

ЭЛЕКТРОНИКА, РАДИОФИЗИКА, РАДИОТЕХНИКА, ИНФОРМАТИКА

УДК 681.3.519.241.2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЯЕМОГО ВЕРОЯТНОСТНОГО ЭЛЕМЕНТА

Э.А. БАКАНОВИЧ, Т.М. КРИВОНОСОВА, З.Н. ЧЕТЫРКИНА

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь**Поступила в редакцию 8 декабря 2010*

Рассматривается управляемый вероятностный элемент, позволяющий генерировать потоки случайных событий с заданными вероятностями их наступления. В качестве управляемого параметра используется частота первичного потока регулярных сигналов. Предлагаемое схемотехническое решение позволяет упростить задание требуемых вероятностей наступления случайных событий и обеспечивает высокую стабильность задаваемых вероятностей. Рассматриваются математические модели для наиболее важных с практической точки зрения случаев, когда длины разрешающих потенциалов и пауз являются случайными величинами, подчиняющимися экспоненциальному распределению и распределениям Эрланга различных порядков.

Ключевые слова: стохастическое устройство, математическая модель, вероятностный элемент, поток случайных событий, распределения Пуассона и Эрланга.

Введение

Создание стохастических вычислительных и моделирующих устройств предполагает использование аппаратных средств, позволяющих имитировать потоки случайных событий, случайных величин, случайные процессы и поля. Применение для этой цели элементов цифровой техники оказывается эффективным, т. к. позволяет имитировать случайные явления практически любой сложности. Однако необходимость организации программного управления характеристиками имитируемых явлений и требование достаточной для решения практических задач степени адекватности аппаратной модели и реального объекта обуславливает необходимость корректного математического описания преобразований первичных случайных и детерминированных процессов в аппаратных моделях.

В статье рассматривается управляемый вероятностный элемент, позволяющий генерировать потоки случайных событий с требуемыми вероятностями их наступления, причем в качестве управляемого параметра используется частота первичного (преобразуемого) потока регулярных сигналов.

Математическая модель вероятностного элемента для пуассоновского потока сигналов

В отличие от вероятностного элемента, рассмотренного в [1], управляемым вероятностным конъюнктом (УВК) второго вида назовем импульсно-потенциальную схему совпадения, на один вход которой поступает регулярный поток $\varphi_R(z)$ сигналов типа δ -функции, период следования которых T_k может регулироваться в широких пределах, а на второй – независимый от $\varphi_R(z)$ поток $Y_{II}(z)$ прямоугольных импульсных сигналов (разрешающих потенциалов); длительности сигналов и пауз в потоке $Y_{II}(z)$ являются случайными величинами, подчиняющимися

известным и управляемым функциям распределения вероятностей – рис. 1. Функция распределения пауз между соседними сигналами в потоке $Y_{\Pi}(t)$ зависит, в частности, от способа включения управляемого вероятностного конъюнктора.

Рассмотрим наиболее важный случай, когда длительности разрешающих потенциалов и пауз между ними являются случайными величинами с плотностью распределения вероятностей $f(\vartheta) = \lambda e^{-\lambda \vartheta}$. Определим для этого случая вероятность q появления на выходе УВК по крайней мере одного сигнала потока $\varphi_R(z)$ в течение времени ϑ_j действия на его выходе разрешающего сигнала. Рассматриваемый конъюнктор реализует некоторый оператор преобразования и взаимодействия потоков $\varphi_R(z)$ и $Y_{\Pi}(t)$, поступающих на входы УВК, а параметр q является функционалом, определяемым вероятностными свойствами потока разрешающих потенциалов и характеристиками потока $\varphi_R(z)$.

