

УДК 519.8

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСОВ НАГРУЗКИ КАФЕДРЫ МЕЖДУ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКИМ СОСТАВОМ

С.Н. НЕСТЕРЕНКОВ, Б.В. НИКУЛЬШИН

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь*

Поступила в редакцию 9 июля 2013

Рассматривается математическая модель построения оптимальных вариантов распределения нагрузки кафедры между преподавателями с учетом их квалификации. Модель базируется на представлении всех типов работ кафедры в качестве дискретного множества ресурсов, которые необходимо распределить между преподавателями кафедры в соответствии с принятыми в ВУЗе допущениями и ограничениями.

Ключевые слова: часы нагрузки кафедры, математическая модель, оптимальные варианты распределения.

Введение

Одной из важных задач управления ВУЗом является распределение учебной нагрузки кафедры между профессорско-преподавательским составом оптимальным образом. Для оптимального распределения часов кафедры необходимо иметь возможность моделировать различные варианты, изменяя исходные данные. Варьируя распределением планируемых часов нагрузки кафедры между ее профессорско-преподавательским составом по семестрам, необходимо таким образом спланировать учебный процесс, чтобы наибольшее количество часов по приоритетным типам работ назначалось наиболее компетентным преподавателям с учетом равномерности их загрузки в учебном году. Данная задача, как правило, решается эвристическим методом в несколько итераций с большими временными затратами, а эффективность ее решения остается спорной. Для решения поставленной задачи предлагается математическая модель для формализации процедур составления вариантов распределения нагрузки, как для отдельных кафедр, так и ВУЗа в целом. Разработанная математическая модель позволит формировать варианты распределения часов нагрузки кафедры с учетом ограничений и требований, действующих в конкретном в ВУЗе [1].

Математическая модель процесса распределения рабочих часов между профессорско-преподавательским составом кафедры

Подход к распределению планируемого объема часов кафедры между профессорско-преподавательским составом кафедры основывается на представлении кафедры объектом, обладающим некоторым объемом разнородных ресурсов, которые необходимо распределить между преподавателями оптимальным образом. Каждый из преподавателей, в свою очередь, обладает некоторым набором персональных весовых коэффициентов, характеризующим эффективность использования им каждого из имеющихся видов ресурса. В качестве показателя эффективности распределения часов предлагается принять показатель взвешенной оценки планируемого объема часов кафедры.

Введем следующие ограничения решения задачи.

1. Передаваемая на кафедру нагрузка рассматривается как совокупность абстрактных видов работ. Каждый из видов работ содержит конкретный набор типов работ с соответствующими объемами часов.

2. По каждому из типов работ для каждого из преподавателей кафедры задаются персональные весовые коэффициенты, учитывающие эффективность выполнения конкретным преподавателем этого типа работ.

3. Количество выданных на кафедру часов должно быть равно количеству часов, распределенных между профессорско-преподавательским составом кафедры: $X = R$.

4. Объем аудиторных часов у некоторых преподавателей (например, профессоров) не должен превышать n % от общего количества назначенных ему часов: $X_{\text{проф. ауд}} \leq X_{\text{общ}} * n * 0,01$.

5. Объем часов преподавателя на учебный год не должен превышать средний объем годовой индивидуальной нагрузки по ВУЗу более чем на n %. $X = \sum_{k=1}^m x_k \leq X_{\text{вуз}} * (1 + n * 0,01)$.

6. Желательно обеспечить равное распределение объема часов для i -го преподавателя в осеннем и весеннем семестрах: $X_{i, \text{весенний}} = X_{i, \text{осенний}}$.

7. Лекции по конкретной дисциплине на каждом потоке должен читать один преподаватель.

8. Часы по взаимосвязанным типам работ каждого из видов работ должны отдаваться одному преподавателю. Например, часы на проведение экзамена или зачета по дисциплине должны отдаваться преподавателю, читающему лекции на данном потоке.

9. Необходимо стремиться к максимальной однородности распределения часов, т.е. чтобы на каждого из преподавателей приходилось как можно больше часов одного типа.

Общее количество часов кафедры по всем видам и типам работ представлено в виде матрицы. Пример представлен в таблице.

