УДК 519.246

ОБОБЩЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ SECH^k

А.В. ОВСЯННИКОВ

Белорусский государственный университет
пр. Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь

Поступила в редакцию 14 марта 2012

Исследуется модель обобщенного закона распределения Sech^k и ее применение в статистической радиотехнике. Приводятся основные свойства и статистики распределения. Получены алгоритмы генерирования случайных чисел и алгоритмы моделирования стохастических процессов с одномерной плотностью Sech^k. Приведены алгоритмы точечной оценки параметра сдвига при известных и неизвестных параметрах масштаба, а также алгоритмы последовательной интервальной оценки параметра сдвига. Результаты моделирования подтверждают теоретические расчеты.

Ключевые слова: распределение, нелинейное преобразование, алгоритм, робастность, генерация, точечная и интервальная оценка, параметр сдвига, параметры масштаба.

Введение

В литературе, затрагивающей вопросы статистической обработки данных (результатов наблюдений) для математического описания разнообразных помеховых процессов в каналах связи, используются стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) в которых детерминированная функция $f(\xi)$ определяется одномерной плотностью вероятности (ПВ)

$$d\xi(t)/dt + f(\xi) = \gamma n(t),\ f(\xi) = bZ(\xi)/2, \tag{1}$$

где $Z(\xi) = -d\ln P(\xi)/d\xi$ – нелинейное преобразование над процессом $\xi(t)$ с плотностью [1] $P(\xi) = (C/\sqrt{b})\exp(-2\int_{\xi'}^{\xi} f(x)dx/b)$, $\gamma = \sqrt{2b/N}$, N – односторонняя спектральная плотность белого шума $n(t)$ с нулевым математическим ожиданием и дельтообразной корреляционной функцией, коэффициент диффузии b=const, C – константа.

Для описания широкого класса помех, распределенных по частоте, времени или пространству (флуктуационные), а также сосредоточенных во времени или пространстве (импульсные), используется обобщенная экспоненциальная модель [2]:

$$P(\xi) = \frac{v}{2C(v)\Gamma(1/v)}\exp(-|\xi/C(v)|^v),\ C(v) = \sigma\left[\Gamma(1/v)/\Gamma(3/v)\right]^{1/2}, \tag{2}$$

где σ^2 – дисперсия (мощность) помехи, $v \ge 1/2$ – параметр, принимаемый в различных ситуациях за $v = 1/2$, $v = 1$ (лапласовская ПВ) или $v = 2$ (гауссовская ПВ).

Модель вида (2) при несомненных достоинствах экспоненциальной формы содержит изменяющийся параметр v, что не всегда удобно при построении алгоритмов и практических схем демодуляторов, поскольку требует их структурной перестройки. Например, нелинейное преобразование с $v = 2$ имеет вид $Z(\xi) = \xi/\sigma^2$ (линейный вход демодулятора), а в случае $v = 1$ – жесткий ограничитель в составе демодулятора $Z(\xi) = \sqrt{2}\mathrm{sign}(\xi)/\sigma$.

В практике статистических расчетов в ряде случаев для вероятностного описания помехи используют модель распределения с ε-загрязнением (приближенно нормальное распределение, допускающее удлиненные хвосты) $P(\xi)=(1-\varepsilon)P_0(\xi)+\varepsilon P_1(\xi)$, где $P_0(\xi)$ – гауссовская ПВ, $P_1(\xi)$ – произвольная ПВ. Если $P_1(\xi)$ лапласовская ПВ, то нелинейное преобразование имеет вид $Z(\xi)=\left\{\Delta \mathrm{sign}(\xi)/\sigma^2,\ \text{при}\ |\xi|>\Delta;\ \xi/\sigma^2,\ \text{при}\ |\xi|<\Delta\right\}$, где Δ – ширина зоны линейной части нелинейного преобразования.