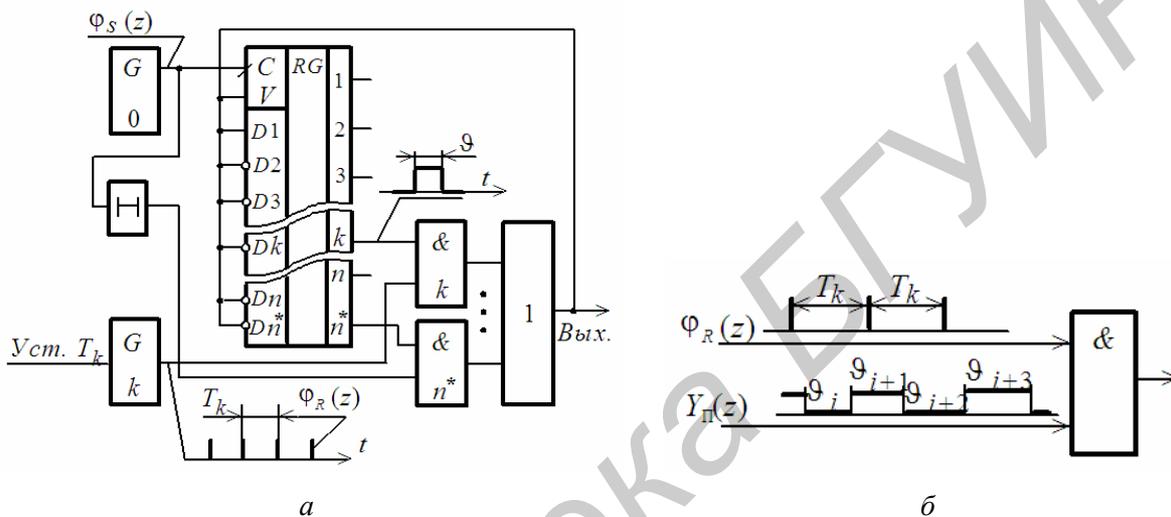


Рис. 1. Управляемый вероятностный конъюнктор второго вида: *a* – вариант технической реализации на основе циклического регистра сдвига (ЦРС); *б* – временная диаграмма

Рис. 2 иллюстрирует процесс функционирования управляемого вероятностного конъюнктора. Интервал τ между моментом появления последнего перед открыванием конъюнктора по потенциальному входу сигнала регулярного потока $\varphi_R(z)$ и моментом начала очередного испытания является случайной величиной с плотностью распределения вероятностей [2]

$$f(\tau) = \begin{cases} 1/T; & \tau \in [0, T]; \\ 0; & \tau < 0, \tau > T. \end{cases}$$

Спектральная функция, соответствующая случайной величине τ [3], имеет вид

$$c_{\tau}(i\sigma) = \int_0^T \frac{1}{T} e^{-i\sigma\tau} d\tau = \frac{1 - e^{-i\sigma T}}{i\sigma T}, \quad (1)$$

а плотность $f(\tau)$ можно представить интегралом Фурье в комплексной форме:

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-i\sigma T}}{i\sigma T} e^{i\sigma\tau} d\sigma.$$

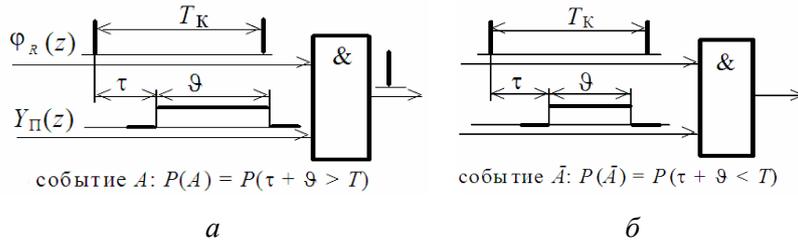


Рис. 2. Временная диаграмма работы УВК второго вида: a – положительный исход случайного испытания; b – отрицательный исход

Спектральная функция, соответствующая случайной величине ϑ , подчиняющейся экспоненциальному распределению, имеет вид:

$$c_{\vartheta}(i\sigma) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda\vartheta} e^{-i\sigma\vartheta} d\vartheta = \frac{\lambda}{\lambda + i\sigma}. \quad (2)$$

Тогда $f(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda + i\sigma} e^{i\sigma\vartheta} d\sigma$. Таким образом, случайной величине τ соответствует случайная функция $e^{i\sigma\tau}$, случайной величине ϑ – функция $e^{i\sigma\vartheta}$, а сумме $\tau + \vartheta$ соответствует функция $e^{i\sigma(\tau+\vartheta)} = e^{i\sigma\tau} \cdot e^{i\sigma\vartheta}$. Так как величины τ и ϑ независимы, то $f_1(\tau + \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c_{\tau+\vartheta}(i\sigma) \cdot e^{i\sigma(\tau+\vartheta)} d\sigma$, где $c_{\tau+\vartheta}(i\sigma) = c_{\tau}(i\sigma) \cdot c_{\vartheta}(i\sigma)$, т. е. с учетом (1) и (2)

$$f_1(\tau + \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-i\sigma T}}{i\sigma T} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + i\sigma} \cdot e^{i\sigma(\tau+\vartheta)} d\sigma. \quad (3)$$

