УДК 621.391.14

НОРМЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОШИБОК НЕГАРАНТИРОВАННОЙ КРАТНОСТИ

Н.З. ХОАНГ, А.Н. МУХА, В.К. КОНОПЕЛЬКО

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 20 марта 2013

Исследуется корректирующая способность ошибок негарантированной кратности БЧХ-кодами на основе норменного декодирования. Предлагается алгоритм поиска образующих векторов ошибок, имеющих кратность больше, чем гарантированная кратность корректируемых ошибок.

Ключевые слова: минимальное кодовое расстояние *d*, гарантированная кратность корректируемых ошибок $t_{\text{ã}}$, негарантированная кратность корректируемых ошибок $t_{\text{í}}$, норма синдромов N.

Введение

В последние годы многие исследователи пытались повысить корректирующую способность используемых кодов вероятностными, алгебраическими методами с использованием стираний и двумерного кодирования [1, 2].

Проведенные в [3, 4] исследования на достаточное число норм для исправления ошибок кратности $t = 3 \div 7$ БЧХ-кодами с $n = 31;127$ показали, что для коррекции ошибок гарантированной кратности $t_{\text{г}}$ число норм избыточно. В табл. 1 приведено число избыточных (не используемых) норм в зависимости от кратности корректируемых ошибок $t = 3 \div 7$ и длины кода $n = 31;127$ (с учетом использования достаточного числа норм [3]).

Таблица 1. **Зависимость числа избыточных норм (в процентах) от кратности ошибок t и длины кодов n**

Кратность $t_{\text{г}}$ / Длина кода n	2	3	4	5	6	7
31	15 (48 %)	800 (83 %)	28615 (96 %)	23134 (77 %)	893113 (96,7 %)	808288 (87,5 %)
127	63 (49 %)	13440 (83 %)	1964319 (95 %)	$\approx 258 \times 10^6$ (99 %)	$\approx 218 \times 10^6$ (83 %)	$\approx 32 \times 10^9$ (96 %)

Анализ данных табл. 1 показывает, что число избыточных (не используемых) норм велико. Следовательно, их можно использовать для коррекции ошибок негарантированной кратности $t_{\text{н}} > t_{\text{г}}$.

В [1, 2] показано, что БЧХ-код с минимальной длиной $n = 7$ и гарантированным исправлением ошибок кратности $t_{\text{г}} = 2$ может корректировать не только двукратные, но и все ошибки кратности $t_{\text{н}} = 3$. Однако, у БЧХ-кода с $t_{\text{г}} = 2$ и $n > 7$ имеется возможность исправить только определенные классы ошибок $t_{\text{н}} = 3$ совместно с двойными ошибками $t_{\text{г}} = 2$. Также показано, что БЧХ-код с $t_{\text{г}} = 2$ может корректировать наряду с двойными ошибками любой пакет ошибок длины четыре при использовании определенных порождающих полиномов поля Галуа. Однако не проводились исследования для других БЧХ-кодов. Ниже исследуются БЧХ-коды длиной $n = 31;127$ по контролю случайных и зависимых (модульных и пакетных) ошибок на основе основных, зависимых и дополняющих норм.

Норменный метод поиска образующих векторов ошибок негарантированной кратности

Для нахождения образующих векторов ошибок негарантированной кратности $t_н > t_г$ используется норменный метод, сущность которого состоит в поиске норм, которые не пересекаются с нормами для образующих векторов ошибок гарантированной кратности $t_г$. Для этого проведен вычислительный эксперимент, который включает следующие этапы: группирование норм всех образующих векторов ошибок кратности $t_н$ и $t_г$ в множества (данные нормы для всех образующих векторов ошибок приведены в работах [3, 4]), поиск повторяющихся норм, удаление тех повторяющихся норм и соответствующих им образующих векторов ошибок.