В этой связи в [3] получено распределение имеющее ПВ

$$P(\xi)=\alpha C(k)\mathrm{Sech}^k(\alpha\xi),\ k=\beta/\alpha,\ \alpha,\beta>0, \tag{3}$$

где $C(k)=\Gamma((1+k)/2)\Gamma^{-1}(k/2)/\sqrt{\pi}$, $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Такая модель помехи (одномодальная, двухпараметрическая) позволяет учесть медленные нестационарные изменения интенсивности и амплитуды процесса $\xi(t)$. При параметре $\alpha\to 0$ распределение стремится в пределе к гауссовскому, а при $\alpha\to\infty$ к лапласовскому (рис. 1). Нелинейное преобразование для ПВ (3) имеет вид мягкого ограничения $Z(\xi)=\beta\mathrm{th}(\alpha\xi)$ (рис. 2), это позволяет получать алгоритмы обработки без структурной перестройки схемы, используя только адаптивную настройку параметров $Z(\xi)$.

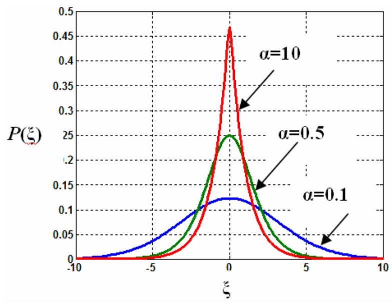

Рис. 1. Распределение (3), 1 – α=10; 2 – α=0,5; 3 – α=0,1

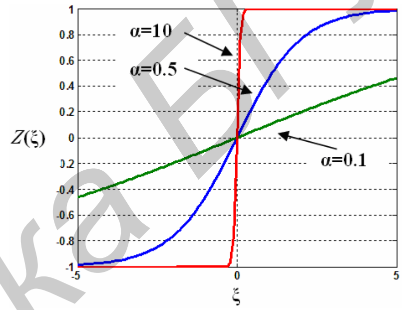

Рис. 2. Нелинейное преобразование, 1 – α=10; 2 – α=0,5; 3 – α=0,1

Цель работы – обобщить сведения о свойствах, статистике и информационных характеристиках распределения с ПВ (3); получить алгоритмы генерации случайной величины ξ_i и процесса $\xi(t)$, оценки параметра сдвига при известных и неизвестных параметрах масштаба, интервальной оценки параметра сдвига.

Основные свойства и статистики распределения Sech^k

Распределение с ПВ (3) с точки зрения построения робастных алгоритмов и устройств обработки является распределением в классе [3] $\Re_0=\left\{P:\int\xi^{2q}P(\xi)d\xi\le C_{2q}\right\}$, где $C_{2q}=f(\gamma_2,\gamma_4,...,\gamma_{2q})\sigma^{2q}$, γ_{2q} – безразмерные кумулянтные коэффициенты ($\gamma_2=1$, γ_4 – коэффициент эксцесса), $q=1,2...$ – индекс. Класс распределений $\Re_0$ шире, чем классы: $\Re_1=\left\{P:P(0)\ge\delta>0\right\}$ («наихудшая» ПВ-лапласовская) и $\Re_2=\left\{P:\int\xi^2P(\xi)d\xi\le\sigma^2\right\}$ («наихудшая» ПВ-гауссовская), которые являются предельными для $\Re_0$.

Распределение с ПВ (3) включает в себя, как частный случай, распределение Чампернауна [4] $P(\xi)=\alpha\mathrm{Sech}(\alpha\xi)/\pi$ (здесь в (3) $k=1$) и т.н. распределение «Sech^2» с ПВ $P(\xi)=\alpha\mathrm{Sech}^2(\alpha\xi)/2$ (здесь в (3) $k=2$). Таким образом, распределение (3) можно определить как обобщенное «Sech^k» распределение.

Функция распределения имеет вид

$$F(\xi)=\frac{2^k}{k}C(k)e^{\alpha k\xi}{}_2F_1\left(\left[\frac{k}{2},k\right],\left[1+\frac{k}{2}\right],-e^{2\alpha\xi}\right), \tag{4}$$

