УДК 621.396.029

О СООТВЕТСТВИИ МЕТОДА МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ АМПЛИТУД И ФАЗ И МЕТОДА КОМПЛЕКСНОЙ ЧАСТОТЫ

А.О. АШАМИС, А.М. БРИГИДИН

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 10 января 2011

Изложены принципы метода комплексной частоты, произведено сравнение этого метода с другими методами анализа нелинейных систем на примере негатронного генератора. Идентичность конечных результатов метода медленно меняющихся амплитуд и метода комплексной частоты говорит о глубокой внутренней связи обоих способов исследования автоколебательных систем. Показано, что методу комплексной частоты присущи такие положительные качества, как простота, физическая прозрачность и ясность, зримая связь конечных результатов с эквивалентной схемой негатрона, компактность построения решения задачи. Применение метода комплексной частоты расширяет рамки исследования автоколебательных систем нелинейной СВЧ-электроники, делает этот процесс более понятным и удобным для радиоспециалистов.

Ключевые слова: комплексная частота, амплитуда, генератор, автоколебательная система, эквивалентная схема, негатрон, СВЧ.

Введение

Процессы, происходящие в автоколебательных системах, описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Точных методов их решения (за небольшим исключением) не существует. В связи с этим было разработано большое количество разнообразных методов приближенного анализа нелинейных цепей.

Метод медленно меняющихся амплитуд (ММА) для электрических колебательных систем, близких к консервативным, позволил получить ряд ответов, относящихся к нелинейным автоколебательным системам и давно нашел широкое признание в качестве инструмента для решения ряда задач нелинейной радиотехники.

Метод комплексной частоты до настоящего времени не получил известности и распространения, несмотря на его простоту, физическую ясность и прозрачность, зримую связь с параметрами эквивалентной схемы, компактность построения. Если судить по журнальным статьям, этот метод анализа автоколебательных систем употребляется сравнительно редко, хотя встречаются уникальные работы с его использованием [1]. Однако при решении практических задач нелинейной СВЧ-электроники, которая сегодня переживает бурный рост, значительно удобнее пользоваться не классическим методом записи дифференциальных уравнений, а символическим, с применением комплексной частоты, который впервые употребил Д.Слэтер в работе [2].

Целью данной статьи является доказательство идентичности конечных результатов обоих методов медленно меняющихся амплитуд и комплексной частоты.

Вывод уравнений медленно меняющихся амплитуд и фаз

Метод медленно меняющихся амплитуд применяется в тех случаях, когда возникающие колебания близки по форме к гармоническим [3], что обычно имеет место при использовании в автогенераторе контура с высокой избирательностью. Уравнение, описывающее процессы в таких схемах, может быть записано в следующем виде:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega_0^2u=\varepsilon f_1\left(u,\dot{u}\right), \tag{1}$$

где u – мгновенное напряжение колебания; $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{L_kC_k}}$ – угловая резонансная частота резонатора; L_k, C_k – соответственно индуктивность и емкость резонатора; $\varepsilon=\dfrac{1}{Q}<<1$ – малый параметр; Q – добротность резонатора, t – текущее время. Подобными являются уравнения ламповых, транзисторных и диодных автогенераторов.

Если перенести в правую часть уравнения (1) ω_0^2u и добавить в обе части $\omega_{\text{Ã}}^2u$ (где $\omega_{\text{Ã}}$ – генерируемая частота колебаний, которая, в общем случае, может отличаться от ω_0), то прейдем к уравнению:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega_{\text{Ã}}^2u=f\left(u,\dot{u}\right), \tag{2}$$

где – $f\left(u,\dot{u}\right)=\varepsilon f_1\left(u,\dot{u}\right)+(\omega_{\text{Ã}}^2-\omega_0^2)u.$

Переход к «безразмерному» времени $\tau=\omega_{\text{Ã}}t$, имеющему смысл фазы колебаний $\dfrac{du}{d\tau}=\dfrac{du}{d\tau}\cdot\dfrac{d\tau}{dt}=\omega_{\text{Ã}}\cdot\dfrac{du}{d\tau}$ и $\dfrac{d^2u}{dt^2}=\omega_{\text{Ã}}^2\dfrac{d^2u}{d\tau^2}$, позволяет упростить уравнение (2):

$$\ddot{u}+u=\varepsilon\cdot F(u,\dot{u}), \tag{3}$$

где – $F\left(u,\dot{u}\right)=f_1\left(u,\dot{u}\right)+\dfrac{\mu}{\varepsilon}\cdot u$, $\mu=\dfrac{\omega_{\text{Ã}}^2-\omega_0^2}{\omega_{\text{Ã}}^2}<<1.$

Примем следующий порядок решения уравнения (3).