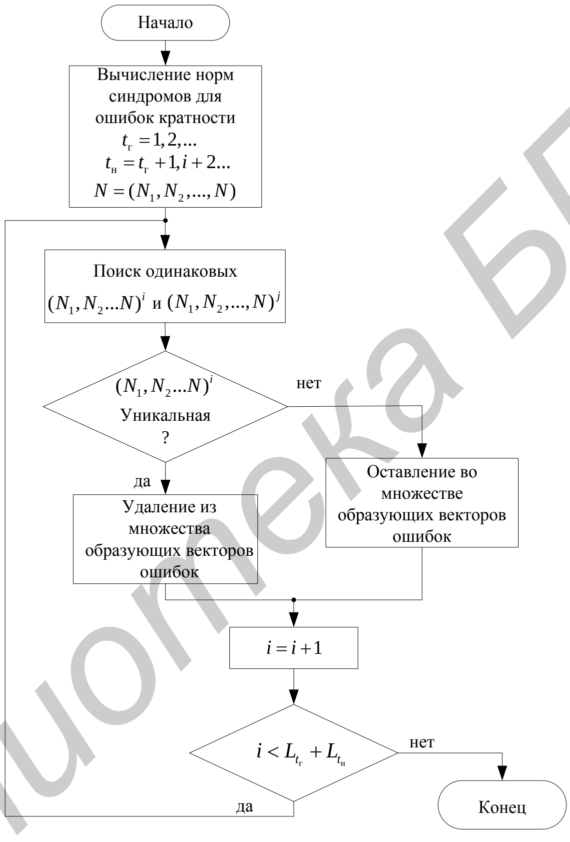

Рис.1. Алгоритм нахождения образующих векторов ошибок негарантированной кратности $t_н$

При реализации алгоритма поиска образующих векторов ошибок не гарантированной кратности использовались языки программирования С++, программируемый пакет Mathematica, а программа выполнялась в операционной системе Window 7 для 2-ядерного процессора Intel. Время проведения вычислительных экспериментов для БЧХ-кодов $n = 31;127$ составило 6 и 48 часов соответственно.

Анализ основных и зависимых норм синдромов по идентификации образующих векторов ошибок негарантированной кратности

На основе вышеприведенного алгоритма проведен вычислительный эксперимент для БЧХ-кодов с длинами $n = 31;127$ и кратностей ошибок $t = 3 \div 7$ для неприводимого полинома $f(x) = 1 + x^2 + x^5$, $f(x) = 1 + x + x^7$. В результате эксперимента установлено следующее.

1. При применении БЧХ-кодов с параметрами $n = 31, t_{\text{г}} = 2;3$ могут идентифицироваться только образующие вектора ошибок кратности $t_{\text{г}} = 1;2;3$ соответственно. Следует отметить, что множество норм для $t_{\text{г}} = 2$ не пересекается с множеством норм для $t_{\text{н}} = 4$ $(N_1, N_2, N_3)_{t_{\text{г}}=2} \neq (N_1, N_2, N_3)_{t_{\text{н}}=4}$ (рис. 2, *а*).

2. Для БЧХ-кода с $n = 31, t_{\text{г}} = 4$ установлено, что данный код может идентифицировать все вектора ошибок гарантированной кратности $t_{\text{г}} = 1;2;3;4$ и все 5481 (100 %) образующих векторов ошибок кратности $t_{\text{н}} = 5$. При этом проверочная матрица H для коррекции ошибок кратности $t_{\text{н}} = 5$ имеет ту же структуру, что и проверочная матрица для коррекции ошибок $t_{\text{г}} = 4$ – $H_4 = \left[\alpha^i, \alpha^{3i}, \alpha^{5i}, \alpha^{7i}\right]^T$. Кроме того, данный код может идентифицировать 12910 (54 %), 668 (0,7 %) образующих векторов ошибок кратности $t_{\text{н}} = 6;7$ соответственно. Следует отметить, что множества норм для ошибок кратности $t_{\text{г}} = 2;3;4$ и $t_{\text{н}} = 6$ не пересекаются, а множества норм $t_{\text{н}} = 5;6$ пересекаются (рис. 2, *б*). Это можно использовать в двумерном декодировании для идентификации кратности образов ошибок больших кратностей t [5]. Например, БЧХ-код $(n;k;t_{\text{г}}) = (31;11;4)$ может идентифицировать ошибки кратности $t_{\text{í}} = 7$. При этом часть множества норм образующих векторов ошибок кратности $t = 5;6;7$ пересекается. Они отличаются друг от друга, однако отличаются от ошибок меньшей кратности.