где ${}_2F_1$ – обобщенная гипергеометрическая функция. Для практических расчетов удобно воспользоваться аппроксимацией (4) в виде $F_a(\xi) = \left(1 + \mathrm{th}\left[(a_1 + b_1 k^{c_1})\alpha\xi\right]\right)/2$. При такой аппроксимации на интервале $y = \alpha\xi \in [-10^2; 10^2]$, $k \in [0{,}05;1]$ с коэффициентами $a_1 = -4{,}10 \cdot 10^{-3}$, b_1=$64{,}23 \cdot 10^{-2}$, $c_1 = 92{,}76 \cdot 10^{-2}$ среднеквадратическая ошибка $D(\Delta F = F_a - F)$ не превосходит величины $5 \cdot 10^{-5}$, а в случае $k \in [1;20]$, $a_1 = -18{,}98 \cdot 10^{-2}$, b_1=$79{,}37 \cdot 10^{-2}$, $c_1 = 56{,}23 \cdot 10^{-2}$ эта ошибка $D(\Delta F) < 5 \cdot 10^{-6}$.

Характеристическая функция ПВ (3)

$$\Phi(\xi) = 2^{k-1} C(k) e^{-\frac{\pi(t + j\alpha k)}{2\alpha}} \left(B\left[-1, \frac{1}{2}(k - \frac{jt}{\alpha}), 1 - k\right] + e^{\frac{\pi t}{\alpha}} B\left[-1, \frac{1}{2}(k - \frac{jt}{\alpha}), 1 - k\right] \right), \qquad (5)$$

где $B(z,a,b) = \int_0^z t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$ – неполная бета-функция.

В табл. 1 в качестве примера приведены ПВ (3), функции распределения (4) и характеристические функции (5) для параметра $k = 3, 4$.

Таблица 1. **ПВ (3), функции распределения и характеристические функции для *k*=3,4**

Параметр k	$k = 3$	$k = 4$
ПВ $P(\xi)$	$2\alpha\mathrm{Sech}^3(\alpha\xi)/\pi$	$3\alpha\mathrm{Sech}^4(\alpha\xi)/4$
Функция распределения $F(\xi) - 0{,}5$	$\frac{1}{\pi}(2\mathrm{arctg}(\mathrm{th}(\alpha\xi/2)) + \mathrm{Sech}(\alpha\xi)\mathrm{th}(\alpha\xi))$	$\frac{1}{4}(2 + \mathrm{Sech}^2(\alpha\xi))\mathrm{th}(\alpha\xi)$
Характеристическая функция $\Phi(\xi)$	$(1 + \frac{t^2}{\alpha^2})\mathrm{Sech}(\frac{\pi t}{2\alpha})$	$\frac{\pi t}{8\alpha}(4 + \frac{t^2}{\alpha^2})\mathrm{csch}(\frac{\pi t}{2\alpha})$

Математическое ожидание и асимметрия ПВ (3) равны нулю, а дисперсия и эксцесс (рис. 3) определяются функциями, зависящими от параметров β и k:

$$D(k,\beta) = \frac{2^{k+2}C(k)}{k\beta^2}\, {}_4F_3\left(\left[\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}, k\right], \left[\frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}+1\right], -1\right), \qquad (6)$$

$$\gamma(k) = \frac{3k2^{-k}}{C(k)} \frac{{}_6F_5\left(\left[\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}, k\right], \left[\frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}+1\right], -1\right)}{{}_4F_3\left(\left[\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}, k\right], \left[\frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}+1\right], -1\right)^2} - 3 \qquad (7)$$

где ${}_4F_3$, ${}_6F_5$ – обобщенные гипергеометрические функции. Функция эксцесса $\gamma(k)$ при значениях $\alpha \to \infty$ ($k \to 0$) стремится к трем (лапласовская ПВ), а при $\alpha \to 0$ ($k \to \infty$) к нулю (гауссовская ПВ), что соответствует отмеченному выше свойству предельных распределений для обобщенного “Sech^k” распределения. Также можно отметить, что не менее, чем у 50 % всех используемых в практических задачах распределений [4], коэффициент эксцесса находится в пределах [0,…,3]. Ввиду громоздкости точных формул (6), (7) их можно аппроксимировать упрощенными зависимостями $D_a(k,\beta) = (a_2 + b_2 k^{c_2})/\beta^2$, $\gamma_a(k) = 3/(a_3 + b_3 k^{c_3})$, где для интервала значений $k \in [0,1]$ параметры $a_2 = 2$, $b_2 = 0{,}47$, $c_2 = 1{,}65$, $a_3 = 1$, $b_3 = 0{,}5$, $c_3 = 1{,}7$ и среднеквадратическая ошибка не превосходит величины 10^{-5} (для D_a) и $3 \cdot 10^{-5}$ (для γ_a). В интервале значений $k \in [1,10]$ параметры $a_2 = 1{,}29$, $b_2 = 0{,}99$, $c_2 = 0{,}99$, $a_3 = 0{,}8$, $b_3 = 0{,}7$, $c_3 = 1{,}3$ и среднеквадратическая ошибка не превосходит $3 \cdot 10^{-3}$ (для D_a) и 10^{-4} (для γ_a). Заметим, функции (6), (7) имеют точные значения $D(0,\beta) = 2$, $\gamma(0) = 3$, $\gamma(1) = 2$, $\gamma(2) = 1{,}2$.