1. Преобразуем равенство (3) в систему, состоящую из двух дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого введем новую переменную $s(\tau)$. В результате получим:

$$\frac{du}{d\tau}=S, s\quad \frac{ds}{d\tau}=-u+\varepsilon\cdot F(u,\dot{u}). \tag{4}$$

2. Найдем функции $u(\tau)$ и $s(\tau)$ в колебательной системе без потерь, считая, что u и s (τ в скобках мы опускаем для сокращения написания) близки по форме к гармонической, поскольку $\varepsilon<<1$. С целью определения u и s в соотношении (4) положим $F\left(u,\dot{u}\right)=0$. Тогда

$$u=U\cos(\tau-\phi),\ s=-U\sin(\tau-\phi). \tag{5}$$

В формулах (5) U и ϕ соответственно амплитуда и фаза колебаний.

3. ММА предполагает, что в нелинейной автоколебательной системе (3) амплитуда U и фаза ϕ колебаний медленно (мало) меняются во времени за период колебаний, т.е.

$$\frac{du}{d\tau}=\frac{dU}{d\tau}\cos\left(\tau-\phi\right)-U\left(1-\frac{d\phi}{d\tau}\right)\sin\left(\tau-\phi\right), \tag{6}$$

$$\frac{ds}{d\tau}=-\frac{dU}{d\tau}\sin(\tau-\phi)-U\left(1-\frac{d\phi}{d\tau}\right)\cos\left(\tau-\phi\right). \tag{7}$$

Подставив (5), (6) и (7) в соотношения (4), найдем уравнения для определения $\dfrac{dU}{d\tau}$ и $\dfrac{d\phi}{d\tau}$:

$$\frac{dU}{d\tau}\cos(\tau-\phi)+U\frac{d\phi}{d\tau}\sin(\tau-\phi)=0,\ \ \frac{dU}{d\tau}\sin(\tau-\phi)+U\frac{d\phi}{d\tau}\cos(\tau-\phi)=\varepsilon\cdot F(u,\dot{u}).$$

В дальнейшем, опуская подробности построения алгоритма ММА, приведем окончательные уравнения, которые позволяют найти медленно меняющиеся амплитуду $\dfrac{dU}{d\tau}$ и фазу $\dfrac{d\phi}{d\tau}$: $\dfrac{dU}{d\tau}=\varepsilon\cdot\Phi_0(U)$, $U\dfrac{d\phi}{d\tau}=\varepsilon\cdot\Psi_0(U)$, где (8)

$$\Phi_0(U)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}F(u,\dot{u})\sin\alpha d\alpha, \tag{9}$$

$$\Psi_0(U)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}F\left(u,\dot{u}\right)\cos\alpha d\alpha, \tag{10}$$

Уравнения (8) называются уравнениями медленно меняющихся амплитуд и фаз, поскольку они справедливы в тех случаях, когда U и ϕ медленно (мало) изменяются за период колебаний. За ними также прочно закрепилось название «укороченные уравнения». Так их впервые назвали советские ученые-академики Н. Папалекси и Л. Мандельштам.

Укороченные уравнения в методе медленно меняющихся амплитуд

Представим эквивалентную схему диодного автогенератора в виде параллельного соединения резонатора и источника тока i_a, а также сопротивления R_K, учитывающего потери в резонаторе (рис. 1).

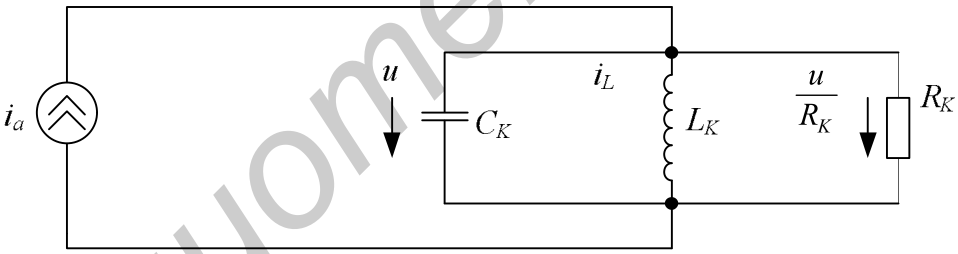

Рис. 1. Эквивалентная схема диодного автогенератора

Дифференциальные уравнения для напряжения на конденсаторе и тока i_L, протекающего через индуктивность L_K, имеют вид:

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{C}\left(-i_L-\frac{u}{R_K}+i_a\right),\ \frac{di_L}{dt}=\frac{1}{L}\cdot u. \tag{11}$$

Система уравнений (12) может быть преобразована в дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega_0^2u=\varepsilon\cdot\omega_0\left(-\frac{du}{dt}+\frac{di_a}{dt}\cdot R_K\right), \tag{12}$$

где $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{L_KC_K}}$; $\varepsilon=\dfrac{1}{Q}$; $Q=\dfrac{\omega_0C_K}{G_K}$; $G_K=\dfrac{1}{R_K}$; $Y_p=\omega_0G_K$ – характеристическая проводимость резонатора.

