

УДК 621.391; 621.395.44

СМЕЖНО-ГРУППОВЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИГНАЛОВ

Д.Л. ХОДЫКО, С.Б. САЛОМАТИН

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 20 мая 2012

Рассматривается алгоритм смежно-группового спектрального преобразования со свойством циклического сдвига спектра сигнала. Дается пример применения спектрального преобразования для формирования сигналов с дискретной частотно-фазовой манипуляцией. Предложенное спектральное преобразование также может использоваться для поиска и оценки параметров сложного сигнала.

Ключевые слова: смежно-групповое спектральное преобразование, смежные классы.

Спектральные смежно-групповые преобразования

Дискретное z -преобразование сигнала определяется выражением

$$X(z) = \sum_{n=0}^{L-1} S(n) z^{-n}, \quad (1)$$

где $s(n)$ – дискретные отсчеты сигнала; $z = \exp(st_d)$, $s = j\omega + \sigma$; L – длина преобразования; T_d – интервал дискретизации. При $z = v \exp(j2\pi k/L)$, где v – радиус вектора на комплексной плоскости, выражение (1) сводится к вычислению дискретного преобразования Фурье от взвешенного сигнала $v^{-n}s(n)$ [1, 2], которое в матричном виде записывается как

$$\mathbf{X} = \mathbf{W} \mathbf{v} \mathbf{S}, \quad (2)$$

где \mathbf{W} – матрица преобразования Фурье, \mathbf{v} – диагональная матрица элементов v^{-n} .

Использование смежных классов преобразования Фурье [3] приводит выражению (2) к следующей записи:

$$\mathbf{F}_T^{(q)} = \mathbf{W} \mathbf{U}^{(q)} \mathbf{v} \mathbf{S}, \quad (3)$$

где $\mathbf{U}^{(q)} = \text{diag} \left[\exp \left(\frac{-j2\pi q n}{L\tilde{Q}} \right) \right]$; \tilde{Q} – число смежных классов; $q = 0.. \tilde{Q}-1$. Выражение (3)

можно представить в виде бичастотного преобразования по параметрам q, k :

$$X(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{N-1} S(n) z_1^{-n} z_2^{-n},$$

где $z_1 = v \exp(j2\pi k/L)$; $z_2 = \exp(j2\pi q/(L\tilde{Q}))$.

На рис. 1 показан результат спектрального преобразования дискретно-экспоненциальной функции (ДЭФ) $S(n) = \exp(j2\pi n(k_s + \Delta k)/L)$ с дискретной расстройкой по частоте $\Delta k = 0,5$ и дискретным индексом частоты $k_s = 3$. Длина сигнала $L = 64$, радиус $\nu = 1$. Число смежных классов $\tilde{Q} = 8$. Из рис. 1 видно, что максимум энергетического спектра приходится на единственное значение $q = 4$.

Результат не изменится при умножении (3) на единичную диагональную матрицу: $\mathbf{F}_T^{(q)} = \mathbf{I}\mathbf{F}_T^{(q)} = \mathbf{W}\mathbf{U}^{(q)}\mathbf{v}\mathbf{S}$. Единичная матрица может быть представлена через матрицу линейного оператора циклического сдвига [4], тогда прямое и обратное смежно-групповое преобразование (СГП) при $\nu = 1$ будет иметь вид

$$\mathbf{F}_T^{(q,i)} = \mathbf{W}(\mathbf{D}^i \mathbf{U}^{(q)})\mathbf{S}, \quad \mathbf{S}' = L^{-1}(\mathbf{D}^m \mathbf{U}^{(q)})^H \mathbf{W}^{-1} \mathbf{F}_T^{(q,i)}, \quad (4)$$

где i, m – показатель степени матрицы циклического сдвига, $i, m = 0..L-1$.

Спектр $\mathbf{F}_T^{(q,i)}$ зависит от двух переменных – номера смежного класса q и показателя степени i матрицы циклического сдвига. В таблице приведены свойства матрицы линейного оператора циклического сдвига и свойства $\mathbf{D}^i \mathbf{U}^{(q)}$.