Количество информации Фишера рассматриваемой ПВ

$$I_\xi(k,\beta)=\int_{-\infty}^{\infty} Z^2(\xi)P(\xi)d\xi=\beta^2/(1+k). \qquad (8)$$

Коэффициент подавления помехи имеющей ПВ (3), определяется формулой $\mu(k)=D(k,\beta)I_\xi(k,\beta)$ и находится в пределах $\mu(k)\in[1,...,2]$ (рис. 4).

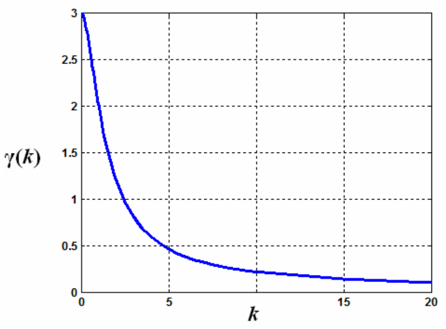

Рис. 3. Коэффициент экцесса

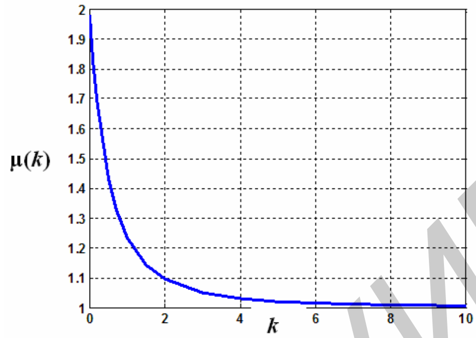

Рис. 4. Коэффициент подавления

Генерация случайных величин и процессов

Аналоговый алгоритм генерирования процесса с одномерной ПВ (3) непосредственно следует из (1) $d\xi(t)/dt+b\beta th(\alpha\xi)/2=\gamma n(t)$ и легко реализуется, например, в системе Simulink Matlab. При реализации аналогового алгоритма следует обеспечить выполнение соотношения $T_\xi\approx M\left(\left|df(\xi)/d\xi\right|\right)^{-1}=2/(bI_\xi)>>T_n$, где T_ξ – постоянная времени моделируемой системы, T_n – постоянная времени процесса $n(t)$.

В случае дискретного варианта алгоритма численного моделирования СДУ (1) для симметризированной формы уравнения можно использовать метод Рунге-Кута второго или четвертого порядка, а для формы Ито – метод Эйлера. Так оптимальная разностная схема, при понимании СДУ (1) в форме Ито, имеет вид ($\Delta<<1$):

$$\xi_{i+1}=\xi_i-\Delta b\beta \mathrm{th}(\alpha\xi_i)/2+\Delta\gamma n_i, \qquad (9)$$

где Δ – шаг квантования, n_i – стандартный дискретный белый шум (независимые гауссовские случайные величины с нулевым средним и $M(n_i n_j)=\delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера). Глобальная среднеквадратическая погрешность схемы (9) определяется формулой [5]:

$$\sigma\le\Delta\left(\int_0^T M\left[(f_\xi'(\xi)\gamma)^2\right]dt\right)^{1/2}=(\Delta)^{3/2}(b/2)^2\gamma\alpha\beta\sqrt{\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+3)}m}, \qquad (10)$$

здесь $T=\Delta m$, m – объем выборки. Неравенство (10) позволяет определить шаг квантования Δ.

