УДК 519.216

КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВЕКТОРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В.С. МУХА, А.Н. КОЗЯЧИЙ*

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

ОАО «ИнтэксСофт»
Кабяка, 8/4, офис 7, Гродно, 230020, Беларусь

Поступила в редакцию 6 января 2011

Предложен алгоритм квадратичного прогнозирования векторной случайной последовательности; рассматриваются вопросы его реализации.

Ключевые слова: прогнозирование, векторная случайная последовательность, многомерные матрицы, моментные функции

Введение

В настоящее время известен алгоритм линейного прогнозирования векторной случайной последовательности [1], являющийся обобщением подхода А.Н. Колмогорова [2] на векторные случайные последовательности. Можно предположить, что в некоторых случаях точности линейного прогнозирования будет недостаточно. В этих случаях можно попытаться увеличить точность прогнозирования за счет нелинейной обработки данных. Алгоритмы нелинейного прогнозирования случайных последовательностей, пригодные для практического использования, в настоящее время отсутствуют в литературе. В данной статье предлагается алгоритм квадратичного прогнозирования векторной случайной последовательности.

Постановка задачи

Задача линейного экстраполирования (прогнозирования) скалярной стационарной случайной последовательности $\gamma(t)$, согласно А.Н. Колмогорову [2], состоит в подборе при заданных $s>0$ и $m>0$ таких действительных коэффициентов a_i, при которых линейная комбинация

$$L = a_1\gamma(t-1) + a_2\gamma(t-2) + ... + a_s\gamma(t-s) \quad (1)$$

доставляет возможно более точное приближение к случайное величине $\gamma(t+m)$. За меру точности приближения принимается величина $\sigma^2 = E(\gamma(t+m) - L)^2$. Данная задача имеет следующие особенности: 1) при постановке задачи зафиксирован алгоритм линейного прогнозирования (1); 2) задача сформулирована для скалярной случайной последовательности; 3) рассматривается стационарная случайная последовательность; 4) это задача прогнозирования на один фиксированный момент времени $t+m$; 5) рассматривается последовательность достаточно общего типа, т.е. на последовательность не накладываются дополнительные условия типа условия авторегрессии, авторегрессии-скользящего среднего и др. Первые четыре особенности позволяют выполнять обобщения задачи в различных направлениях, а пятое делает постановку задачи привлекательной с точки зрения рассмотрения адекватной для практических приложений математической модели случайной последовательности.

В работе [1] выполнено обобщение этой задачи на случай векторной как стационарной, так и нестационарной случайной последовательности, и прогнозирования на набор фиксированных моментов времени в рамках алгоритма линейного прогнозирования. В данной статье снимается ограничение линейности прогнозирования.

Будем рассматривать векторную случайную последовательность $\gamma(t_i)=(\gamma_1(t_i),...,\gamma_n(t_i))^T$, $i=1,2,\ldots$. Задачу прогнозирования этой случайной последовательности будем считать состоящей в том, чтобы по наблюдениям $\gamma(t_i),\gamma(t_2),...,\gamma(t_s)$ этой последовательности, относящимся к прошлым и настоящему моментам времени, получить наилучшую в каком-то смысле оценку значений $\gamma(t_{s+k_1}),\gamma(t_{s+k_1+1}),...,\gamma(t_{s+k_2})$, относящихся к будущим моментам времени.

Алгоритм квадратичного прогнозирования векторной случайной последовательности

В работе [3] сформулирована и решена задача принятия оптимального статистического решения о многомерной случайной матрице по наблюдению другой многомерной случайной матрицы при квадратичной функции потерь. Результаты этой работы можно применить для решения сформулированной выше задачи прогнозирования векторной случайной последовательности. Для этого «наблюдаемую» часть последовательности $\gamma(t_i)$ представим в виде двухмерной ($n\times s$)-матрицы

$$\xi=(\xi_{i_1,i_2})=(\gamma_{i_1}(t_{i_2})),\ i_1=\overline{1,n},\ i_2=\overline{1,s}, \tag{2}$$

а «прогнозируемую» часть – в виде двухмерной ($n\times(k_2-k_1+1)$)-матрицы

$$\eta=(\eta_{i_1,i_2})=(\gamma_{i_1}(t_{i_2+s+k_1-1})),\ i_1=\overline{1,n},\ i_2=\overline{1,k_2-k_1+1},\ 1\le k_1\le k_2, \tag{3}$$