Таблица 1. Общее количество часов кафедры

Тип работ Вид работ	Тип работ 1	Тип работ 2	...	Тип работ k	Сумма по типам работ
Вид работ 1	t_{11}	t_{12}	...	t_{1k}	r_1
Вид работ 2	t_{21}	t_{22}	...	t_{2k}	r_2
...
Вид работ n	t_{n1}	t_{n2}	...	t_{nk}	r_n

Таким образом, общий объем часов кафедры находится как суммарный объем часов по двум измерениям и вычисляется по формуле $R = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k t_{ij}$, где t_{ij} – объем часов по i -му виду работ и j -му типу работ.

Виды работ представляют собой вектор (например, {Дисциплина 1, Дисциплина 2, Консультации по дипломному проектированию, ..., Часы государственной экзаменационной комиссии}), отражающий структуру часов. Типы работ представляют собой вектор, например: Часы лекций; Часы семинарских занятий;...; Часы лабораторных работ, отражающий структуру вида работ.

Суммарный объем часов кафедры находится по следующей формуле: $R = \sum_{i=1}^n r_i$, где r_i – объем часов по каждому из видов работ, n – количество видов работ.

Объем часов по каждому из видов работ состоит из суммарного объема часов по каждому из типов и находится по следующей формуле: $r_i = \sum_{j=1}^k t_{ij}$, где t_{ij} – объем часов по j -му типу работ, k – количество типов работ.

Суммарный объем часов, распределяемых между профессорско-преподавательским составом кафедры рассчитывается по формуле: $X = \sum_{i=1}^n x_i$, где x_i – общий объем часов i -го преподавателя, n – количество преподавателей.

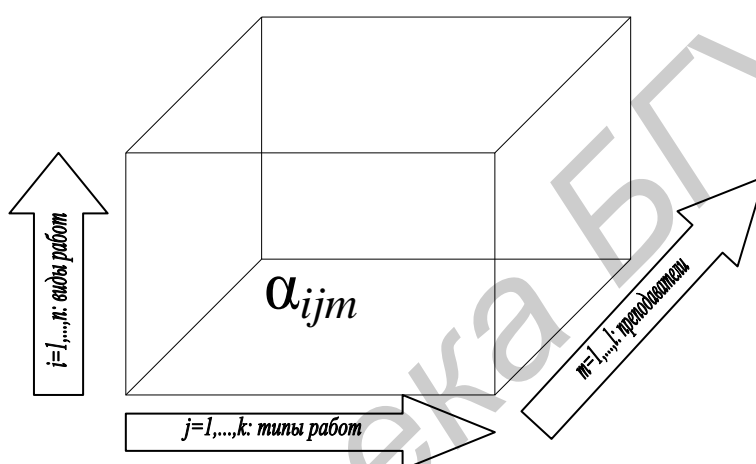
Объем часов каждого преподавателя состоит из суммарного объема часов типов работ, назначенных ему, и вычисляется по следующей формуле: $x_i = \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^l t'_{jm}$, где t'_{jm} – объем часов по j -му виду работ и m -му типу работ, k, l – количество видов и типов работ соответственно.

Таким образом, общий объем часов профессорско-преподавательского состава кафедры рассчитывается как суммарный объем часов по всем типам работ по следующей формуле:

$$X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^l t'_{ijm}.$$

При данной формулировке задача сводится к нахождению такого распределения нагрузки кафедры между преподавателями по каждому из типов работ с учетом предпочтений и заданными ограничениями, при котором будет достигаться максимум показателя взвешенной оценки распределения часов. Такое распределение будем называть оптимальным.

Наглядно совокупность персональных весовых коэффициентов α_{ijm} преподавателей кафедры можно представить в виде куба, изображенного на рисунке.



Куб персональных весовых коэффициентов преподавателей

В данном случае m -сечение куба представляет собой матрицу, представленную в табл. 2, и содержит персональные весовые коэффициенты m -го преподавателя.

Таблица 2. Персональные весовые коэффициенты преподавателя

Тип работ	Тип работ 1	Тип работ 2	...	Тип работ k
Вид работ 1	α_{11}	α_{21}	...	α_{k1}
Вид работ 2	α_{12}	α_{22}	...	α_{k2}
...
Вид работ n	α_{1n}	α_{2n}	...	α_{kn}

Для решения задачи оптимального распределения часов по каждому из типов работ для каждого преподавателя предлагается использовать аппарат теории игр и свести к решению модифицированной задачи распределения ресурсов, когда работы (часы по типу работ) распределяются между несколькими преподавателями, а в качестве характеристик, отражающих их деятельность, будут использоваться персональные весовые коэффициенты, приведенные в табл. 2. В качестве основной целевой функции предлагается принять максимизацию показателя взвешенной оценки планируемого объема работ кафедры в целом за счет оптимального распределения часов между всеми преподавателями.

