

УДК 517.977

## РАСШИРЕННОЕ УСЛОВИЕ ПОСТОЯННОГО РАНГА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ ОПТИМИЗАЦИИ

С.В. АКТАНОРОВИЧ, Л.И. МИНЧЕНКО, А.Н. ТАРАКАНОВ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 2 марта 2012

Предлагается модификация известного условия регулярности постоянного ранга Р.Жанена, позволяющая доказать дифференцируемость по направлениям функции оптимального значения в задаче параметрического нелинейного программирования.

*Ключевые слова:* нелинейное программирование, условия регулярности, функция оптимального значения, дифференцируемость по направлениям.

### Введение

В теории оптимизации дифференциальным свойствам функции оптимального значения посвящено большое число публикаций (обзор их можно найти в работах [1, 2]) ввиду значения данных свойств в анализе устойчивости задачи относительно возмущений ее параметров.

Рассмотрим функцию оптимального значения

$$\varphi(x) = \inf \{ f(x, y) \mid y \in F(x) \},$$

определенную для задачи минимизации

$$f(x, y) \rightarrow \inf_y$$

на множестве

$$F(x) = \{ y \in R^m \mid h_i(x, y) \leq 0 \quad i \in I, \quad h_i(x, y) = 0 \quad i \in I_0 \},$$

где  $x \in R^n$  – вектор параметров,  $f(x, y)$ ,  $h_i(x, y)$   $i = 1, \dots, p$  – непрерывно дифференцируемые функции из  $R^n \times R^m$  в  $R$ ,  $I = \{1, \dots, s\}$ ,  $I_0 = \{s+1, \dots, p\}$ .

Обозначим через

$$\omega(x) = \{ y \in F(x) \mid f(x, y) = \varphi(x) \}$$

множество оптимальных решений поставленной задачи, через  $F$  – многозначное отображение, ставящее в соответствие каждой точке  $x \in R^n$  множество  $F(x) \subset R^m$ . Будем предполагать, что для точки  $x_0 \in \text{dom}F$  существуют окрестность  $V(x_0)$  и ограниченное множество  $Y_0 \subset R^m$  такие, что  $\omega(x) \subset Y_0$  для всех  $x \in V(x_0)$ .

Пусть  $z = (x, y)$ ,  $z_0 = (x_0, y_0)$ ,  $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ . Введем функцию Лагранжа

$$L(z, \lambda) = f(z) + \langle \lambda, h(z) \rangle, \text{ где } \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p), \quad h = (h_1, \dots, h_p).$$

Обозначим через

$$\Lambda(z) = \{ \lambda \in \mathbb{R}^p \mid \nabla_x L(z, \lambda) = 0, \lambda_i \geq 0 \text{ и } \lambda_i h_i(z) = 0, i \in I \}$$

множество множителей Лагранжа и через  $I(z) = \{i \in I \mid h_i(z) = 0\}$  множество индексов активных ограничений в точке  $z = (x, y) \in grF$ .

Пусть  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ . Для функции оптимального значения изучим существование производной по направлению  $\bar{x}$  в точке  $x_0$ :

$$\phi'(x_0; \bar{x}) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (\phi(x_0 + t\bar{x}) - \phi(x_0)).$$

Наличие дифференцируемости функции оптимального значения по направлениям тесно связано с налагаемыми на ограничения задачи условиями регулярности, среди которых одним из самых известных является условие постоянного ранга, введенное в работе Р. Жанена [3]. Условие регулярности постоянного ранга (CRCQ) достаточно часто используется в нелинейном программировании для исследования дифференцируемости функции оптимального значения и устойчивости и чувствительности решений экстремальных задач относительно возмущений параметров [4, 5]. В то же время явными недостатками условия CRCQ являются как достаточная жесткость (существует достаточно широкий круг задач, для которых оно не выполняется там, где другие условия регулярности могут быть вполне эффективны), так и трудность его проверки. В работах [6, 7] было получено так называемое ослабленное условие регулярности постоянного ранга, которое позволяет в определенной степени минимизировать отмеченные недостатки CRCQ.

**Определение 1 ([6, 7]).** Будем говорить, что в точке  $z_0 = (x_0, y_0) \in grF$  выполнено ослабленное условие регулярности постоянного ранга (RCRCQ), если для любого подмножества индексов  $J$  такого, что  $I_0 \subset J \subset I(z_0) \cup I_0$ , система векторов  $\nabla_y h_i(z)$ ,  $i \in J$  имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки  $z_0$ .