Свойства матрицы циклического сдвига

Свойства матрицы линейного оператора циклического сдвига	Свойства произведения $\mathbf{D}^i \mathbf{U}^{(q)}$
$(\mathbf{D}^i)^H = (\mathbf{D}^{L-i}), (\mathbf{D}^{L-i})^H = (\mathbf{D}^i), \mathbf{D}^{-i} = \mathbf{D}^{L-i}, (\mathbf{D}^i)^H \mathbf{D}^i = \mathbf{I}$ $(\mathbf{D}^{L-i})^H \mathbf{D}^i \neq \mathbf{D}^{L-i} (\mathbf{D}^i)^H, (\mathbf{D}^{L-i})^H \mathbf{D}^i = \mathbf{D}^i (\mathbf{D}^{L-i})^H$	$(\mathbf{D}^i \mathbf{U}^{(q)})^H \mathbf{D}^i \mathbf{U}^{(q)} = (\mathbf{U}^{(q)})^H \mathbf{U}^{(q)} = \mathbf{I},$ $(\mathbf{D}^{L-i} \mathbf{U}^{(q)})^H \mathbf{D}^i \mathbf{U}^{(q)} = (\mathbf{U}^{(q)})^H \mathbf{D}^{2i} \mathbf{U}^{(q)}$

Справедливость свойств устанавливается прямым вычислением. Например, для матрицы правого сдвига

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^H = \mathbf{D}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Свойство ортогональности. Произведение операторов разложения и восстановления сигнала из (4)

$$\begin{aligned} & \left(L^{-1} (\mathbf{D}^m \mathbf{U}^{(q)})^H \mathbf{W}^{-1} \right) \left(\mathbf{W} (\mathbf{D}^i \mathbf{U}^{(q)}) \right) = (\mathbf{D}^m \mathbf{U}^{(q)})^H (\mathbf{D}^i \mathbf{U}^{(q)}) = \\ & = (\mathbf{U}^{(q)})^H \mathbf{D}^{L-m} \mathbf{D}^i \mathbf{U}^{(q)} = (\mathbf{U}^{(q)})^H \mathbf{D}^{i-m} \mathbf{U}^{(q)} \end{aligned}$$

при $(i-m) \bmod L \equiv 0$ дает единичную диагональную матрицу. Восстановленный сигнал по преобразованию (4) является инвариантным относительно значения q .

В смежно-групповом преобразовании (4) помножим спектр на \mathbf{D}^i и получим пару преобразований

$$\mathbf{F}_T^{(q,i)} = \mathbf{D}^i \mathbf{W} (\mathbf{D}^i \mathbf{U}^{(q)}) \mathbf{S}, \quad \mathbf{S}' = L^{-1} (\mathbf{D}^m \mathbf{U}^{(q)})^H \mathbf{W}^{-1} \mathbf{F}_T^{(q,i)}. \quad (5)$$

Выражение (5) позволяет выполнить циклический сдвиг спектра сигнала в частотной области. На рис. 2 приведен пример циклического сдвига линейно-частотно-модулированного сигнала $S(n) = \exp(j2\pi nk_s/L + j\alpha_{NB} n^2)$ с параметрами $k_s = 5$, $L = 64$, $\alpha = 0,015$. Параметр преобразования $i = 40$.

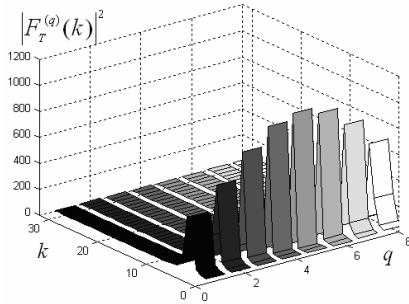


Рис. 1. Бичастотное преобразование дискретно экспоненциальной функции

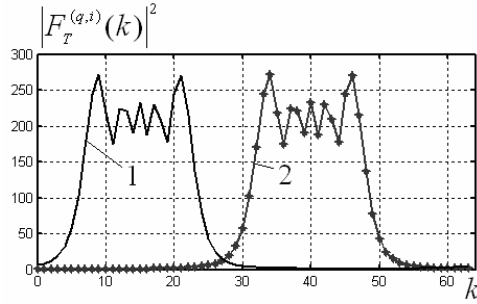


Рис. 2. Энергетический спектр исходного сигнала (1) и его циклически сдвинутый спектр (2)

В общем случае в силу различий i , m сигнал и его спектр не будут соответствовать друг другу. Для соответствия сдвинутого спектра с его временной формой в обратном преобразовании должно выполняться условие $i = m$.