В разработанной математической модели предлагается представить профессорско-преподавательский состав кафедры как однородное множество $N = \{1, 2, \dots, n\}$, где также известен суммарный объем часов кафедры $R \geq 0$, который требуется распределить, и заданы персональные весовые коэффициенты всех преподавателей $\{\alpha_{ijm}\} i, j, m \in N$ (характеристики, отражающие их деятельность). Требуется распределить объемы часов между преподавателями

таким образом, чтобы показатель взвешенной оценки принял максимальное значение при заданных ограничениях. Такая постановка задачи является общей и необходима ее детализация.

Если принять, что объем работ $d_i \geq 0$, который может выполнять i -ый преподаватель, фиксирован, то получим дискретную задачу распределения объема часов кафедры R между преподавателями с целью максимизации целевой функции (переменная x_i принимает значение 0, если i -ый преподаватель не работает, и значение 1, если он работает):

$$\Phi = \sum_{i \in N} d_i \alpha_{ijm} x_i \rightarrow \max, x_i \in \{0, 1\}; \sum_{i \in N} d_i x_i \geq R.$$

Задача может быть приведена к виду так называемых классических комбинаторных задач о ранце и имеет решение при условии выполнения следующего неравенства: $\sum_{i \in N} d_i \geq R$,

что, в свою очередь, обеспечивается первым ограничением, т. е. когда суммарный объем часов не превышает суммарных возможностей всех преподавателей. Однако недостатком данной задачи, так как ее можно отнести к классу дискретных задач, является то, что лишь малая часть задач этого типа имеет эффективные (полиномиальной сложности) методы решения. Для NP-сложных задач при малой их размерности можно использовать метод полного перебора, а при увеличении размерности – различные эвристические или иные методы решения [2, 3]. В нашем случае при данной формулировке задачи мы не имеем четко обозначенного объема работ для каждого из преподавателей по всем типам работ, что требует решения непрерывной задачи распределения часов работ. Для ее решения предлагается принять допущение, что i -му преподавателю можно назначить любой объем работ, не превышающий d_i , что соответствует условиям задачи. Тогда, обозначив x_i – объем часов, назначенных i -му преподавателю,

получаем непрерывную задачу: $\hat{O} = \sum_{i \in N} \alpha_{ijm} x_i \rightarrow \max, x_i \in \{0, d_i\}, \sum_{i \in N} x_i \geq R$, которая при

выполнении третьего условия имеет следующее решение: следует упорядочить преподавателей в порядке убывания их персональных коэффициентов для каждого из типов работ α_{ijm} и последовательно назначать им максимальное возможное количество часов до тех пор, пока не будет распределен весь объем работ R .

Однако ввиду сложной структуры персональных весовых коэффициентов процесс упорядочивания предлагается производить следующим образом, отличным от традиционных подходов к распределению ресурсов. Предлагается начинать распределение часов, выбирая их не по порядку типов работ кафедры, а найдя тот порядок распределения, который на каждом этапе решения задачи дает наибольшую взвешенную оценку планируемого объема часов для кафедры в целом. Процесс распределения предлагается производить по следующему алгоритму.

1. Задается матрица персональных весовых коэффициентов для k -го преподавателя, которая характеризует его потенциальные возможности по проведению определенного типа работ. Предлагается ввести числовой, интерпретируемый с некоторой долей условности, показатель k -го преподавателя, как «профессионализм» преподавателя, т.е. некоторое среднее значение персональных коэффициентов для различных, выполняемых им типов работ,

вычисляемый по следующей формуле: $K_k = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}$.

Показатель «профессионализм» помогает определить преподавателя, который увеличит наибольшим образом взвешенную оценку работ кафедры, при назначении ему максимального объема часов по типам работ. Например, для первого преподавателя получаем $K_1=0,3333$ на основании данных табл. 3.