Ослабленное условие регулярности постоянного ранга и его приложения вызвали ряд интересных публикации [8-11] по данной тематике. В то же время следует отметить, что ни выполнение классического условия постоянного ранга, ни его обобщения RCRCQ не обеспечивают сами по себе дифференцируемости по направлениям функции оптимального значения в задаче нелинейного программирования и требуют наличия дополнительных условий. В этой связи предлагается расширенное условие постоянного ранга (ECR), которое в совокупности с RCRCQ позволяет гарантировать существование производной  $\phi'(x_0; \bar{x})$ .

**Определение 2.** Будем говорить, что многозначное отображение  $F$  удовлетворяет расширенному условию постоянного ранга (или ECR-регулярно) по направлению  $\bar{x}$  в точке  $z_0 = (x_0, y_0)$ ,  $y_0 \in F(x_0)$ , если для любого подмножества индексов  $J = K \cup I_0$ , где  $K \subset I(z_0)$ , система векторов

$$\left( \begin{array}{c} \nabla_y h_i(x, y) \\ \langle \nabla_x h_i(x, y), \bar{x} \rangle \end{array} \right)_{i \in J}$$

имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки  $z_0 = (x_0, y_0)$ .

Следуя [2], введем нижнюю производную Дини многозначного отображения  $F$  в точке  $z_0 = (x_0, y_0) \in grF$  по направлению  $\bar{x}$ :

$$DF(z_0; \bar{x}) = \{ \bar{y} \in \mathbb{R}^m \mid \exists o(t) \text{ такая, что } o(t)/t \rightarrow 0 \text{ для } t \downarrow 0 \\ \text{и } y_0 + t\bar{y} + o(t) \in F(x_0 + t\bar{x}) \forall t \geq 0 \}$$

и множество

$$\Gamma((x, y); \bar{x}) = \{ \bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle \leq 0 \quad i \in I(x, y), \quad \langle \nabla h_i(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle = 0 \quad i \in I_0 \}$$

$$\Gamma(z_0; \bar{x}) = \{ \bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(z_0), \bar{z} \rangle \leq 0 \quad i \in I(z_0), \quad \langle \nabla h_i(z_0), \bar{z} \rangle = 0 \quad i \in I_0 \}, \quad \bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}).$$

Покажем, что при  $\bar{x} \in \text{dom} \Gamma(z_0; \cdot)$  из условия *ECR*-регулярности в точке  $z_0 = (x_0, y_0) \in \text{gr}F$  следует частичное выполнение условия RCRCQ в этой точке.

Действительно, положим, что  $I^2(z_0, \bar{z}) = \{ i \in I(z_0) \mid \langle \nabla h_i(z_0), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle = 0 \}$ . Пусть  $\bar{y} \in \Gamma(z_0; \bar{x})$ ,  $J = J(\bar{z}) = I^2(z_0, \bar{z}) \cup I_0$ . Обозначим  $z = (x, y)$ ,  $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ . Тогда  $\langle \nabla_y h_i(z_0), \bar{y} \rangle + \langle \nabla_x h_i(z_0), \bar{x} \rangle = 0 \quad i \in J$  и, следовательно, вследствие условия *ECR*-регулярности для всех точек  $z$ , достаточно близких к  $z_0$ , справедливо

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \nabla_y h_i(z) & i \in J \\ \langle \nabla_x h_i(z), \bar{x} \rangle \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \nabla_y h_i(z_0) & i \in J \\ \langle \nabla_x h_i(z_0), \bar{x} \rangle \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \nabla_y h_i(z_0) & i \in J \end{pmatrix} = l,$$

откуда

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \nabla_y h_i(z) & i \in J \end{pmatrix} \leq l.$$

Последнее означает, что

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \nabla_y h_i(z_0) & i \in J \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \nabla_y h_i(z) & i \in J \end{pmatrix} = l.$$

Таким образом, при выполнении в точке  $z_0$  условия *ECR*-регулярности по направлению  $\bar{x}$  система векторов  $\{ \nabla_y h_i(z) \quad i \in J \}$  при всех  $J = J(\bar{z}) = I^2(z_0, \bar{z}) \cup I_0$  и всех  $\bar{y} \in \Gamma(z_0; \bar{x})$  сохраняет ранг в некоторой окрестности  $z_0$ .

### Вычисление производной многозначного отображения $F$

Следующая теорема позволяет вычислять производные *ECR*-регулярного отображения  $F$ .