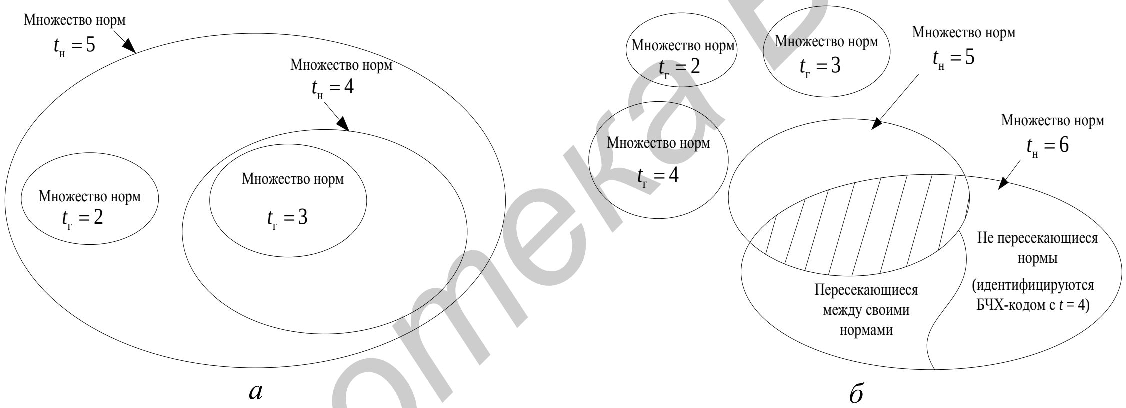

Рис. 2 Разделения множеств норм образующих векторов ошибок кратности $t_{\text{г}}$ и $t_{\text{н}}$ БЧХ-кода (31;16) с $t_{\text{г}} = 3$ и $t_{\text{í}} = 4;5$ (*а*); БЧХ-кода (31;11) с $t_{\text{ã}} = 4$ и $t_{\text{í}} = 5;6$ (*б*)

Результаты эксперимента также показывают, что БЧХ-код, задаваемый проверочной матрицей $H_5 = \left[\alpha^i, \alpha^{3i}, \alpha^{5i}, \alpha^{7i}, \alpha^{9i}\right]^T$ с гарантированным исправлением ошибок кратности $t_{\text{г}} = 5$, может идентифицировать такие же образующие вектора ошибок, что и БЧХ-код с $H_4 = \left[\alpha^i, \alpha^{3i}, \alpha^{5i}, \alpha^{7i}\right]^T$. Поэтому имеется возможность исключить подматрицу α^{9i} при идентификации ошибок кратности $t_{\text{н}} = 5$ и говорить о гарантированном исправлении ошибок кратности $t_{\text{н}} = 5$ с помощью матрицы H_4, что приводит к «хорошему» коду [6].

БЧХ-код с $n = 31; t_{\text{г}} = 6$, задаваемый проверочной матрицей $H = \left[\alpha^i, \alpha^{3i}, \alpha^{5i}, \alpha^{7i}, \alpha^{11i}\right]^T$, может идентифицировать 23751 (100 %) образующих векторов ошибок кратности $t_{\text{н}} = 7$. При этом для коррекции ошибок кратности $t_{\text{н}} = 7$ достаточно использовать БЧХ-коды, задаваемые проверочной матрицей для коррекции ошибок кратности $t_{\text{г}} = 6$, что также приводит к «хорошему» коду $(n;k;d) = (31;6;15)$.