Таблица 3. Персональные весовые коэффициенты первого преподавателя

Тип работ \ Вид работ	Тип работ 1	Тип работ 2	Тип работ 3
Вид работ 1	1	2	0,5
Вид работ 2	0	0	0
Вид работ 3	0	0	0

Для второго преподавателя получаем $K_2=0,38888$ на основании данных табл. 4.

Таблица 4. Персональные весовые коэффициенты второго преподавателя

Тип работ \ Вид работ	Тип работ 1	Тип работ 2	Тип работ 3
Вид работ 1	0,3	0,6	0,1
Вид работ 2	0,7	0,5	0,15
Вид работ 3	0,25	0,2	0,4

2. Выбрав наиболее «профессионального» преподавателя и сравнивая поочередно все его персональные весовые коэффициенты, находим максимальный из всех коэффициентов для выполняемых им типов работ. Однако это не дает права считать, что данный преподаватель даст наибольший прирост к взвешенной оценке объема часов кафедры при выполнении данного типа работ. Так как на кафедре может быть «узкий специалист» в определенной области, у которого суммарный показатель «профессионализма» достаточно низок, однако некоторые типы работ из всех преподавателей кафедры он выполняет наиболее «профессионально». Таким образом, найдя «профессионала» и выделив у него тип работ, по которому он имеет максимальный весовой коэффициент, требуется проверить наличие на кафедре преподавателя по данному конкретному типу работ с наибольшим весовым коэффициентом. Найдя такого, отдаем ему максимум из возможных часов, учитывая ограничения.

При этом если после назначения часов преподавателю в ресурсах кафедры не остается свободных часов по данному типу работ, показатель «профессионализма» всех преподавателей кафедры пересчитывается заново, не учитывая весовые коэффициенты по данным типам работ. Это позволяет на каждом этапе распределения часов производить их распределение наиболее оптимальным образом за счет назначения максимума часов преподавателю с наибольшим персональным весовым коэффициентом по данному типу работ с учетом имеющихся в модели ограничений.

Таким образом, количество часов по каждому типу работ предлагается рассчитывать по формуле: $d_{ijm} = d_{ijm}^{\text{каф}} - d'_{ijm}$, где d_{ijm} – количество часов, закрепленных за преподавателем по данному типу работ, $d_{ijm}^{\text{каф}}$ – количество часов по данному типу работ выданное кафедре, d'_{ijm} – количество часов уже назначенных другим преподавателям.

Для обеспечения взаимосвязи между типами работ, например, часами на проведение экзамена или зачета по дисциплине, которые должны отдаваться преподавателю, читающему лекции на данном потоке, предлагается использовать матрицу взаимосвязей, где

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если типы работ взаимосвязаны} \\ 0, & \text{если иначе} \end{cases}; i, j = \{1, 2, \dots, k\}.$$

Таблица 5. Матрица взаимосвязей типов работ

Тип работ \ Тип работ	Тип работ 1	Тип работ 2	...	Тип работ k
Тип работ 1	0	β_{21}	...	β_{k1}
Тип работ 2	β_{12}	0	...	β_{k2}
...
Тип работ k	β_{1k}	β_{2k}	...	0

Заключение

Разработана модель распределения нагрузки кафедры между профессорско-преподавательским составом на основе модели распределения ограниченных ресурсов между объектами системы на основе матриц персональных весовых коэффициентов каждого из объектов с заданными ограничениями. Созданные с помощью предложенной модели варианты распределения являются оптимальными в условиях заданных ограничений, так как на каждом этапе назначения часов преподавателям это делается наиболее оптимальным образом.

MATHEMATICAL MODEL OF OPTIMAL DISTRIBUTION OF THE WORKING HOURS BETWEEN DEPARTMENT MEMBERS

S.N. NESTERENKOV, B.V. NIKULSHIN

Abstract

The mathematical model and method of constructing optimal arrangements of the departments working hours based on the application of analysis systems are analysed. The model is based on the offer of all types of work representation in the department as a discrete set of resources, which has to be distributed between teachers according to the constraints and assumptions taken at the university.

Список литературы

1. *Нестеренков С.Н.* // Матер. VI Междунар. конф. «Информационные системы и технологии». Минск, 24–25 ноября 2010 г. С. 621.
2. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М., 1982.
3. *Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М.* Дискретная математика для инженера. М., 1980.
4. *Робертс Ф.* Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. М., 1986.