Для генерирования случайных чисел с ПВ (3) можно применить стандартный подход с использованием обратной функции распределения $\xi_i=F^{-1}(\eta_i)$ (определяемой из $F_a(\xi)$) и генератора равномерно распределенных чисел η_i.

Более точный результат можно получить с использованием современных вычислительных средств на основе модифицированного алгоритма ступенчатой аппроксимации функции распределения. Алгоритм состоит в следующем.

1. Задать параметры k, α.

2. Сгенерировать равномерную сетку по Y на интервале $[-c/k,c/k]$, где параметр $c=10...20$ обеспечивает покрытие сеткой не менее 99,995 % всей области значения функции $F(\xi)$ (4) при $k\le10$. В этом случае ширина ступеньки аппроксимации функции распределения будет определяться шагом сетки ΔY.

3. Вычислить $F(Y_j)$ по формуле (4) $j=\overline{1,l}$, $l=\mathrm{length}(Y)$.

4. Сгенерировать равномерно распределенное число η_i, где $i=\overline{1,m}$, $m \geq l$.

5. Вычислить индекс *j* из условия $j=\arg\min\limits_{j\in[1,l]}\left\lfloor \eta_i - F(Y_j)\right\rfloor$.

6. Вычислить для индекса *i* число $\xi_i = Y_j / \alpha$.

7. Вернуться к шагу 4 если $i<m$.

Абсолютная погрешность метода $\Delta_\xi = \max\limits_{j\in[1,l]}\left(F(Y_{j+1})-F(Y_j)\right)/2\alpha = \Delta Y F_y'(0)/2\alpha$, где величины $F_y'(0)=C(k)$, $\Delta Y = 2c/kl = (20...40)/kl$. Заметим, при равномерной сетке по $z_j = F(Y_j)$, $z_j \in [0,1]$, $j=\overline{1,d}$, (неравномерная сетка по Y_j) абсолютная погрешность определяется величиной $\Delta_\xi = \Delta z / 2\alpha = (2\alpha d)^{-1}$. Для получения случайной величины $\xi_i = Y_j/\alpha$ необходимо решать одним из численных методов обратную задачу $Y_j = F^{-1}(z_j)$ для каждого конкретного значения *k*.

Оценка параметра сдвига при известных параметрах масштаба

Рассмотрим задачу оценки параметра сдвига θ по имеющейся однородной независимой выборке $\mathbf{r}=[r_1\ \dots\ r_m]$, принадлежащей распределению с плотностью $P_\theta(\xi)$=$P(\mathbf{r}\,|\,\theta)$, где $\theta \in \Theta$ и Θ – интервал на действительной оси. При фиксированном объеме выборки **r** выборочным пространством является *m* – мерное евклидово пространство $\mathbf{R}=R^m$, на котором задана плотность $P_\theta(\xi)$, $\mathbf{r}\in\mathbf{R}$. В этом случае в (3) следует положить $\xi_i = r_i - \theta$, $i=\overline{1,m}$.

Частная функция потерь имеет вид $B(\xi_i) = -\ln P(\xi_i) = C - k\ln(\mathrm{Sech}(\alpha\xi_i))$. Метод максимального правдоподобия и использование выборочного эмпирического функционала $W_э(\xi_i) = (1/m)\sum\limits_i B(\xi_i)$ приводит к оценке $\theta^* = \arg\max\limits_r W_э(r_i-\theta)$ и, следовательно, получаем неявный интегральный робастный алгоритм

$$\frac{1}{m}\sum_i Z(\xi_i)\frac{d\xi_i}{d\theta} = \frac{\beta}{T}\int_0^T Z(\xi(t))\frac{d\xi(t)}{d\theta}dt_{|\theta=\theta^*} \underset{m\Delta t\to T}{\Rightarrow} \frac{\beta}{T}\int_0^T th(\alpha(r(t)-\theta))dt_{|\theta=\theta^*} = 0. \qquad (11)$$

Применение стохастической градиентной процедуры к последнему уравнению позволяет перейти к последовательным робастным оценкам

$$\theta_{i+1}^* = \theta_i^* - \left[M\left(\frac{\partial^2 \ln P(\xi)}{\partial\theta^2}\right)\right]^{-1}\frac{d\ln P(\xi_i)}{d\theta} = \theta_i^* + K_i Z(\xi_i)\frac{d\xi_i}{d\theta} = \theta_i^* + \frac{\beta}{iI_\xi}th(\alpha(r_i-\theta_i^*)), \qquad (12)$$

где $K_i = \left[M\left(\partial^2\ln P(\xi)/\partial\theta^2\right)\right]^{-1} = -\left[M\left(\left(\partial\ln P(\xi)/\partial\theta\right)^2\right)\right]^{-1} = -1/iI_\xi$.