Проведенные исследования для БЧХ-кода с $n = 127$ также показывают, что имеется возможность идентифицировать образующие вектора ошибок не гарантированной кратности $t_{\text{н}}$. Однако при идентификации ошибок кратностей $3 \leq t_{\text{г}} \leq 6$ БЧХ-кодами с $n = 127$ исключить какую-либо подматрицу с $\alpha^{(2m+1)i}$ в проверочной матрице H БЧХ-кода нельзя (как это имеет место в кодах с $n=31$). Поэтому параметры БЧХ-кодов, задаваемых проверочной матрицей $H=\left[\alpha_1^i,\alpha_2^{3i},\alpha_3^{5i},\alpha_4^{7i},...,\alpha_t^m\right]^T$, равны $(127;106)$, $(127;99)$, $(127;92)$, $(127;85)$ для $t_{\text{г}}=3;4;5;6$ соответственно. Как отмечено в [6], эти коды представляют собой «хорошие коды» с малой избыточностью. Результаты исследований приведены в таблице.

Таблица 2. **Зависимость числа (в процентах) идентифицируемых образующих векторов ошибок негарантированной кратности $t_{\text{н}}$ от параметров БЧХ-кодов**

Кратность ошибок t_{i} / БЧХ-коды $(n;k;d;t_{\text{ã}})$		4	5	6	7
31	(31;16;7;3)	0 %	0 %	0 %	0 %
	(31;11;9;4)	–	5481(100 %)	12910 (54 %)	668 (0,8 %)
	(31;6;13;6)	–	–	–	84825(100 %)
127	(127;106;7;3)	425 (0,5 %)	0 %	0%	0 %
	(127;99;9;4)	–	900157(45 %)	867555(2,3%)	0 %
	(127;92;11;5)	–	–	22×10^6 (55 %)	$5{,}5\times10^6$ (0,72 %)
	(127;85;13;6)	–	–	–	320×10^6 (52 %)

Анализ данных табл. 2 показывает, что негарантированный контроль ошибок приводит к «хорошим» кодам с малой избыточностью; кроме того, с увеличением гарантированного исправления ошибок кратности $t_{\text{г}}$ число образующих векторов ошибок негарантированной кратности быстро растет (например, БЧХ-код с $n=127$, $t_{\text{г}}=3$ может идентифицировать только 0,5% образующих векторов ошибок кратности $t_{\text{н}}=4$, а БЧХ-код с $n=127$, $t_{\text{г}}=4$ – уже 45% образующих векторов ошибок кратности $t_{\text{н}}=5$).

Анализ основных и дополняющих норм синдромов по идентификации образующих векторов ошибок негарантированной кратности

Как показано в [3, 4], число основных и дополняющих норм меньше числа основных и зависимых норм. Поэтому число избыточных норм уменьшается. Следовательно и число образующих векторов ошибок негарантированной кратности $t_{\text{н}}$ для идентификации БЧХ-кодами с гарантированным исправлением ошибок также уменьшается. Результаты проведенных аналогичных исследований по применению основных и дополняющих норм для нахождения идентификации образующих векторов ошибок негарантированной кратности $t_{\text{н}}$ приведены в табл. 3. Анализ данных таблицы показывает, что число образующих векторов ошибок негарантированной кратности $t_{\text{н}}$ быстро возрастает при увеличении кратности $t_{\text{г}}$. Кроме того, из данных табл. 1 и 2 следует, что число идентифицированных образующих векторов кратности $t_{\text{н}}$ примерно одинаково при использовании основных дополняющих норм и основных зависимых норм.