Таким образом, задача сводится к определению интеграла (3). С помощью вычетов точный результат не может быть получен, т.к. особая точка лежит на контуре интегрирования ($\sigma = 0$). Однако эта задача может быть решена, если воспользоваться связью между преобразованием Фурье для плотностей $f(t)$, определенных при $t \geq 0$, и преобразованием Лапласа. Для преобразования Фурье $f(t) \leftarrow c(i\sigma) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\sigma t} dt$. Для преобразования Лапласа

$$f(t) \leftarrow F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad p = s + i\sigma, \quad F(s + i\sigma) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} \cdot e^{-i\sigma t} dt.$$

Сравнение этих выражений показывает, что преобразование Лапласа соответствует преобразованию Фурье, если $S = 0$. Для плотностей вероятностей $f(t)$, определенных при $t > 0$, можно использовать операторный метод. От изображений $f(t)$ по Лапласу к изображению по Фурье можно перейти, если в $p = s + i\sigma$ положить $s = 0$. Пусть

$$f_{\tau}(t) \rightarrow F(p) = \int_0^{\infty} f_{\tau}(t) e^{-pt} dt, c_{\tau}(i\sigma) = F(p)|_{s=0}, f_{\vartheta}(t) \rightarrow G(p) = \int_0^{\infty} f_{\vartheta}(t) e^{-pt} dt, c_{\vartheta}(i\sigma) = G(p)|_{s=0}.$$

По теореме умножения в операционном исчислении $f(\tau + \vartheta) = f_{\tau}(t) \cdot f_{\vartheta}(t) \rightarrow F(p) \cdot G(p)$. Изображению $F(p) \cdot G(p)$ соответствует свертка $f_{\tau}(t) \cdot f_{\vartheta}(t)$:

$$f(\tau + \vartheta) = f_{\tau}(t) \cdot f_{\vartheta}(t) = \int_0^t f_{\tau}(u) \cdot f_{\vartheta}(t - u) du. \quad (4)$$

По формуле обращения для преобразования Лапласа

$$f(\tau + \vartheta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) \cdot G(p) e^{pt} dp. \quad (5)$$

Полагая в (5) для $p = s + i\sigma$, $s \rightarrow 0$, получим $f(\tau + \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c_{\tau}(i\sigma) \cdot c_{\vartheta}(i\sigma) e^{i\sigma t} d\sigma$.

Возвращаясь к переменной интегрирования σ , приходим к известному интегралу Фурье в комплексной форме. Таким образом, операторный метод приводит к формуле (4), которая позволяет отыскать $f_1(\tau + \vartheta)$ [3].

Пусть $t < T$ (рис. 3,а):

$$f_1(\tau + \vartheta) = \int_0^t \underbrace{(1/T)}_{f_{\tau}(u)} \lambda \underbrace{e^{-\lambda(t-u)}}_{f_{\vartheta}(t-u)} du = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{T}. \quad (6)$$

Пусть теперь $t > T$ (рис. 3,б). В этом случае u может изменяться только от 0 до T , т.к. при $u > T$ $f_{\tau}(u) = 0$:

$$f_1(\tau + \vartheta) = \int_0^T \frac{1}{T} \lambda e^{-\lambda(t-u)} du = \frac{e^{-\lambda T} - 1}{T} e^{-\lambda t}. \quad (7)$$