Алгоритм (5), также как и алгоритм (4), частотный сдвиг в пределах смежных классов во временную область не трансформирует. Для сохранения частотного сдвига необходимо применить обратное преобразование (4) с параметрами $m = q = 0$.

Вычислительная сложность преобразования (5) определяется вычислительной сложностью преобразования Фурье. Для (5) на основе алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) типа «бабочка» длиной $L = 2^n$ потребуется $L \log_2(L)$ операций сложения, $0,5L \log_2(L) + 2L$ операций комплексного умножения, включая $\mathbf{U}^{(q)}$. Матрицы циклического сдвига заменяются на операции перестановки входных и выходных значений алгоритма БПФ.

Синтез сигналов с фазовой манипуляцией

Внесем в восстановленный сигнал по преобразованию (4) зависимость от параметра q и запишем выражение для восстановления сигнала как $\mathbf{S}' = L^{-1} (\mathbf{D}^m \mathbf{U}^{(q)}) \mathbf{W}^{-1} \mathbf{F}_T^{(q,i)}$. Тогда преобразование, связывающее сигналы \mathbf{S} и \mathbf{S}' , имеет вид

$$\mathbf{S}' = (\mathbf{D}^{m+i} \mathbf{U}^{(q)}) \mathbf{S}. \quad (6)$$

Матрица циклического сдвига приводит к фазовому изменению спектра сигнала. Во временной области фазовые изменения соответствуют циклическому сдвигу исходного сигнала на величину $i + m$. В сигнал в виде ДЭФ с дискретной расстройкой по частоте Δk после преобразования (6) добавляются два фазовых изменения на позициях m и $(i + m) \bmod L$, в общем случае пропорциональных значению $2\pi(\Delta k - q/\tilde{Q})$. Значения Δk и \tilde{Q} определяют возможный набор фазовых изменений. В частном случае, когда $\tilde{Q} = 1$, имеем одно изменение фазы сигнала в месте $(i + m) \bmod L$. Наличие смежных классов приводит к дискретному частотному сдвигу не более чем на два значения.

Выбор соответствующих параметров преобразования (6) позволяет получить модели сигналов с дискретным изменением фазы, преобразование (5) выполняет частотный сдвиг спектра сигнала. Указанные свойства позволяют синтезировать сигналы с частотно-фазовой манипуляцией. По преобразованию (6) сформируем сигнал, используя параметры i, m и q . На рис. 2 показан пример синтезированного сигнала с фазовой манипуляцией из ДЭФ с $\Delta k = 0,8$ и произвольными параметрами преобразования: $\tilde{Q}=4, q=2, i=40, m=8$.

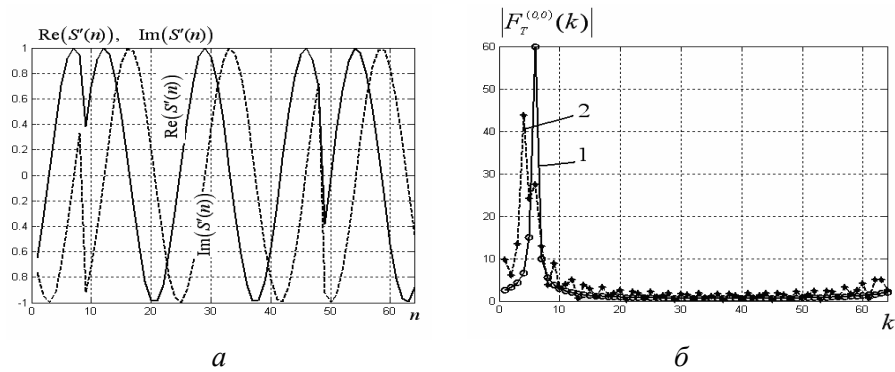


Рис. 3. Синтезированный сигнал (а) и его спектр (б):
1 – спектр исходной ДЭФ, 2 – спектр синтезированного сигнала

Из рис. 3,а видно, что фазовые изменения произошли на позициях 8 и 48. Максимум спектра синтезированного сигнала смещен относительно максимума спектра исходной ДЭФ (рис. 3,б).

Параметры i, m используются для установки фазового преобразования в заданном месте. Конкатенацией синтезированных реализаций получается сигнал без изменения фазы на краях выборки. Преобразование (6) позволяет формировать сигналы с требуемым числом изменений фазы в синтезированном сигнале, причем в одной выборке длиной L может быть не более двух изменений фазы.