Таблица 3. **Зависимость числа (в процентах) идентифицируемых образующих векторов ошибок негарантированной кратности $t_{\text{н}}$ от параметров БЧХ-кодов**

Кратность ошибок t_{i} / БЧХ-коды $(n;k;d;t_{\text{ã}})$		4	5	6	7
31	(31;16;7;3)	0 %	0 %	0 %	0 %
	(31;11;9;4)	-	5481(100 %)	11330 (47 %)	588 (0,6 %)
	(31;6;13;6)	-	-	-	84825(100 %)
127	(127;106;7;3)	365 (0,45 %)	0 %	0 %	0 %
	(127;99;9;4)	-	840157(42 %)	827555(2,1 %)	0 %
	(127;92;11;5)	-	-	20×10^6 (50 %)	5×10^6 (0,7 %)
	(127;85;13;6)	-	-	-	310×10^6 (50 %)

Анализ норм синдромов для образующих векторов зависимых ошибок негарантированной кратности

В [7] показано, что БЧХ-коды с длиной $n=31$, задаваемые проверочными матрицами $H=\left[\alpha^{i},\alpha^{3i}\right]^{T}$ и $H=\left[\alpha^{i},\alpha^{3i},\alpha^{5i}\right]^{T}$ с порождающим полиномом $f(x)=1+x^2+x^3+x^4+x^5$, корректирующие случайные ошибки кратности $t_{\text{г}}=2;3$, могут идентифицировать все образующие вектора зависимых ошибок кратности $t^{p}=4;6$ соответственно. В этом разделе проводятся исследования на множестве норм зависимых образующих векторов ошибок больших кратности $t_{\text{н}}^{p}=5;6;7$ с использованием порождающего полинома $f(x)=1+x^2+x^5$. Результаты исследований показали следующее.

БЧХ-код с гарантированным исправлением $t_{\text{г}}=2$ идентифицирует все пакетные образующие векторы ошибок кратности $t^{p}=3$, 6 (75 %), 6 (50 %) и 9 (30 %) образующих векторов зависимых ошибок кратности $t^{p}=4;5;6$ соответственно. БЧХ-код с гарантированным исправлением случайных образующих векторов ошибок кратности $t_{\text{г}}=3$ идентифицирует 5 (100 %), 15 (100 %), 27 (90 %) 56 (90 %) образующих векторов пакетных и модульных ошибок кратности $t^{p}=4;5;6;7$ соответственно. Результаты проведенных исследований представлены в таблице.

Таблица 4. **Зависимость числа (в процентах) идентифицируемых образующих векторов ошибок негарантированной кратности $t_{н}^{p}$ от параметров БЧХ-кодов при использовании неприводимого полинома $f(x)=1+x^2+x^5$**

Кратность ошибок $t_{\text{і}}^{\partial}$ / БЧХ-коды $(n;k;d;t_{\text{ã}})$	3	4	5	6	7
(31;21;5;2)	4 (100 %)	6 (75 %)	10 (66 %)	10 (30 %)	0 %
(31;16;7;3)	-	5 (100 %)	15 (100 %)	27 (90 %)	56 (90 %)

Следует отметить, что разные неприводимые порождающие полиномы обеспечивают соответствующие корректирующие способности БЧХ-кодов при коррекции зависимых ошибок негарантированной кратности. Например, использование полинома $f(x)=1+x^2+x^3+x^4+x^5$ позволяет повысить корректирующую способность по сравнению с $f(x)=1+x^2+x^5$ (табл. 5).

Таблица 5. **Зависимость числа (в процентах) идентифицируемых образующих векторов ошибок негарантированной кратности $t_{н}^{p}$ от параметров БЧХ-кодов с использованием неприводимого полинома $f(x)=1+x^2+x^3+x^4+x^5$**

Кратность ошибок $t_{\text{і}}^{\partial}$ / БЧХ-коды $(n;k;d;t_{\text{ã}})$	3	4	5	6	7
(31;21;5;2)	4 (100 %)	8 (100 %)	10 (66 %)	13 (43 %)	0%
(31;16;7;3)	-	5 (100 %)	15 (100 %)	30 (100 %)	57 (93 %)

Анализ данных табл. 5 показывает, что БЧХ-код с меньшим гарантированным исправлением кратности $t_{\text{г}}=2;3$ не может идентифицировать случайные образующие вектора ошибок большей кратности, однако может идентифицировать образующие векторов зависимых ошибок негарантированной кратности.