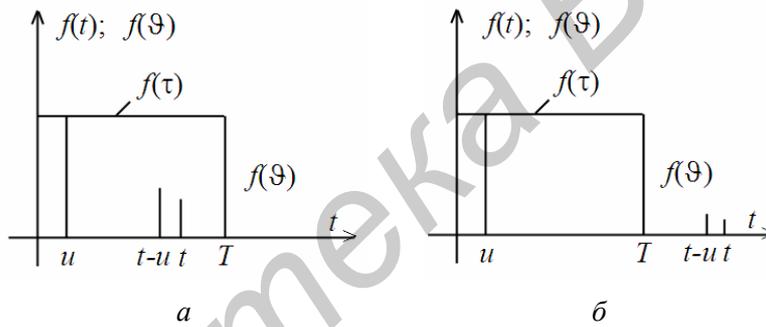


Рис. 3. Иллюстрация к определению плотности распределения вероятностей $f(\tau + \vartheta)$: а - $t < T$; б - $t > T$

Объединяя (6) и (7), окончательно получим плотность распределения вероятностей случайной величины $t = \tau + \vartheta$: $f_1(\tau + \vartheta) = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda t})/T, & 0 < t < T, \\ e^{-\lambda t} (e^{\lambda T} - 1)/T, & t \geq T. \end{cases}$

Убедившись, что полученное таким образом выражение для $f_1(\tau + \vartheta)$ является плотностью распределения вероятностей суммы случайных величин τ и ϑ , можно найти вероятности интересующих нас событий:

$$P(A) = \int_T^{\infty} f_1(\tau + \vartheta) dt = \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T}, \quad P(\bar{A}) = \int_0^T f_1(\tau + \vartheta) dt = 1 + \frac{e^{-\lambda T} - 1}{\lambda T}. \quad (8)$$

Пользуясь (8), можно определить $P(A)$ так, чтобы $P(A) = p_1$, откуда $1 - e^{-\lambda T} = p_1 \lambda T$. Если положить $\lambda T = x$, то получим уравнение $1 - e^{-x} = p_1 x$. Если $y = 1 - e^{-x}$, то для $p_1 < 1$ из геометрических соображений находим, что всегда существует единственное решение $\lambda T = x^*$, поэтому $T = x^*/\lambda$, для которого $P(A) = p_1$.

Частные случаи математической модели

Разработанная математическая модель УВК второго вида конструктивна в том смысле, что предполагает выполнение ряда стандартных процедур, на основе которых могут быть оп-

ределены вероятности появления сигналов на выходе конъюнктора для произвольных импульсных потоков на его входе.

Рассмотрим важные с практической точки зрения частные случаи. Пусть в потоке $Y_{II}(t)$ моменты начала и окончания разрешающих потенциалов образуют поток Эрланга первого порядка. Определим для этого случая плотность распределения вероятностей $f_2(\tau + \vartheta)$, а также вероятности $P(A)$ и $P(\bar{A})$.

Найдем спектральную функцию $c_{\vartheta_1}(i\sigma) = \int_0^{\infty} \lambda^2 \vartheta e^{-\lambda\vartheta} e^{-i\sigma\vartheta} d\vartheta$. Интегрируя по частям: $u = \vartheta$,

$$dV = e^{-(\lambda+i\sigma)\vartheta} d\vartheta, \quad V = e^{-(\lambda+i\sigma)\vartheta} / [-(\lambda+i\sigma)], \quad \text{получаем } c_{\vartheta_1}(i\sigma) = \frac{\lambda^2}{(\lambda+i\sigma)^2}.$$

$$\text{Тогда } f_2(\tau + \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-i\sigma T}}{i\sigma T} \cdot \frac{\lambda^2}{(\lambda+i\sigma)^2} \cdot e^{i\sigma(\tau+\vartheta)} d\sigma, \quad \text{или } f_2(\tau + \vartheta) = \int_0^t f_{\tau}(u) \cdot f_{\vartheta_1}(t-u) du.$$

$$\text{Таким образом, } f_2(\tau + \vartheta) = \begin{cases} 1/T - [f_{\vartheta_0}(t) + f_{\vartheta_1}(t)] / (\lambda T), & 0 < t < T, \\ [f_{\vartheta_0}(t) + f_{\vartheta_1}(t)] (e^{\lambda T} - 1) / (\lambda T) - e^{\lambda T} \cdot f_{\vartheta_0}(t), & t > T, \end{cases}$$

$$P(A) = 2(1 - e^{-\lambda T}) / (\lambda T) - e^{-\lambda T}, \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (9)$$