где s – число отсчетов наблюдаемой части реализации, k_1, k_2 – минимальное и максимальное число тактов прогноза соответственно (минимальная и максимальная глубина прогноза). Задачу прогнозирования векторной случайной последовательности $\gamma(t_i)$ сформулируем как задачу принятия оптимального статистического решения о матрице η (3) по наблюдению матрицы ξ (2). Решение последней задачи можно получить как частный случай результатов работы [3]. Рассматривая оптимальный квадратичный предиктор работы [3] для случая двухмерных матриц, получаем следующий алгоритм квадратичного прогнозирования векторной случайной последовательности $\gamma(t_i)$ (расчета оценки $\hat{\eta}$ матрицы η по матрице ξ):

$$B_{(2,4)}=\nu_{\eta\xi^2}-\nu_\eta\nu_{\xi^2}-{}^{0,2}({}^{0,2}(\mu_{\eta\xi}\,{}^{0,2}\mu^{-1}_{\xi^2})(\nu_{\xi^3}-\nu_\xi\nu_{\xi^2})), \tag{4}$$

$$A_{(4,4)}=(\nu_{\xi^4}-\nu_{\xi^2}\nu_{\xi^2}-{}^{0,2}({}^{0,2}((\nu_{\xi^3}-\nu_{\xi^2}\nu_\xi)\,{}^{0,2}\mu^{-1}_{\xi^2})(\nu_{\xi^3}-\nu_\xi\nu_{\xi^2}))), \tag{5}$$

$$C_{(2,4)}={}^{0,4}(B_{(2,4)}\,{}^{0,4}A^{-1}_{(4,4)}), \tag{6}$$

$$C_{(2,2)}={}^{0,2}((\mu_{\eta\xi}-{}^{0,4}(C_{(2,4)}(\nu_{\xi^3}-\nu_{\xi^2}\nu_\xi)))\,{}^{0,2}\mu^{-1}_{\xi^2}), \tag{7}$$

$$\hat{\eta}=\nu_\eta+{}^{0,2}(C_{(2,2)}(\xi-\nu_\xi))+{}^{0,4}(C_{(2,4)}(\xi^2-\nu_{\xi^2})). \tag{8}$$

Здесь приняты следующие обозначения моментов матриц ξ и η:

$$\nu_{\xi^{\lambda+k}}=E(\xi^\lambda\xi^k),\ \nu_{\eta\xi^\lambda}=E(\eta\xi^\lambda), \tag{9}$$

$$\mu_{\xi^2}=\nu_{\xi^2}-\nu^2_\xi,\ \mu_{\eta\xi}=\nu_{\eta\xi}-\nu_\eta\nu_\xi. \tag{10}$$

Записи вида ${}^{0,2}(PQ)$, ${}^{0,4}(PQ)$ означают $(0,2)$- и $(0,4)$-свернутые произведения матриц P и Q соответственно, ${}^{0,2}\mu_{\xi^2}^{-1}$, ${}^{0,4}A_{(4,4)}^{-1}$ – матрицы, $(0,2)$- и $(0,4)$-обратные к матрицам μ_{ξ^2} и $A_{(4,4)}$ соответственно, произведения и степени в выражениях (9), (10) понимаются как $(0,0)$-свернутые [4], E – символ математического ожидания. Заметим также, что матрицы $B_{(2,4)}$ (4) и $C_{(2,4)}$ (6) шестимерные, $A_{(4,4)}$ (5) – восьмимерная, $C_{(2,2)}$ (7) – четырехмерная, $\hat{\eta}$ (8) – двухмерная.

Расчеты по формулам (4)–(8) выполняются в порядке их написания. Предварительно вычисляются все входящие в формулы (4)–(8) моменты.

Для реализации алгоритма (4)–(8) необходимо знать соответствующие моменты случайных матриц ξ и η. Они в принципе могут быть получены по моментным функциям случайной последовательности $\gamma(t_i)$. Пусть известны следующие моментные функции случайного процесса $\gamma(t)=(\gamma_1(t),...,\gamma_n(t))$:

$$\nu_\gamma(t)=(\nu_{\gamma,i}(t))=(E(\gamma_i(t))), \tag{11}$$

$$\nu_{\gamma^2}(t,u)=(\nu_{\gamma^2,i,j}(t,u))=(E(\gamma_i(t)\gamma_j(u))), \tag{12}$$

$$\nu_{\gamma^3}(t,u,v)=(\nu_{\gamma^3,i,j,k}(t,u,v))=E(\gamma_i(t)\gamma_j(u)\gamma_k(v)), \tag{13}$$

$$\nu_{\gamma^4}(t,u,v,w)=(\nu_{\gamma^4,i,j,k,l}(t,u,v,w))=E(\gamma_i(t)\gamma_j(u)\gamma_k(v)\gamma_l(w)), \tag{14}$$

$i,j,k,l=\overline{1,n}$.