**Теорема 1.** Пусть многозначное отображение  $F$  *ECR*-регулярно в точке  $z_0 = (x_0, y_0) \in \text{gr}F$  по направлению  $\bar{x} \in \text{dom} \Gamma(z_0; \cdot)$ . Тогда  $DF(z_0; \bar{x}) = \Gamma(z_0; \bar{x})$ .

*Доказательство.* Пусть  $\bar{y} \in \Gamma(z_0; \bar{x})$ . Положим  $J = J(\bar{z}) = I^2(z_0, \bar{z}) \cup I_0$ , где  $I^2(z_0, \bar{z}) = \{ i \in I(z_0) \mid \langle \nabla h_i(z_0), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle = 0 \}$ . Тогда для любой  $m$ -векторной функции  $r(t)$  такой, что  $r(t)/t \rightarrow 0$  при  $t \downarrow 0$  найдется число  $t_0 > 0$  такое, что для всех  $i \in I \setminus I^2(z_0, \bar{z})$

$$h_i(x_0 + t\bar{x}, y_0 + ty + r(t)) < 0 \quad t \in (0, t_0).$$

Действительно, если  $i \in I \setminus I^2(z_0, \bar{z})$ , то  $h_i(x_0, y_0) < 0$  и, значит,

$$h_i(x_0 + t\bar{x}, y_0 + t\bar{y} + r(t)) = h_i(x_0, y_0) + t \langle \nabla h_i(x_0 + \theta t\bar{x}, y_0 + \theta(t\bar{y} + r(t))), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle < 0$$

( $0 < \theta < 1$ ) при достаточно малых  $t > 0$ .

Если  $i \in I(z_0)$ , но  $i \notin I^2(z_0, \bar{z})$ , то

$$\begin{aligned} h_i(x_0 + t\bar{x}, y_0 + ty + r(t)) &= h_i(x_0, y_0) + t \langle \nabla h_i(x_0, y_0), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle + \gamma(t) = \\ &= t \langle \nabla h_i(x_0, y_0), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle + \gamma(t), \end{aligned}$$

где  $\gamma(t) = \langle \nabla_y h_i(x_0, y_0), r(t) \rangle + \langle \nabla h_i(x_0 + \theta t \bar{x}, y_0 + \theta(t \bar{y} + r(t))) \rangle - \langle \nabla h_i(x_0, y_0), (t \bar{x}, t \bar{y} + r(t)) \rangle$ ,  $(0 < \theta < 1)$ .

Поскольку  $\langle \nabla h_i(x_0, y_0), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle < 0$  и  $\gamma(t)/t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ , то  $h_i(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r(t)) < 0$ ,  $i \in J$ , для всех достаточно малых положительных  $t$ .

Пусть  $|J| = N$ . Поскольку  $J = J(\bar{y}) = I^2(y_0, \bar{y}) \cup I_0$ , то в точке  $(t, r) = (0, 0)$  у матрицы Якоби системы функций  $h_i(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r)$   $i \in J$  относительно  $r$ ,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r)}{\partial r_1} & \dots & \frac{\partial h_1(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r)}{\partial r_m} & \frac{\partial h_1(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r)}{\partial t} \\ \frac{\partial h_2(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r)}{\partial r_1} & \dots & \frac{\partial h_2(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r)}{\partial r_m} & \frac{\partial h_2(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r)}{\partial t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_N(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r)}{\partial r_1} & \dots & \frac{\partial h_N(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r)}{\partial r_m} & \frac{\partial h_N(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r)}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (1)$$

последний столбец нулевой. Следовательно, ее ранг в данной точке совпадает с рангом матрицы Якоби системы функций  $h_i(y_0 + t \bar{y} + r)$   $i \in J$  относительно  $r$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r)}{\partial r_1} & \dots & \frac{\partial h_1(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r)}{\partial r_m} \\ \frac{\partial h_2(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r)}{\partial r_1} & \dots & \frac{\partial h_2(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r)}{\partial r_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_N(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r)}{\partial r_1} & \dots & \frac{\partial h_N(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r)}{\partial r_m} \end{bmatrix}.$$

Пусть ранг этой матрицы в точке  $(t, r) = (0, 0)$  равен  $l$ . Поскольку

$$\frac{\partial h_i(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r)}{\partial t} = \langle \nabla_x h_i(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r), \bar{x} \rangle + \langle \nabla_y h_i(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r), \bar{y} \rangle,$$