Рассмотрим теперь случай, когда на потенциальный вход конъюнктора поступает поток прямоугольных разрешающих сигналов, моменты начала и окончания которых образуют поток Эрланга второго порядка. Спектральная функция имеет вид $c_{\vartheta_2}(i\sigma) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^3 \vartheta^2}{2!} e^{-\lambda\vartheta} e^{-i\sigma\vartheta} d\vartheta$. Интегрируя по частям: $u = \vartheta^2$, $du = 2\vartheta d\vartheta$, $dV = e^{-(\lambda+i\sigma)\vartheta} d\vartheta$, $V = e^{-(\lambda+i\sigma)\vartheta} / [-(\lambda+i\sigma)]$, получим

$$c_{\vartheta_2}(i\sigma) = \frac{\lambda^3}{(\lambda+i\sigma)^3} \int_0^{\infty} \vartheta e^{-(\lambda+i\sigma)\vartheta} d\vartheta. \quad \text{Окончательно } c_{\vartheta_2}(i\sigma) = \lambda^3 / (\lambda+i\sigma)^3.$$

$$\text{Тогда плотность распределения вероятностей } f_3(\tau + \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-i\sigma T}}{i\sigma T} \cdot \frac{\lambda^3}{(\lambda+i\sigma)^3} e^{i\sigma(\tau+\vartheta)} d\sigma$$

$$\text{или } f_3(\tau + \vartheta) = \int_0^t f_{\tau}(u) \cdot f_{\vartheta_2}(t-u) du.$$

$$\text{Рассмотрим случай, когда } t < T: f_3(\tau + \vartheta) = \int_0^t \frac{1}{T} \frac{\lambda^3 (t-u)^2}{2!} e^{-\lambda(t-u)} du = \frac{\lambda^3 e^{-\lambda t}}{T \cdot 2!} \int_0^t (t-u)^2 e^{\lambda u} du.$$

Интегрируя по частям: $U = (t-u)^2$, $dU = 2(t-u)du$, $dV = e^{\lambda u} du$, $V = e^{\lambda u} / \lambda$, после ряда преобразований, получаем

$$f_3(\tau + \vartheta) = \begin{cases} 1/T - [f_{\vartheta_2}(t) + f_{\vartheta_1}(t) + f_{\vartheta_0}(t)] / (\lambda T), & t < T, \\ f_{\vartheta_2}(t) \frac{e^{\lambda T} - 1}{\lambda T} - f_{\vartheta_1}(t) \frac{e^{\lambda T} (\lambda T - 1) + 1}{\lambda T} + f_{\vartheta_0}(t) \frac{e^{\lambda T} [(\lambda T)^2 - 2\lambda T + 2] - 2}{\lambda T}, & t > T. \end{cases} \quad (10)$$

Окончательно

$$P(A) = \frac{1}{\lambda T} \{3 - e^{-\lambda T} [(\lambda T)^2 / 2 + 2\lambda T + 3]\}, \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (11)$$

Выражения (8) – (11) определяют вероятности появления на выходе конъюнктора сигналов потока $\Phi_R(z)$ в зависимости от его периода T , интенсивности λ потока разрешающих потенциалов $Y_{II}(t)$ и вида функций распределения длительностей случайных разрешающих потенциалов.

Таким образом, управление вероятностью q может осуществляться как путем изменения частоты импульсного потока $\varphi_R(z)$ при $\lambda = \text{const}$, так и путем изменения интенсивности потока случайных сигналов, осуществляющих продвижение единицы по регистру сдвига (см. рис. 1), при $T = \text{const}$.

Характеристики УВК второго вида, полученные экспериментально, приведены на рис. 4.

Управляемый вероятностный конъюнктор второго вида послужил основой для построения ряда устройств формирования потоков случайных временных интервалов [4–8].