Введем «безразмерное» время $\tau = \omega_{Г} t$ и преобразуем уравнение (12), положив

$$\omega_{Г} \approx \omega_0 \,; \mu = \frac{2\Delta\omega_{Г}}{\omega_{Г}} \,; \Delta\omega_{Г} = \omega_{Г} - \omega_0 \,; F(u,\dot{u}) = -\frac{du}{d\tau} R_k \frac{di_a}{d\tau} + \frac{\mu}{\varepsilon} \cdot u : \qquad (12а)$$

$$\ddot{u} + u = \varepsilon \cdot F(u,\dot{u}). \qquad (13)$$

Решение уравнения (13) по аналогии с уравнением (3) ищем в виде:

$$u = U\cos(\tau - \phi) = U\cos\alpha. \qquad (14)$$

С целью упрощения анализа ограничимся действием на контур только первой гармоники тока i_a. Поскольку ток i_a в общем случае зависит от напряжения на контуре $i_a = \phi(u)$, то в нашем случае можно допустить, что эта зависимость проявляется в том, что первая гармоника тока i_a сдвинута относительно амплитуды напряжения U на угол Θ. С учетом этих замечаний мгновенный ток i_a можно представить в виде:

$$i_a = I_{a1}\cos(\alpha + \Theta), \text{ и } \frac{di_a}{d\tau} = -I_{a1}\sin(\alpha + \Theta). \qquad (15)$$

Выражения (14) и (15) позволяют записать функцию $F(u,\dot{u})$ (13) в следующей форме:

$$F(u,\dot{u}) = U\sin\alpha - R_K I_{a1}\sin\alpha \cdot \cos\Theta \cdot R_K I_{a1}\cos\alpha\sin\Theta + \frac{2\Delta\omega}{\varepsilon\omega} U\cos\alpha$$

Применив соотношения (10) и (11), найдем $\Phi_0(U)$ и $\Psi_0(U)$:

$$\Phi_0(U) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (U\sin\alpha - R_K I_{a1}\sin\alpha\cos\Theta - R_K I_{a1}\cos\alpha\sin\Theta + \frac{2\Delta\omega}{\varepsilon\omega} U\cos\alpha)\sin\alpha d\alpha =$$

$$-\frac{1}{2}\left(U - R_K I_{a1}\cos\Theta\right).$$

$$\Psi_0(U) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (U\sin\alpha - R_K I_{a1}\sin\alpha\cos\Theta - R_K I_{a1}\cos\alpha\sin\Theta + \frac{2\Delta\omega}{\varepsilon\omega} U\cos\alpha)\cos\alpha d\alpha =$$

$$\frac{1}{2}\left(U - R_K I_{a1}\sin\Theta\right).$$

Таким образом, используя выражение (9), получаем укороченные уравнения:

$$\frac{dU}{d\tau} = -\frac{\varepsilon}{2}(U - R_K I_{a1}\cos\Theta)\,, \quad \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{2\Delta\omega}{\varepsilon\omega_{Г}} - \frac{R_K I_{a1}}{U}\sin\Theta\right)$$

или, возвращаясь к «размерному» времени $t = \dfrac{\tau}{\omega_{Г}}$;

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{\omega_{Г}}{2Q}\left(U - R_K I_{a1}\cos\Theta\right)\,, \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega_{Г}}{2Q}\left[\frac{(\omega_{Г} - \omega_0)}{\omega_{Г}} \cdot 2Q - \frac{R_K I_{a1}}{U}\sin\Theta\right].$$

Принимая во внимание допущение (12а), запишем укороченные уравнения в следующем виде:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q}\cdot\left(U - R_K I_{a1}\cos\Theta\right),$$
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega_0}{2Q}\cdot\left[\frac{\omega_{\text{Г}} - \omega_0}{\omega_0}2Q - \frac{R_K I_{a1}}{U}\sin\Theta\right]. \qquad (16)$$

Анализ негатронной модели автогенератора

При рассмотрении метода комплексной частоты используем видоизмененную схему автогенератора (рис. 1), представив последний моделью в форме соединения адмитанса колебательного контура и негатрона (рис. 2).