В табл. 2 приведены качественные характеристики алгоритма (12) для случая $\theta=0{,}1$, $\theta_0^*=0$, $k=1$, ОСПвх, ОСПвых – отношение сигнал/помеха до и после применения алгоритма (11).

Таблица 2. **Качественные характеристики алгоритма (8)**

Длина выборки	Параметр α	0,2	0,5	1	2	5
	ОСПвх, дБ	-37,8	-29,9	-24,0	-17,7	-10,1
n=50	ОСПвых, дБ	-22,6	-18,3	-8,4	-4,6	8,1
n=500	ОСПвых, дБ	-13,5	-9,7	-0,1	2,0	15,5
n=5000	ОСПвых, дБ	-7,9	-1,2	8,6	10,3	22,9

Оценка параметра сдвига при неизвестных параметрах масштаба

Общая постановка задачи аналогична рассмотренной выше, однако параметры масштаба α и β (α и k) являются неизвестными. Интегральный алгоритм оценки получаем из уравнения $dW_э(\xi_i)/d\Lambda = 0$, где $\Lambda^* = [\alpha^*, k^*]$. Тогда система уравнений интегральных оценок примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{k}{T}\displaystyle\int_0^T \alpha\xi(t) th(\alpha\xi(t))dt_{|\alpha=\alpha^*, k=k^*} = 1, \\ \dfrac{1}{2}\left(\Psi(\dfrac{k}{2}) - \Psi(\dfrac{1+k}{2})\right) - \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \ln(Sech(\alpha\xi(t)))dt_{|\alpha=\alpha^*, k=k^*} = 0, \end{cases} \tag{13}$$

где $\Psi(x) = dln\Gamma(x)/dx$ – логарифмическая производная гамма-функции. Полученная система не позволяет найти явные выражения для оценок α^*, k^*, однако процедурами стохастической аппроксимации можно получить систему алгоритмов последовательных оценок. В сочетании с уравнением (11) система (13) принимает замкнутый вид.

Для приближенного решения систему (13) можно упростить, используя аппроксимацию сложных нелинейных функций более простыми. Так, функция $ln(\mathrm{Sech}(x))$ аппроксимируется зависимостью $-|x|$, при этом среднеквадратическая ошибка такой аппроксимации на интервале $x \in [-10^3, 10^3]$ не превосходит единицы. Функцию $\Psi((1+k)/2) - \Psi(k/2)$ на интервале $k \in [10^{-2}, 10^2]$ можно аппроксимировать зависимостью $1{,}94/k$ со среднеквадратической ошибкой аппроксимации не превышающей 10^{-2}.

Более простой и надежный (при достаточном объеме выборки, времени наблюдения), легко реализуемый программными средствами способ идентификации состоит в следующем.

1. Оценить выборочную дисперсию D^*.

2. Оценить выборочный коэффициент эксцесса γ^*. Если $\gamma(k^*) \notin [1,...,3]$, то необходимо увеличить объем выборки.

3. Вычислить оценку параметра k^* из формулы $\gamma(k^*) = \gamma^*$.

4. Вычислить оценку параметра β^* из формулы $D(k^*, \beta^*) = D^*$.

5. Вычислить величину $\alpha^* = \beta^*/k^*$.

В качестве функций $D(k,\beta)$, $\gamma(k)$ можно использовать их аппроксимации D_a, γ_a.

В табл. 3 приведены качественные характеристики алгоритма (11) с оценкой параметров масштаба по приведенному выше алгоритму. Исходные условия соответствуют табл. 2.

