УДК 518.517(944)947

ПРИМЕНЕНИЕ ДИВЕРГЕНТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЗАДАЧИ БАКЛЕЯ-ЛЕВЕРЕТТА

Ю.П. КРУПНОВ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 23 ноября 2012

Построено семейство разностных схем на минимальном шаблоне узлов для нахождения разрывного решения задачи Баклея–Леверетта.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, разностная схема, разрывное решение.

В работе рассматривается семейство явных дивергентных разностных схем с параметрами, построенное на минимальном шаблоне узлов, для численного решения одномерной задачи Баклея-Леверетта. Исследуются границы изменения значений параметров, позволяющие находить разрывное решение с хорошей точностью. В отличие от работ [1], [2], в данном семействе разностных схем не используются значения производной, а также не привлекаются дополнительные расчетные узлы.

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial F(u)}{\partial x}=0,\ F_u\geq 0, \tag{1}$$

где $F(u)$ – функция Леверетта с начальным и граничным условиями

$$\begin{aligned}&u(x,0)=u_0(x),\quad x\geq 0,\\&u(0,t)=u^0(t),\quad t>0,\end{aligned} \tag{2}$$

в области $\Omega=\{0\leq x<\infty, 0\leq t\leq T\}$.

На разностной сетке $\omega_{h\tau}=\{x_i=ih,\ i=0,1,...;\ t_n=n\tau,\ n=0,1,...,\ \ N=[T/\tau]\}$ предлагаемое семейство разностных схем для задачи (1), (2) записывается в виде

$$\begin{aligned}&u_i^{n+1}=u_i^n+\frac{\tau}{h}p\Big[F(\beta u_{i-1}^n+(1-\beta)u_i^n)-F(\beta' u_{i-1}^n+(1-\beta')u_i^n)\Big],\\&0\leq\beta,\beta'\leq 1,\beta\neq\beta'.\end{aligned} \tag{3}$$

Условие аппроксимации семейством (3) уравнения (1) следующее:

$$p(\beta-\beta')=1. \tag{4}$$

Для определенности, можно всегда считать, что $\beta>\beta'$. Нетрудно показать, что схемы (3), (4) удовлетворяют принципу максимума при выполнении условия

$$K_0\leq 1, \tag{5}$$

где $K_0=\frac{\tau}{h}\max F_u$.

Первые дифференциальные приближения разностных схем (3), (4) имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\tau\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{\partial F(u)}{\partial x}+\frac{1}{2}h\left(F_u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+aF_{uu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right),$$

где $a=\beta+\beta'$.

Для получения хороших значений по разностным схемам (3), (4), необходимо чтобы выполнялось $0{,}8\le a\le 1$, $a-\varepsilon\le\beta\le a,\quad 0<\varepsilon<0{,}1$.

Лучшие результаты для одних и тех же значений a получаются, когда $\beta'=0$. В этом случае разностные схемы (3), (4) имеют следующий вид

$$u_i^{n+1}=u_i^n+\frac{\tau}{\beta h}\left[F(\beta u_{i-1}^n+(1-\beta)u_i^n)-F_i^n\right]. \qquad (6)$$

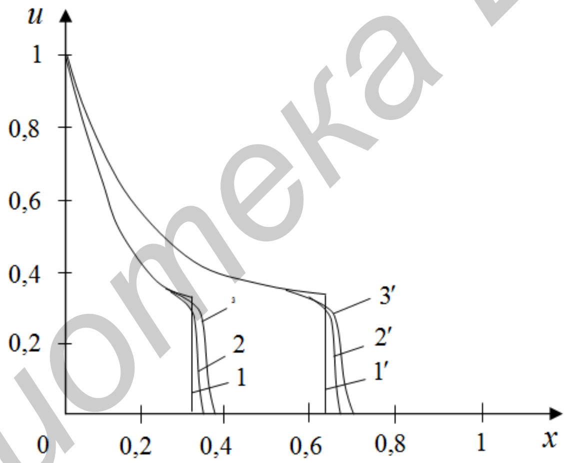
Отметим, что если в (6) положить $\beta=1$, то имеем известную схему «уголок».

Результаты численных экспериментов позволили выделить из (6) класс наилучших схем. Наилучшие схемы получаются при β, удовлетворяющим следующему условию

$$0{,}925\le\beta\le 0{,}975. \qquad (7)$$

Следовательно, схема «уголок» $(\beta=1)$ не входит в класс наилучших схем (6), (7).

На рисунке приведены результаты расчетов по разностным схемам вида (6), когда $\beta=0{,}95$ и $\beta=1$ для случая $F(u)=10u^2/((1-u)^2+10u^2)$, $u_0(x)=0$, $u^0(t)=1$ в моменты времени $t=0{,}15;\ 0{,}3$.



Результаты расчетов по схеме (6): 1, 1′ – эталонные решения;
2, 2′ – численные решения, когда $\beta=0{,}95,\ \tau=0{,}0033,\ h=0{,}0125,\ K_O=0{,}8;$
3, 3′ – численные решения, когда $\beta=1,\ \tau=0{,}0033,\ h=0{,}0125,\ K_O=0{,}8$

Замечание. Если применять разносные схемы вида

$$u_i^{n+1}=u_i^n+\frac{\tau}{h}\left[b_0F_i^n+b_1F(\beta u_{i-1}^n+(1-\beta)u_i^n)+b_2F_{i-1}^n\right],$$
$$0\le\beta\le 1,\quad b_0<0,\quad b_2>0, \qquad (8)$$

где b_i,β удовлетворяют условиям необходимым для аппроксимации

$$b_0+b_1+b_2=0,$$
$$b_2+b_1\beta=1, \qquad (9)$$

то приемлемые результаты получаются при выполнении условий

$$
\begin{aligned}
&1+b_1\beta(\beta-1)=a_1,\\
&(a_1-\varepsilon<\beta<a_1,\ \ 0{,}95\le a_1\le 1)\cup(a_1<\beta<a_1+\varepsilon,\ \ 0{,}9\le a_1\le 0{,}95),\\
&0\le\varepsilon\le 0{,}05.
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

Отметим, что при $\beta=a_1$, получаем схемы (6), поэтому в (10) β берется большим или меньшим, чем a_1. При выполнении условия (5), разностные схемы (8), (9) также удовлетворяют принципу максимума. По сравнению со схемами (6), (7) результаты расчетов по схемам (8)–(10) почти не улучшаются.

DIVERGENT SCHEMES FOR BACKLEY-LEVERETT PROBLEM APPLICATION

Yu. P. KRUPNOV

Abstract

The set of difference schemes for the one-dimentional Backley–Leverett problem is considered.

Список литературы

1. *Крупнов Ю.П.* // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1981. №2. С. 127–129.
2. *Крупнов Ю.П.* // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1985. №1. С. 122.