

УДК 518.517(944)947

О ПРИМЕНЕНИИ «АНТИВЯЗКОСТИ» ДЛЯ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Ю.П. КРУПНОВ

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь*

Поступила в редакцию 12 января 2012

Предложен эффективный метод нахождения численного решения задачи, описывающей процесс движения несжимаемой жидкости.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, разностная схема, аппроксимационная вязкость, разрывное решение.

В работе [1] предлагается для численного решения задачи Баклея-Леверетта

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0, \quad F_u \geq 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x > 0, \quad (2)$$

$$u(0, t) = u^0(t) \quad (2)$$

по схеме с «антивязкостью»

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\tau}{h} \left[F_{i-1}^n - F_i^n - \frac{1}{2} (R_{i+1}^n - R_i^n) \right], \quad (3)$$

$$R_i^n = V \left(1 - \frac{\tau}{h} \left((F_u)_{i-1}^n + (F_u)_i^n \right) \right) (F_i^n - F_{i-1}^n). \quad (4)$$

Параметр V брать зависящим от числа Куранта $\frac{\tau}{h} \max F_u$. Там же рассмотрен случай линейной зависимости параметра от числа Куранта.

В данной работе изучается случай, когда имеет место квадратичная зависимость параметра от числа Куранта. Применение квадратичной зависимости позволяет улучшить результаты расчетов с любыми числами Куранта, находящимися в промежутке $(0, 1]$. В замечании к работе указывается вид «антивязкости», дающий улучшение результатов и в случае постоянного параметра.

Рассмотрим разностную схему (3), (4). Считаем, что в (4)

$$V = a_0 + a_1 K_0 + a_2 K_0^2, \quad (5)$$

$$K_0 = \frac{\tau}{h} \max F_u.$$

Для устойчивости схемы (3) – (5) необходимо выполнение условий

$$K_0 \leq 1,$$

$$0 \leq V \leq 1.$$

Определим значения коэффициентов a_0, a_1, a_2 в выражении (5). Коэффициенты a_0, a_1, a_2 должны обеспечивать монотонное убывание V при $K_0 \in (0, 1]$, а также удовлетворять условиям

$$a_0 + a_1 + a_2 = 0,15,$$

$$a_0 + 0,1a_1 + 0,01a_2 = 0,6. \quad (6)$$

Имеет место следующая

Теорема. Если a_0 удовлетворяет условию

$$\frac{133}{220} \leq a_0 \leq 0,705, \quad (7)$$

выполняется система уравнений (6), то функция, задаваемая формулой (5), монотонно убывает при $K_0 \in (0, 1]$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$V' = a_1 + 2a_2K_0 < 0. \quad (8)$$

Из (6) не трудно получить

$$a_1 = -11a_0 + 6,65,$$

$$a_2 = 10a_0 - 6,5. \quad (9)$$

Рассмотрим три возможных случая:

$$a) \frac{133}{220} \leq a_0 < 0,65; \quad б) a_0 = 0,65; \quad в) 0,65 < a_0 \leq 0,705.$$

В случае *а*), учитывая (9) имеем $a_1 + 2a_2K_0 < a_1 \leq 0$.

В случае *б*) условие (8) очевидно.

Осталось рассмотреть случай *в*).

Учитывая (9), имеем

$$a_1 + 2a_2K_0 \leq a_1 + 2a_2 = 9a_0 - 6,35 < 0.$$

Следовательно, условие (8) выполняется и в случае *в*).

Теорема доказана.

Если $K_0 \in (0, 05; 1]$, то неравенство (7) можно заменить следующим

$$0,6 \leq a_0 \leq 0,705. \quad (7')$$

Доказательство этого утверждения проводится аналогично приведенному выше.

Не трудно видеть, что параметр V , задаваемый формулой (5) при выполнении (6), (7) ((7')) и $K_0 \in (0, 1]$ ($K_0 \in (0, 05; 1]$), удовлетворяет неравенству $0,15 \leq V < 0,705$.

Проведенные численные расчеты показали, что лучшие результаты получаются для минимальных значений a_0 , удовлетворяющих неравенству (7) или (7').

Следовательно, для $K_0 \in (0, 1]$ в (5) нужно положить

$$a_0 = \frac{133}{220}, a_1 = 0, a_2 = -\frac{5}{11}. \quad (10)$$

Если $K_0 \in (0, 05; 1]$, то

$$a_0 = 0,6, a_1 = 0,05, a_2 = -0,5. \quad (11)$$

Результаты расчетов по схеме (3) – (5), (11) и схеме [1] $a_0 = 0,6, a_1 = -0,4, a_2 = 0$ для случая

$$F(u) = 5u^2 / ((1-u)^2 + 5u^2), u_0(x) = 0, u^0(t) = 1$$

в моменты времени $t = 0,25, 0,5$ приведены на рис. 1.

Замечание. Определим в разностной схеме (3) R_i^n следующим образом:

$$R_i^n = V \left(1 - \frac{\tau}{h} \left(E (F_u)_{i-1}^n + (1-E)(F_u)_i^n \right) \right) (F_i^n - F_{i-1}^n), \quad (12)$$

где

$$0 \leq E \leq 1,$$

$$0 < V \leq 1, V = \text{const}.$$

Если $E = 0,5$, то имеем обычно применяемый вид «антивязкости» [2].

Результаты численных исследований показали, что при проведении расчетов по схеме (3), (12), с различными числами Куранта, для $V = \text{const}$ лучшие значения получаются, когда $E = 1, V = 0,4$.

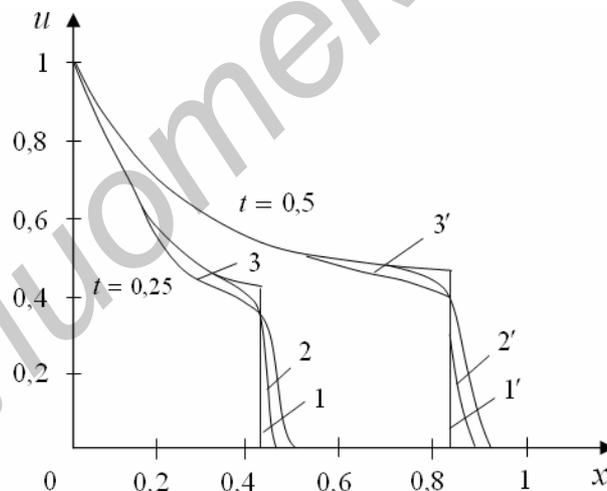


Рис. 1. Сравнение численных решений: 1, 1' – эталонные решения;

2, 2' – результаты расчетов по схеме (3) – (5), (11), когда $\tau = 0,05, h = 0,025, K_0 = 0,5$;

3, 3' – результаты расчетов по схеме [1], когда $\tau = 0,05, R = 0,025, K_0 = 0,5$

ON THE APPLICATION OF «ANTIVIASKOST'» FOR THE DIFFERENCE SCHEME OF FIRST ORDER

YU.P. KRUPNOV

Abstract

The set of difference schemes for the one-dimensional Buckley-Leverett problem is considered.

Список литературы

1. *Крупнов Ю.П.* // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук. 1985. №1. С. 122.
2. *Леві Б.И. и др.* // ВЦ СО АН СССР. 1975. С. 170–183.

Библиотека БГУМР