Таблица 3. **Качественные характеристики алгоритма (8) с оценкой параметров масштаба**

Длина выборки	Параметр α	0,2	0,5	1	2	5
	ОСПвх, дБ	-37,8	-29,9	-24,0	-17,7	-10,1
n=50	ОСПвых, дБ	-23,8	-18,7	-9,2	-4,9	7,9
n=500	ОСПвых, дБ	-13,7	-9,8	-0,9	1,1	15,4
n=5000	ОСПвых, дБ	-8,1	-1,3	8,2	9,4	22,3

Интервальная оценка параметра сдвига

Для получения интервальной оценки используем тот факт, что величина $-\partial\mathbf{B}(\xi)/\partial\theta$ асимптотически нормальна с параметрами (0, $i\,I_\xi$) (Г. Крамер, 1946), т.е. если $i \to \infty$ то $-(i\,I_\xi)^{-1/2}\partial\mathbf{B}(\xi)/\partial\theta \underset{i\to\infty}{\Rightarrow} N\{0,1\}$. Алгоритм последовательных интервальных оценок

$$\begin{cases} \theta_i^* - \operatorname{arcth}(t_{p,i}\sqrt{\dfrac{i}{k+1}} + G_{i-1}^*)/\alpha \le \theta_i \le \theta_i^* + \operatorname{arcth}(t_{p,i}\sqrt{\dfrac{i}{k+1}} - G_{i-1}^*)/\alpha, \\ G_i^* = G_{i-1}^* + \operatorname{th}(\alpha(r_i - \theta_i^*)), \end{cases} \tag{14}$$

где $t_{p,i}$ – квантиль распределения Стьюдента. Минимальный объем выборки, который обеспечивает заданную точность оценки $\Delta\theta$, определяется неравенством $m \le t_p^2(k+1)^{-1} th^{-2}(\alpha\Delta\theta)$. Если величина $\alpha\Delta\theta << 1$, неравенство можно упростить $m \le t_p^2(k+1)^{-1}(\alpha\Delta\theta)^{-2}$.

Заключение

В заключении необходимо отметить теоретическую и практическую ценность рассматриваемого распределения, которая заключается в следующем. Модель ПВ (3) может использоваться для описания импульсных промеховых процессов с изменяющейся интенсивностью и амплитудой выбросов, при этом вместо двух различных распределений описывающих поведение процесса вблизи математического ожидания и на удлиненных хвостах (хьюберовский класс приближенно нормальных распределений, распределения с ε-загрязнением) используется одно. В связи с этим модель (3) интересна и может найти применение не только в области статистической радиотехники, но и в разнообразных задачах статистической обработки результатов наблюдений, возникающих в финансово-экономической сфере, метрологии, социологии и т.д.

Для модели (3) в отличии от (2) и модели с ε-загрязнением всегда существует $\partial^i P(r\,|\,\theta)/\partial\theta^i$ и непрерывна $\forall i = 1,2,\dots$. ПВ (3) является «наихудшей» в обобщенном классе распределений $\Re_0$ и дает возможность получать робастные алгоритмы оценивания, фильтрации. Модель (3) позволяет, не меняя структуру демодулятора, использовать адаптивную процедуру настройки параметров α, β и, следовательно, применять робастно-адаптивные алгоритмы работы демодулятора. Практическая реализация нелинейного преобразования $Z(\xi)$ может быть осуществлена на базе дифференциального усилителя-ограничителя.

GENERALIZED DISTRIBUTION SECH^k

A.V. AUSIANNIKAU

Abstract

Model of generalized law of distribution of Sech^k and its researched application in statistical radio engineering. Base attributes and statisticians of distribution are given. Algorithms of point estimation of parameter of shift for known and unknown parameters of scale, and also algorithms of a sequential interval estimation of parameter of shift are resulted.

Список литературы

1. *Тихонов В.И., Кульман Н.К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М., 1975.
2. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М., 1989.
3. *Овсянников А.В.* // Радиотехника. 2011. №3. С. 85-89.
4. *Вадзинский Р.Н.* Справочник по вероятностным распределениям. СПб., 2001.
5. *Никитин Н.Н., Разевиг В.Д.* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1978. Т 18, №1. С. 106-117.