то в силу условия (ECR) матрица Якоби (1) системы функций  $h_i(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r)$   $i \in J$  относительно  $r$  сохранит ранг  $l$  и в некоторой окрестности  $(0, 0)$ . Тогда (см. [12] стр.505) в этой окрестности  $l$  функций системы (для определенности перенумеруем их так чтобы это были  $h_1, \dots, h_l$ ) независимы, а остальные (если они есть) от них зависят, т.е.  $h_{l+1} = \varphi_1(h_1, \dots, h_l), \dots, h_{l+q} = \varphi_q(h_1, \dots, h_l)$ , где  $\varphi_1, \dots, \varphi_q$  – непрерывные функции с непрерывными частными производными,  $q = N - l$ .

Рассмотрим в окрестности точки  $(0, 0)$  систему уравнений

$$\begin{cases} h_1(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r) = 0 \\ \dots \\ h_l(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r) = 0 \\ \dots \\ h_{l+q}(x_0 + t \bar{x}, y_0 + t \bar{y} + r) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $l + q = |J|$ .

Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} h_1(x_0 + t\bar{x}, y_0 + t\bar{y} + r) = 0 \\ \dots \\ h_l(x_0 + t\bar{x}, y_0 + t\bar{y} + r) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

с дополнительным условием

$$\begin{cases} h_{l+1}(x_0 + t\bar{x}, y_0 + t\bar{y} + r) = \varphi_1(h_1(x_0 + t\bar{x}, y_0 + t\bar{y} + r), \dots, h_l(x_0 + t\bar{x}, y_0 + t\bar{y} + r)) = 0 \\ \dots \\ h_{l+q}(x_0 + t\bar{x}, y_0 + t\bar{y} + r) = \varphi_q(h_1(x_0 + t\bar{x}, y_0 + t\bar{y} + r), \dots, h_l(x_0 + t\bar{x}, y_0 + t\bar{y} + r)) = 0. \end{cases}$$

При этом

$$\varphi_1(h_1(x_0, y_0), \dots, h_l(x_0, y_0)) = 0, \dots, \varphi_q(h_1(x_0, y_0), \dots, h_l(x_0, y_0)) = 0$$

и, следовательно,

$$\varphi_1(0, \dots, 0) = 0, \dots, \varphi_q(0, \dots, 0) = 0.$$

Если  $l = m$ , то по теореме о неявной функции (см. [12], стр. 488) система (3) определяет в окрестности  $(0,0)$  неявную непрерывно дифференцируемую функцию  $r = r(t)$  такую, что

$$r(0) = 0 \text{ и } \frac{dr}{dt}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)}{t} = 0.$$

Если  $l < m$ , то, не ограничивая общности, можно предположить, что ранг системы (3) равен  $l$  относительно первых  $l$  координат вектора  $r$ . Положим в этом случае  $r = (\bar{r}, \bar{\bar{r}})$ , где  $\bar{r} = (r_1, \dots, r_l)$ ,  $\bar{\bar{r}} = (r_{l+1}, \dots, r_m)$ .

Тогда в силу теоремы о неявной функции система (3) определяет в окрестности точки  $(0,0,0)$  неявную непрерывно дифференцируемую функцию  $\bar{r} = \bar{r}(t, \bar{\bar{r}})$ , удовлетворяющую условиям

$$\bar{r}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}(0,0) = 0.$$

Пусть  $\bar{\bar{r}} = 0$ , положим  $\bar{r} = \bar{r}(t) = \bar{r}(t, 0)$ . Тогда функция  $r = r(t) = (\bar{r}(t), 0)$  удовлетворяет системе (3), а значит и (2). Кроме того,  $r(t)/t \rightarrow 0$  при  $t \downarrow 0$ .

Таким образом, при выполнении условий леммы для  $\bar{y} \in \Gamma(z_0; \bar{x})$  существует функция  $r(t)$  такая, что при  $t \in (0, t_0)$ , где  $t_0$  достаточно малое положительное число, справедливы условия

$$h_i(x_0 + t\bar{x}, y_0 + t\bar{y} + r(t)) = 0 \quad i \in J,$$

$$h_i(x_0 + t\bar{x}, y_0 + t\bar{y} + r(t)) < 0 \quad i \in I \setminus J,$$

и  $r(t)t^{-1} \rightarrow 0$  при  $t \downarrow 0$ .