Кодофазоманипулированный (КФМ) сигнал получается из ДЭФ с $\Delta k = 0$ с параметрами преобразования, например, $i=0, m=0, \tilde{Q}=2$. В прямом преобразовании (6) q принимает значения 0 или 1 в соответствии со значениями псевдослучайной последовательности (ПСП). КФМ-сигнал также можно получить при $i=0, \Delta k=0, \tilde{Q}=1$, управляя m , которое принимает два значения: 0 и $0,5L/k$. На рис. 4 а показаны совмещенные реализации синтезированного КФМ-сигнала.

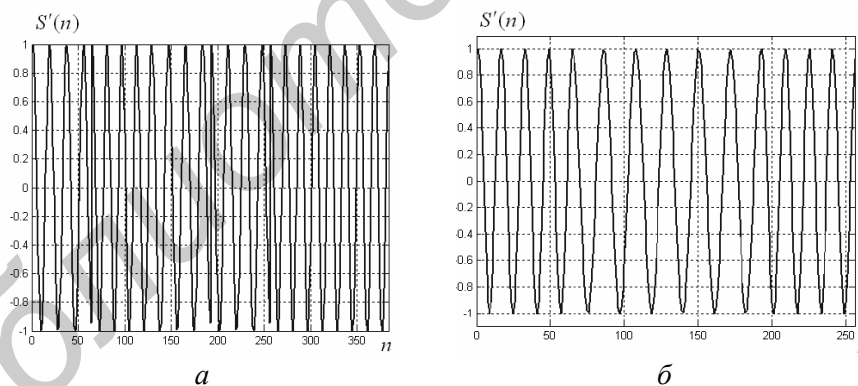


Рис. 4. Временные реализации синтезированных КФМ (а) и ЧМ (б) сигналов

Частотно-манипулированный (ЧМ) сигнал получается из ДЭФ с $\Delta k=0,5$ при $i=0, m=0, \tilde{Q}=4$. Значения дискретных частот уточняются выбором q . На рис. 4,б показана реализация ЧМ сигнала. Из рис. 4,б видно, что в точках соединения сигналов фаза не изменяется, следовательно, может использоваться когерентная обработка синтезированного сигнала. Спектральное преобразование (4) можно применить для детектирования ЧМ-сигналов.

Сигналы с ортогональными частотами в спектральной области получаются из комплексной экспоненты на основании преобразования (5):

$$\mathbf{F}_T^{(q,p,i)} = \left(\sum_{p \in \mathbf{P}} \mathbf{D}^{i-p} \right) \mathbf{W} \left(\left(\sum_{p \in \mathbf{P}} \mathbf{D}^{i-p} \right) \mathbf{U}^{(q)} \right) \mathbf{s},$$

где \mathbf{p} является множеством натуральных чисел размерности L .

Значения из множества \mathbf{p} определяют расположение частот на частотной оси. Во временную область спектр переводится обратным преобразованием со значениями $q = 0, i = m = 0$: $\mathbf{S}_{MF} = L^{-1} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{F}_T^{(q,\mathbf{p},i)}$.

Управление частотами осуществляется значениями из \mathbf{p} и частотным сдвигом i . Это позволяет формировать сигналы с прыгающими частотами по заранее определенному закону и двигать их по частотной оси.

Алгоритм многоканальной спектральной обработки при поиске и оценке параметров сложных сигналов

Быстрые алгоритмы корреляционной обработки реализуются с использованием алгоритмов быстрого преобразования Фурье. Максимальный частотный сдвиг в спектральном преобразовании (5) равен L/T_H . Это может превосходить область неопределенности по частоте $[f_{Dop\min} \ f_{Dop\max}]$ при поиске сигнала. Поэтому логично использовать количество сдвигов P , укладывающихся в область неопределенности: $P = (|f_{Dop\min}| + |f_{Dop\max}|) T_H$. С учетом свойства циклического сдвига спектра в преобразовании (5), алгоритм вычисления дискретной функции неопределенности [4]

$$\Phi(k, m) = \left| \sum_{n=0}^{L-1} y(n) G_0(n+m) \exp(-j 2\pi kn/L) \right|^2,$$

где $y(n)$ – отсчеты наблюдаемого сигнала; $G_0(n)$ – значения опорной псевдослучайной последовательности, k и m – отсчеты дискретных индексов частоты и задержки соответственно, включает следующие действия.