Негатроном называют активное отрицательное сопротивление схемы автогенератора.

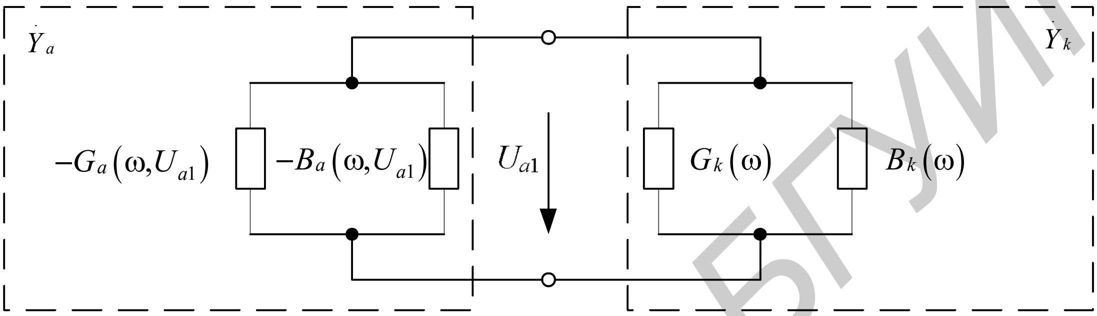

Рис. 2. Эквивалентная схема негатронного генератора

По первому закону Кирхгофа для схемы (рис. 2) справедливо равенство:

$\dot{Y}_a(\omega, U_{a1})\cdot U_{a1} + \dot{Y}_k(\omega)U_{a1} = 0$, или $-\dot{Y}_a(\omega, U_{a1}) + \dot{Y}_k(\omega) = 0$, $\dot{Y}_a(\omega, U_{a1})$, $\dot{Y}_k(\omega)$, U_{a1} − соответственно адмитансы негатрона, резонатора и амплитуда высокочастотного напряжения в схеме.

Уравнение (22) может быть преобразовано в систему двух уравнений:

$$-G_a(\omega, U_{a1}) + G_k(\omega) = 0,$$

$$-B_a(\omega, U_{a1}) + B_k(\omega) = 0,$$

где − $G_a(\omega, U_{a1})$, $G_k(\omega)$, $B_a(\omega, U_{a1})$, $B_k(\omega)$ − соответственно активные проводимости негатрона и резонатора, реактивные проводимости негатрона и резонатора.

Определим адмитанс резонатора автогенератора $\dot{Y}_k$. Поскольку в резонаторе переходный процесс (например, разряд-заряд конденсатора) происходит перманентно, для нахождения адмитанса резонатора целесообразно использовать не реальную физическую частоту ω, а некоторую комплексную частоту:

$\omega_k = \omega - j\delta$, где ω − мгновенная угловая, физически реализуемая частота; δ − затухание резонатора. Причем, $\omega >> \delta$.

Положительные δ указывают на нарастание амплитуды во времени, а отрицательные − на уменьшение амплитуды. Для выбора знака не существует какого-либо правила. Он выбирается по соглашению, поскольку комплексная частота ω_k и сопряженная с ней частота ω_k^* в решении уравнений с действительными переменными всегда встречаются вместе [4].

Мгновенную угловую частоту ω можно найти, обратившись к выражению (14), обозначив фазу колебаний через $\psi = \omega t - \phi$ и взяв производную $\frac{d\psi}{dt}$:

$$\omega = \frac{d\psi}{dt} = \omega_{\text{Г}} - \frac{d\phi}{dt}. \qquad (17)$$

Из соотношения (17) можно отыскать отклонение мгновенной частоты ω от генерируемой частоты $\omega_{\tilde{A}}$: $\omega - \omega_{\tilde{A}} = -\dfrac{d\phi}{dt}$. (18)

Затухание контура δ определим по следующему алгоритму. В общем случае напряжение на контуре изменяется по закону:

$$u = U \cdot e^{j\omega t}, \tag{19}$$

где $U = U_0 \cdot e^{-\delta t}$, а U_0 − начальная амплитуда колебаний.
Продифференцировав выражение (19), отыщем значение δ:

$$\delta = -\frac{dU/dt}{U}$$

Адмитанс резонатора на комплексной частоте равен:

$$\dot{Y}_k(\omega_k) = G_k + j\omega_k C_k + \frac{1}{j\omega_k L_k} = G_k + j\omega_k C_k\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_k^2}\right) = G_k + 2jC_k(\omega - j\delta - \omega_0) \tag{20}$$