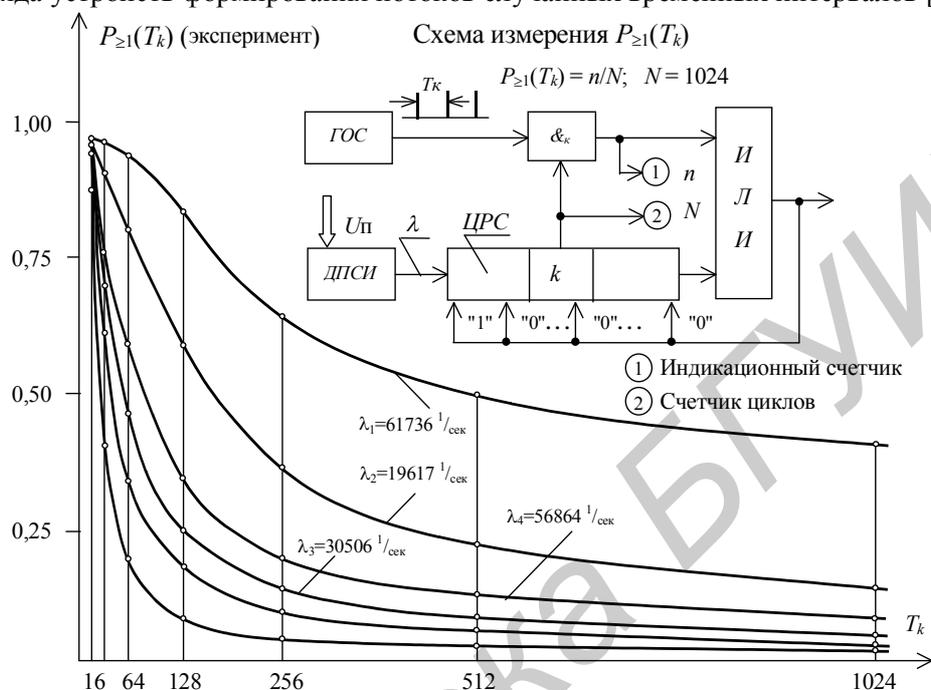


Рис. 4. Характеристики УВК второго вида (ГОС – генератор опорных сигналов, ДПСИ – датчик потока случайных импульсов)

Заключение

Рассмотренная математическая модель позволяет проводить исследование вероятностных элементов, реализующих операторы преобразования случайных и детерминированных потоков сигналов при достаточно общих предположениях относительно свойств преобразуемых потоков. Возможность использования в качестве управляемого параметра частоты генератора регулярных сигналов обеспечивает высокую точность задания вероятности появления сигнала на выходе вероятностного элемента, повышает стабильность задания этой вероятности, приводит к уменьшению числа источников первичных преобразуемых случайных процессов, используемых в стохастических устройствах, и упрощает организацию программного управления работой устройств. Эта модель также позволяет проводить исследование структур, состоящих из множества УВК, включенных последовательно или параллельно. Такие структуры, в частности, могут быть использованы при создании генераторов потоков «редких» событий с управляемыми характеристиками и программно-управляемых вероятностных преобразователей, формирующих случайные величины с распределениями непрерывного типа.

MATHEMATICAL MODEL OF CONTROLLABLE PROBABILISTIC ELEMENT

E.A. BAKANOVICH, T.M. KRIVONOSOVA, Z.N. CHETYRKINA

Abstract

The paper discusses a controllable probabilistic element that allows generating streams of random events with given probabilistic characteristics of their occurrence. The frequency of the primary flows of regular signals is used as a controllable parameter. The suggested circuitry solution makes it possible to simplify the procedure of setting the required probabilities of random events and provides high stability of the preset probabilities. Mathematical models for the most practically important cases are under consideration, namely when the length of resolvent potentials and the intervals (time gaps) between them are random quantities, subject to exponential distribution and Erlang distributions of various orders.

Литература

1. Баканович Э.А., Кривоносова Т.М. // Докл. БГУИР. 2010. № 4 (16), С. 64–71.
2. Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. М., 1969.
3. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы. М., 1988.
4. АС СССР № 312253. Устройство для формирования случайных временных интервалов. Четвериков В.Н., Баканович Э.А., Меньков А.В., Соломонов Л.А. БИ № 25 от 19.08.1971.
5. Баканович Э.А., Липницкий В.А., Четыркина З.Н. и др. // Мир информационных технологий. 2001. №1. С. 10–19.
6. Четвериков В.Н., Баканович Э.А., Меньков А.В. Вычислительная техника для статистического моделирования. М., 1978.
7. Четвериков В.Н., Баканович Э.А. Стохастические вычислительные устройства систем моделирования. М., 1989.
8. Четвериков В.Н., Баканович Э.А., Меньков А.В. // Труды Международного симпозиума IFAC «Дискретные системы». 1974. Т.4. С. 57–66.