1. Вычисляется СГП (5) с параметрами $i = 0, q = 0..Q-1$ от входной смеси $y(n)$.

2. Вычисляется СГП (5) с параметрами $i = 0..P-1, P < L$ и $q = 0$ от опорной ПСП $G_0(n)$.

3. Вычисляется спектр $\mathbf{F}_T^{(i,q)}$ сечений двумерной корреляционной функции r :

$$\mathbf{F}_T^{(i,q)} = F^{(0,q)} \{ \mathbf{y} \} \cdot F^{(i,0)} \{ \mathbf{G}_0 \}^*,$$

где $F^{(i,q)} \{ \mathbf{x} \}$ – обозначает спектральное преобразование от \mathbf{x} : $\mathbf{F}_T^{(i,q)} = F^{(i,q)} \{ \mathbf{x} \}$; \mathbf{y} и \mathbf{G}_0 – вектора отчетов входного сигнала и опорной ПСП длиной L .

4. Вычисляются сечения функции неопределенности как обратное СГП (5) от $\mathbf{F}_T^{(i,q)}$ с параметрами $m = i, q = 0..Q-1$:

$$\Phi^{(i,q)} = \left| L^{-1} (\mathbf{D}^i \mathbf{U}^{(q)})^H \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{D}^i \mathbf{U}^{(q)}) \mathbf{F}_T^{(i,q)} \right|^2.$$

5. Оценка параметров сигнала определяется как:

- номер смежного класса $\hat{q} = \arg \max_{i,q} (\Phi(k, m)^{(q,i)})$;

- выбор функции неопределенности $\Phi(k, m) = \arg \max_{i,q} (\Phi(k, m)^{(q,i)})$;

- дискретный индекс частоты $\hat{k} = \arg \max_{k,m} (\Phi(k, m))$;

- дискретный индекс задержки $\hat{m} = \arg \max_{k,m} (\Phi(k, m))$;

- оценка частоты доплеровского смещения [3] $\hat{f}_{Dop} = (\hat{q} + \hat{k}\tilde{Q}) / (L\tilde{Q}T_H)$, где T_H – интервал анализа.

Спектральный алгоритм поиска сигналов является многоканальным с числом каналов $P \times \tilde{Q}$, работа которых может быть организована в последовательном или параллельном режимах. Свойство циклического сдвига спектра сигнала по частоте позволяет обойтись без произведения опорного гармонического колебания на ПСП, а применение смежных классов повышает точность оценки частоты. Время поиска $P \times \tilde{Q}$ -канального спектрального преобразования равно интервалу анализа T_H , что соответствует n -канальному обнаружителю [5].

Вычислительная сложность одного канала составляет $3L \log_2 L$ операций сложения, $1,5L \log_2 L + 6L$ операций умножения.

Выводы

Представлен алгоритм частотно-сдвигового спектрального преобразования, обладающий свойством циклического сдвига спектра сигнала. Изменение параметров алгоритма обработки позволяет синтезировать сигналы с дискретной частотно-фазовой манипуляцией. Причем получаемые ЧМ-сигналы являются когерентными. Вычислительная сложность спектрального преобразования соизмерима с вычислительной сложностью алгоритма быстрого преобразования Фурье. Рассмотрено применение спектрального преобразования для поиска и оценки параметров сложного сигнала. Время поиска составляет интервал анализа. Точность оценки частоты пропорциональна числу смежных классов.

ADJACENT-GROUP SPECTRAL TRANSFORMATION COMPLEX SIGNALS

D.L. KHODYKO, S.B. SALOMATIN

Abstract

An algorithm presented by the adjacent-group transformation of the spectral properties of a cyclic shift of the signal is considered. The transformation is used to generate signals with a frequency-phase-shift keying and to search for complex signals.

Список литературы

1. Рабинер П., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М., 1978.
2. Петько В.И., Куколин В.Е., Шихов Н.Б. Цифровая фильтрация и обработка сигналов. Мн., 1995.
3. Ходыко Д.Л., Саломатин С.Б. // Докл. БГУИР. 2008. №1(31). С. 16-21.
4. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М, 1990.
5. Тузов Г.И. Статистическая теория приема сложных сигналов. М., 1977.