Введем в выражение (19) $\omega_{\tilde{A}}$ −генерируемую частоту. Тогда с учетом соотношений (18) и (19)

$$\dot{Y}_k = G_k - 2j\delta C_k + 2jC_k\left(-\frac{d\phi}{dt} + \omega_{\tilde{A}} - \omega_0\right) = G_k + 2\frac{dU}{dt}C_k + 2jC_k\left[-\frac{d\phi}{dt} + (\omega_{\tilde{A}} - \omega_0)\right]. \tag{21}$$

Положим, что адмитанс негатрона равен

$$\dot{Y}_a = \frac{I_{a1}}{U}\cos\Theta + j\frac{I_{a1}}{U}\sin\Theta. \tag{22}$$

Здесь Θ − угол сдвига первой гармоники тока негатрона относительно напряжения. Используя равенства, получим:

$$\begin{cases} G_k + 2\dfrac{dU}{dt}C_k - \dfrac{I_{a1}}{U}\cos\Theta = 0, \\ 2C_k\left[-\dfrac{d\varphi}{dt} + (\omega_{\tilde{A}} - \omega_0)\right] - \dfrac{I_{a1}}{U_{a1}}\sin\Theta = 0. \end{cases} \tag{23}$$

После незначительных преобразований система уравнений (23) становится системой укороченных уравнений:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q}\left(U - \frac{I_{a1}}{G_k}\cos\Theta\right), \tag{24}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\frac{\omega_{\tilde{A}} - \omega_0}{\omega_0} \cdot 2Q - \frac{I_{a1}}{\Theta_k U}\sin\Theta\right). \tag{25}$$

Полученные дифференциальные уравнения (24) и (25) вплоть до знака совпадают с укороченными уравнениями (16) и определяют закон установления амплитуды и фазы на интервалах времени, кратных периоду колебаний. На протяжении каждого отдельного периода амплитуда считается постоянной, а фаза линейно-нарастающей, т.е. на протяжении каждого периода напряжение считается гармоническим. Из (24) и (25) видно, что в данной работе учтено влияние на контур только первой гармоники периодической последовательности импульсов тока произвольной формы негатрона. Это обусловлено допущением о чисто гармонической форме напряжения на контуре. Все остальные гармоники тока считаются равными нулю, поскольку не учитывалось влияние на контур высших гармоник напряжения.

Заключение

Рассмотренные в работе примеры анализа нелинейных устройств подтвердили предположения, отмеченные в вводной части статьи о положительных сторонах метода комплексной частоты, а полученные уравнения свидетельствуют о глубокой внутренней связи этого способа с другими методами анализа нелинейных колебательных систем: ММА, фазовой плоскости, гармонического баланса и др. Применение метода комплексной частоты, разумеется, не ограничивается только анализом работы автономных генераторов. С помощью метода комплексной частоты можно получить удовлетворительные результаты при решении задач исследования генераторов с принудительной синхронизацией [1], влияние нагрузки на характеристики автогенераторов [5], режимов многочастотного воздействия на автоколебательные системы и т.п.

Метод комплексной частоты эффективен и удобен для анализа работы не только диодных автогенераторов, но и транзисторных СВЧ-генераторов потому, что уравнения баланса амплитуд и фаз стационарного режима транзисторного автогенератора являются основой метода.

ABOUT CONFORMITY OF THE METHOD OF SLOWLY CHANGING AMPLITUDES AND PHASES AND THE METHOD OF COMPLEX FREQUENCY

A.O. ASHAMES, A.M. BRIGIDIN

Abstract

Principles of a method of complex frequency are stated, comparison of this method with alternative methods is made. Identity of end results of a method of slowly changing amplitudes and method of complex frequency speaks about deep communication of both ways of research of self-oscillatory systems.

Positive qualities such, as simplicity, physical transparency and communication of end results with the equivalent diagram negatron, compactness of construction of the solution to the problem are inherent in a method of complex frequency.

Литература

1. *Курокава К.* // Принудительная синхронизация твердотельных СВЧ-генераторов.1973. Т. 60, №10,
2. *Slater J.C.* // Microwave Electronics. NewYork: Van Nostrand, 1950. P. 205−210.
3. *Гоноровский И.С.* // Радиотехнические цепи и сигналы. М., 1986.
4. *Пиппард А.* // Физика колебаний. М., 1985.
5. *Ашамис А.О, Кислый Ю.А., Бригидин А.М* // Докл. БГУИР. 2010. №48. С. 11−16.