Тогда матрицы моментов в выражениях (4)–(8) могут быть получены по следующим формулам:

$\nu_\xi=(\nu_{\xi,i_1,i_2})=(\nu_{\gamma,i_1}(t_{i_2}))$, $i_1=\overline{1,n},\ i_2=\overline{1,s}$,

$\nu_\eta=(\nu_{\eta,i_1,i_2})=(\nu_{\gamma,i_1}(t_{i_2+s+k_1-1}))$, $i_1=\overline{1,n}$, $i_2=\overline{1,k_2-k_1+1}$,

$\nu_{\xi^2}=(\nu_{\xi^2,i_1,i_2,i_3,i_4})=(E(\xi_{i_1,i_2}\xi_{i_3,i_4}))=(E(\gamma_{i_1}(t_{i_2})\gamma_{i_3}(u_{i_4}))=$

$=(\nu_{\gamma^2,i_1,i_3}(t_{i_2},u_{i_4}))$, $i_1,i_3=\overline{1,n}$, $i_2,i_4=\overline{1,s}$,

$\nu_{\xi^3}=(\nu_{\xi^3,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6})=(E(\xi_{i_1,i_2}\xi_{i_3,i_4}\xi_{i_5,i_6}))=$

$=(E(\gamma_{i_1}(t_{i_2})\gamma_{i_3}(u_{i_4})\gamma_{i_5}(v_{i_6})))=(\nu_{\gamma^3,i_1,i_3,i_5}(t_{i_2},u_{i_4},v_{i_6}))$,

$i_1,i_3,i_5=\overline{1,n}$, $i_2,i_4,i_6=\overline{1,s}$,

$\nu_{\xi^4}=(\nu_{\xi^4,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6,i_7,i_8})=(E(\xi_{i_1,i_2}\xi_{i_3,i_4}\xi_{i_5,i_6}\xi_{i_7,i_8}))=$

$=(E(\gamma_{i_1}(t_{i_2})\gamma_{i_3}(u_{i_4})\gamma_{i_5}(v_{i_6})\gamma_{i_7}(w_{i_8})))=(\nu_{\gamma^4,i_1,i_3,i_5,i_7}(t_{i_2},u_{i_4},v_{i_6},w_{i_8}))$,

$i_1,i_3,i_5,i_7=\overline{1,n}$, $i_2,i_4,i_6,i_8=\overline{1,s}$,

$\nu_{\eta\xi}=(\nu_{\eta\xi,i_1,i_2,i_3,i_4})=(E(\eta_{i_1,i_2}\xi_{i_3,i_4}))=(E(\gamma_{i_1}(t_{i_2+s+k_1-1})\gamma_{i_3}(u_{i_4}))=$

$=(\nu_{\gamma^2,i_1,i_3}(t_{i_2+s+k_1-1},u_{i_4}))$, $i_1,i_3=\overline{1,n}$, $i_2=\overline{1,k_2-k_1+1}$, $i_4=\overline{1,s}$,

$\nu_{\eta,\xi^2}=(\nu_{\eta,\xi^2,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6})=(E(\eta_{i_1,i_2}\xi_{i_3,i_4}\xi_{i_5,i_6}))=$

$$= (E(\gamma_{i_1}(t_{i_2+s+k_1-1})\gamma_{i_3}(u_{i_4})\gamma_{i_5}(v_{i_6})) =$$

$$= (\nu_{\gamma^3, i_1, i_3, i_5}(t_{i_2+s+k_1-1}, u_{i_4}, v_{i_6})), \ i_1, i_3, i_5 = \overline{1, n}, \ \ i_2 = \overline{1, k_2 - k_1 + 1}, \ i_4, i_6 = \overline{1, s}.$$

В практических приложениях ни матрицы моментов в алгоритме (4)–(8), ни моментные функции (11)–(14) случайного процесса $\gamma(t)$, по которым эти матрицы могут быть получены, как правило, неизвестны. В этом случае можно воспользоваться известным в математической статистике подстановочным правилом и вместо неизвестных характеристик подставлять их оценки.

Заключение

Предложенный алгоритм квадратичного прогнозирования при большом числе компонент векторной случайной последовательности и большой глубине прогноза потребует больших объемов вычислений. Однако можно найти приложения, в которых вычислительная сложность алгоритма окажется вполне приемлемой. Одним из таких приложений представляется краткосрочное прогнозирование отдельных характеристик погоды, например, температуры воздуха. Вопросы изучения свойств моментных функций третьего и четвертого порядков (13), (14) векторной случайной последовательности в общем случае и для стационарной случайной последовательности, получения их оценок, а также оценок моментов алгоритма (4)–(8), требуют отдельного рассмотрения.

SQUARE-LAW FORECASTING OF VECTOR RANDOM SEQUENCE

V.S. MUKHA, A.N. KOZYACHY

Abstract

The algorithm of the square-law forecasting of vector random sequence is offered. The questions of realization of the algorithm are considered.

Литература

1. *Муха В.С.* // Информационные системы и технологии (IST'2004). 2004. Ч. 2. С. 195–200.
2. *Колмогоров А.Н.* // Известия АН СССР. 1941. Т. 5. С. 3–14.
3. *Муха В.С.* // Весці НАН Беларусі. 2010. № 3 С. 17–24.
4. *Муха В.С.* Анализ многомерных данных. Минск, 2004.