$, такая, что

$rank\{\nabla h_i(y^k) \;\; i\in I_0\cup I^a(y^0)\} > rank\{\nabla h_i(y^0) \;\; i\in I_0\cup I^a(y^0)\}$ для всех $k=1,2,...$. (2)

Ввиду конечности индексных множеств в (2) из последовательности $\{y^k\}$ можно извлечь подпоследовательность (для простоты обозначим ее также $\{y^k\}$) такую, что $I(y^k)=I^{\#}=\text{const},\ \ I^a(y^k)=I^{\#a}=\text{const},\ \ I^+(y^k)=I^{\#+}=\text{const},$ и чтобы ранг в левой части (2) был постоянным. Тогда из (2) следует, что $\dim \mathit{aff}\,\Gamma_C(y^k)<\dim \mathit{aff}\,\Gamma_C(y^0)$ при всех $k=1,2,\ldots$. В то же время в силу леммы 9 для любого положительного числа $\varepsilon$ найдется целое положительное $k_0$ такое, что $\Gamma_C(y^0)\cap\bar{B}\subset\Gamma_C(y^k)+\varepsilon B$ при всех $k>k_0$. Но в виду неравенства $\dim \mathit{aff}\,\Gamma_C(y^k)<\dim \mathit{aff}\,\Gamma_C(y^0)$ последнее невозможно, если $\varepsilon<d/2$, где $d$ диаметр множества $\Gamma_C(y^0)\cap\{|\bar{y}|=1\}$.

*Замечание*. В частном случае, когда $I=\varnothing$ (то есть $C=\{y\in R^m \mid h_i(y)=0 \quad i\in I_0\}$), а теорема 5 содержит основной результат [26] (см. теорема 1 [26]).

Таким образом, доказанная выше теорема обобщает основной результат [26] на случай множества решений систем равенств и неравенств.

Следующий пример показывают, что обратное утверждение для теоремы 4 неверно, т.е. из $\text{RMF}_C$ не следует *R*-регулярность.

**Пример 3.** Пусть $C=\{y\in R^3 \mid y_1+y_2=0,\ y_3^2\le 0\},\ y^0=(0,0,0).$ В данном примере условие $\text{RMF}_C$ выполняется, однако

$$\Gamma_C(y^0)=\{\bar{y}\in R^3 \mid \bar{y}_1+\bar{y}_2=0\}\ne\hat{T}_C(y^0)=\{\bar{y}\in R^3 \mid \bar{y}_1+\bar{y}_2=0,\ \bar{y}_3=0\}.$$

Следовательно, в исследуемой точке не выполнено условие регулярности Абади. Поскольку известно, что условие Абади справедливо при выполнении условия *R*-регулярности, отсюда можно сделать вывод, что множество $C$ не *R*-регулярно в точке $y^0$.

### Заключение

Для задачи нелинейного программирования доказан двойственный критерий выполнения условия *R*-регулярности в терминах множителей Лагранжа без какого-либо рода дополнительных предположений о структуре ограничений. Доказано совпадение касательных конусов $T_C^{Cl}(y^0)=T_C(y^0)=\hat{T}_C(y^0)=\Gamma_C(y^0)$ в допустимых точках, в которых множество $C$ R-регулярно. Без дополнительных предположений относительно ограничений доказано, что выполнение в допустимой точке ослабленного условия Мангасаряна-Фромовица влечет за собой выполнение условия *R*-регулярности. Доказано, что из условия *R*-регулярности в допустимой точке следует ограниченное ослабленное условие Мангасаряна-Фромовица. Таким образом, справедливо следующая взаимосвязь условий регулярности в точках множества $C$:

$LICQ\Rightarrow MFCQ\Rightarrow CPLD\Rightarrow RCPLD\Rightarrow RMFCQ,$

$LICQ\Rightarrow CRCQ\Rightarrow RCRCQ\Rightarrow RCPLD\Rightarrow RMFCQ,$

$RMFCQ\Rightarrow R\Rightarrow RMF_C.$

## REGULARITY CODITIONS IN NONLINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

L.I. MINCHENKO, A.E. LESCHOV

### Abstract

Weak regularity conditions are studied. Necessary and sufficient conditions of *R*-regularity are obtained. The relations between different types of regularity conditions are investigated.

## Список литературы


1. *Минченко Л.И., Стаховский С.М.* // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т 53, №5. С. 26–51.
2. *Минченко Л.И., Волосевич А.А., Стаховский С.М.* // Докл. БГУИР. 2009. № 6. С. 81–87.
3. *Minchenko L.I., Stakhovski S.M.* // Optimization. 2011. Vol. 60, № 4. P. 429–440.
4. *Minchenko L., Stakhovski S.* // SIAM Journal on Optimization. 2011. № 21. P. 1314–1332.
5. *Сиротко С.И., Стаховский С.М., Минченко Л.И.* //Докл. БГУИР. 2009. №4. С. 87–92.
6. *Минченко Л.И., Стаховский С.М.* //Вести НАН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук. 2010. № 1. С. 101–107.
7. *Актанорович С.В., Минченко Л.И., Тараканов А.Н.* // Докл. БГУИР. 2010. № 4. С.85–88.
8. *Минченко Л.И., Волосевич А. Н., Тараканов А.Н.* // Докл. БГУИР. 2009. № 8. С. 64–68.
9. *Актанорович С.В., Минченко Л.И., Тараканов А.Н.* // Докл. БГУИР. 2012. № 5. С. 103–109.
10. *Минченко Л.И., Стаховский С.М.* // Докл. БГУИР. № 8. 2010. С.104–109.
11. *Andreani R., Haeser G., Schuverdt M.L. et. al.* // SIAM J. on Optimization. 2012. Vol. 22, № 3. P. 1109–1125.
12. *Гороховик В.В.* Конечномерные задачи оптимизации. Минск, 2007.
13. *Luderer B., Minchenko L., Satsura T.* Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Dordrecht, 2002.
14. *Minchenko L.I., Tarakanov A.N.* // J. Optimiz. Theory and Appl. 2011. Vol. 148, № 3. P. 571–579.
15. *Kruger A., Minchenko L., Outrata J.* // Positivity. 2013. № 17. P. 1–17.
16. *Minchenko L.I., Tarakanov A.N.* // Optimization. 2013. DOI**:** 10.1080/02331934.2012.754441.
17. *Минченко Л.И., Актанарович С.В., Тараканов А.Н.* // Докл. НАН Беларуси. 2010. № 6. С. 18–23.
18. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М., 1988.
19. *Lu S.* // Math. Program. 2009. № 126. P. 365–392.
20. *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч.1. М., 1981.
21. *Актанорович С.В., Богданов С.А., Лещев А.Е. и др.* // Докл. БГУИР. 2013. № 2. С. 5–9.
22. *Минченко Л.И., Лещев А.Е.* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 4. С. 38–42.
23. *Минченко Л.И., Лещев А.Е.* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 6. С. 28–34.
24. *Minchenko L.* On **//** Int. Conference «Constructiv nonsmooth analysys and applications», S.-Peterbourg, June 18–23, 2012. P. 119–121.
25. *Minchenko L.* // Abstracts of 25th Europian conference on Operational Research (EURO-2012), Vilnius, July 8–11, 2012. P. 311.
26. *Behling R., Iusem A.* The // Math. Program. Ser. A. 2013. № 137. P. 155–165.