Последнее означает, что  $y_0 + t\bar{y} + r(t) \in F(x_0 + t\bar{x})$  при  $t \in [0, t_0]$  и, следовательно,  $\bar{y} \in DF(x_0, y_0; \bar{x})$ . Таким образом,  $\Gamma(z_0; \bar{x}) \subset DF(z_0; \bar{x})$ . Поскольку включение  $DF(z_0; \bar{x}) \subset \Gamma(z_0; \bar{x})$  всегда справедливо, получаем  $\Gamma(z_0; \bar{x}) = DF(z_0; \bar{x})$ .

## Производные функции оптимального значения

**Теорема 2.** Пусть многозначное отображение  $F$  во всех точках  $z_0 = (x_0, y_0)$ , где  $y_0 \in \omega(x_0)$ , удовлетворяет условиям  $RCR$ -регулярности и  $ECR$ -регулярности по направлению  $\bar{x} \in \text{dom}\Gamma(z_0; \cdot)$ . Тогда функция  $\varphi$  дифференцируема в точке  $x_0$  по направлению  $\bar{x}$ , причем

$$\varphi'(x_0; \bar{x}) = \min_{y_0 \in \omega(x_0)} \min_{\bar{y} \in \Gamma(z_0; \bar{x})} \langle \nabla f(z_0), \bar{z} \rangle = \min_{y_0 \in \omega(x_0)} \max_{\lambda \in \Lambda(z_0)} \langle \nabla_x L(z_0, \lambda), \bar{x} \rangle. \quad (4)$$

*Доказательство.*

1. Пусть  $y_0 \in \omega(x_0)$ . Поскольку в силу теоремы 1  $\Gamma(z_0; \bar{x}) = DF(z_0; \bar{x})$  и  $\bar{x} \in \text{dom}\Gamma(z_0; \cdot)$ , то для любого  $\bar{y} \in \Gamma(z_0; \bar{x})$  найдется функция  $o(t)$  такая, что  $o(t)/t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$  и  $y_0 + t\bar{y} + r(t) \in F(x_0 + t\bar{x})$  при всех  $t > 0$ .

Следовательно,

$$\varphi(x_0 + t\bar{x}) - \varphi(x_0) \leq f(x_0 + t\bar{x}, y_0 + t\bar{y} + o(t)) - f(x_0, y_0),$$

откуда

$$D^+ \varphi(x_0; \bar{x}) = \limsup_{t \downarrow 0} t^{-1} [\varphi(x_0 + t\bar{x}) - \varphi(x_0)] \leq \langle \nabla f(z_0), \bar{z} \rangle$$

для всех  $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ . Поскольку  $y_0$  и  $\bar{y}$  произвольные элементы из множеств  $\omega(x_0)$  и  $\Gamma(z_0; \bar{x})$ , то из последнего соотношения получается

$$D^+ \varphi(x_0; \bar{x}) \leq \inf_{y_0 \in \omega(x_0)} \inf_{\bar{y} \in \Gamma(z_0; \bar{x})} \langle \nabla f(z_0), \bar{z} \rangle \quad (5)$$

2. Пусть предел  $D_+ \varphi(x_0; \bar{x}) = \liminf_{t \downarrow 0} t^{-1} (\varphi(x_0 + t\bar{x}) - \varphi(x_0))$  достигается на последовательности  $t_k \downarrow 0$  и пусть  $x_k = x_0 + t_k \bar{x}$ ,  $y_k \in \omega(x_k)$   $k=1, 2, \dots$ . Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность  $\{y_k\}$  сходится  $y_k \rightarrow y_0$ , причем  $y_0 \in F(x_0)$  в силу замкнутости многозначного отображения  $F$ .

Поскольку  $\varphi(x_0 + t_k \bar{x}) - \varphi(x_0) \leq t_k D^+ \varphi(x_0; \bar{x}) + o(t_k)$ , то в силу (5)

$$f(x_0, y_0) = \limsup_{k \rightarrow \infty} f(x_0 + t_k \bar{x}, y_k) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_0 + t_k \bar{x}) \leq \varphi(x_0)$$

и, следовательно,  $y_0 \in \omega(x_0)$ .

В силу условия RCRCQ и леммы 5 [10] найдется последовательность  $\{y_{0k}\}$  такая, что

$$y_{0k} \in F(x_0), \quad |y_{0k} - y_0| \leq M |x_k - x_0|, \quad M = \text{const} > 0,$$

и  $h_i(x_k, y_k) \leq h_i(x_0, y_{0k}) \leq 0 \quad i \in I(x_0, y_0)$ .

Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что  $t_k^{-1}(y_k - y_{0k}) \rightarrow \bar{y}_0$  и, следовательно,  $y_k = y_{0k} + t_k \bar{y}_0 + o(t_k)$ . Тогда из соотношений

$$h_i(x_k, y_k) - h_i(x_0, y_{0k}) \leq 0 \quad i \in I(x_0, y_0), \quad h_i(x_k, y_k) - h_i(x_0, y_{0k}) = 0 \quad i \in I_0$$

получаем

$$\langle \nabla h_i(x_0, y_0), (\bar{x}, \bar{y}_0) \rangle \leq 0 \quad i \in I(x_0, y_0), \quad \langle \nabla h_i(x_0, y_0), (\bar{x}, \bar{y}_0) \rangle = 0 \quad i \in I_0,$$

т.е.  $\bar{y}_0 \in \Gamma(z_0; \bar{x})$ . С другой стороны,

$$\begin{aligned} D_+ \varphi(x_0; \bar{x}) &= \lim_{t_k \downarrow 0} t_k^{-1} (f(x_0 + t_k \bar{x}, y_k) - f(x_0, y_0)) = \\ &= \lim_{t_k \downarrow 0} t_k^{-1} (f(x_0 + t_k \bar{x}, y_{0k} + t_k \bar{y}_0 + o(t_k)) - f(x_0, y_{0k})) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (\bar{x}, \bar{y}_0) \rangle, \end{aligned}$$

где  $\bar{y}_0 \in \Gamma(z_0; \bar{x})$ .

$$\text{Отсюда } D_+ \varphi(x_0; \bar{x}) \geq \inf_{y \in \omega(x_0)} \inf_{\bar{y} \in \Gamma((x_0, y); \bar{x})} \langle \nabla f(x_0, y), \bar{z} \rangle = \min_{y \in \omega(x_0)} \min_{\bar{y} \in \Gamma((x_0, y); \bar{x})} \langle \nabla f(x_0, y), \bar{z} \rangle,$$

где  $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ .

Сравнивая последнюю оценку с оценкой (5), получаем, что существует конечная производная

$$\varphi'(x_0; \bar{x}) = \min_{y_0 \in \omega(x_0)} \min_{\bar{y} \in \Gamma(z_0; \bar{x})} \langle \nabla f(z_0), \bar{z} \rangle.$$

Применение теоремы двойственности в линейном программировании [13] приводит к (4).

### Заключение

Предложено обобщение условия регулярности постоянного ранга и на его основе доказаны новые достаточные условия дифференцируемости по направлениям функции оптимального значения в задачах нелинейного программирования.

## EXTENDED CONSTANT RANK CONDITION AND ITS APPLICATION TO PARAMETRIC OPTIMIZATION PROBLEMS

S.V. AKTANOROVICH, L.I. MINCHENKO, A.N. TARAKANOV

### Abstract

Extended constant rank condition is introduced and its applications to the sensitivity analysis of parametric nonlinear programming problems are studied.

### Список литературы

1. *Bonnans J.F., Shapiro A.* Perturbations analysis of optimization problems. New York, 2000.
2. *Luderer B., Minchenko L., Satsura T.* Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Dordrecht, 2002.
3. *Janin R.* // Mathematical Programming Study. 1984. Vol. 21. P. 110-126.
4. *Ralph D. and Dempe S.* // Mathematical Programming 70. 1995. P. 159-172.
5. *Pang J.-S. and Ralph D.* // Math. Oper. Res. 21. 1996. P. 401-426.
6. *Минченко Л.И., Стаховский С.М.* // Докл. НАН Беларуси. 2009. №5. С. 6-10.
7. *Minchenko L. and Stakhovski S.* // Optimization. 2011. Vol. 60. P. 429-440.
8. *Lu S.* // Optimization. 2010. DOI: 10.1080/02331934.2010.527972.
9. *Andreani R., Haeser G., Schuverdt M.L. et al.* // Mathematical Programming. 2011. DOI: 10.1007/s10107-011-0456-0.
10. *Minchenko L. and Stakhovski S.* // SIAM Journal on Optimization. 2011. Vol. 21, №1. P. 314-332.
11. *Minchenko L. and Tarakanov A.* // Journal of Optimization Theory and Applications. 2011. Vol. 148. P. 571-579.
12. *Зорич В.А.* Математический анализ. М., 1981.
13. *Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г.* Линейное программирование. М., 1963.