В табл. 6 приведена зависимость числа идентифицируемых образующих ошибок (случайных и зависимых) БЧХ-кодом с длиной n от кратности ошибок $t_{\text{г}}$. В скобках приведен процент образующих векторов ошибок негарантированной кратности от всего множества возможных идентифицируемых образующих векторов ошибок.

Таблица 6. **Зависимость числа идентифицируемых образующих векторов случайных и зависимых ошибок БЧХ-кодами от гарантированной кратности $t_г$**

Кратность ошибок $t_г$ / Длина n	2	3	4	5	6
$n=31$	25 (40 %)	213 (24,4 %)	43986 (30,8 %)		115232 (73 %)
$n=127$	73 (14 %)	3165 (15 %)	1851775 (95 %)	27×10^6 (93 %)	352×10^6 (88 %)

Анализ данных табл. 6 показывает, что с увеличением длины БЧХ-кодов, процент образующих векторов ошибок негарантированной кратности $t_н$, идентифицируемых БЧХ-кодом, экспоненциально возрастает. Например, БЧХ-код с $n=31$, $t_г=5$ идентифицирует 30,8 % из всего множества образующих векторов ошибок кратности $t_г$ и $t_н$, а БЧХ-код с $n=31$, $t_г=5$ – 93 %.

Заключение

Результаты проведенных исследований показывают, что имеется возможность расширить идентифицирующую способность БЧХ-кодов за счет использования для идентификации части образующих векторов ошибок негарантированной кратности $t_н > t_г$ при норменном декодировании. Установлено, что БЧХ-коды с $t_г=2;3$ идентифицируют более 30 % образующих векторов зависимых (пакетных и модульных) ошибок кратности $t^p=4;5;6$. БЧХ-коды с $t_г \geq 4$ могут идентифицировать часть образующих векторов случайных ошибок негарантированной кратности $t_н=t_г+1(2)$, что приводит к «хорошим» кодам с малой избыточностью [6].

NORMING IDENTIFICATION OF ERRORS UNGUARANTEED MULTIPLICITY

D.N. HOANG, A.N. MUKHA, V.K. KONOPELKO

Abstract

Error correction capability of unguaranteed errors multiplicity by codes BCH based on the norming decoding is investigated. A searching algorithm of forming vectors of error with multiplicity greater than the guaranteed by code is proposed.

Список литературы

1. *Конопелько В.К., Липницкий В.А.* Теория норм синдромов и перестановочное декодирование помехоустойчивых кодов. Минск, 2004.
2. *Липницкий В.А., Конопелько В.К.* Норменное декодирование помехоустойчивых кодов и алгебраические уравнения. Минск, 2007.
3. *Конопелько В. К., Хоанг Н. З.* // Докл. БГУИР. 2012. № 8 (70). С. 69–74.
4. *Хоанг З.Н., Конопелько В.К., Макейчик Е.Г.* // Матер. Междунар. научн.-техн. семинара «Телекоммуникации: сети и технологии, алгебраическое кодирование и безопасность данных». Минск, январь – декабрь 2012 г. С. 27–31.
5. *Фам Хак Хоан, О.Г. Смолякова* // Докл. БГУИР. 2008. № 1 (31). С. 70–75.
6. *Мак-Вильяме, Ф. Дж.* Теория кодов, исправляющих ошибки. М., 1979.
7. *Конопелько В.К.,Смолякова О.Г., Шкиленок А.В.* //. Докл. БГУИР. 2007. № 5. С. 17–22.