

УДК 681.3

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ ПОТОКОВОЙ СЕТИ НА ОСНОВЕ ВЕРОЯТНОСТНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Е.И. СУКАЧ

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
Советская, 104, Гомель, 246019, Беларусь

Поступила в редакцию 24 февраля 2011

Рассматривается подход к оценке динамических характеристик пропускной способности потоковой сети, основанный на методе вероятностно-алгебраического моделирования, позволяющий определить вероятностные значения характеристик функционирования исследуемых систем по аналогичным характеристикам составляющих их компонентов.

Ключевые слова: вероятностно-алгебраическое моделирование, потоковые сети, пропускная способность, цепи Маркова.

Введение

Объектом исследования являются потоковые системы. К ним относятся производственные, вычислительные и транспортные системы, которые можно представить в виде графовых структур и функционирование которых подчиняется следующим условиям: потоки на входе переходника суммируются; поток на выходе переходника равен входному потоку, деленному на число выходов; суммарный поток не может превышать на входе/выходе 100%.

Эксплуатация потоковых систем предполагает, как правило, различные варианты организации выполнения предписанных им функций. Выбор лучшего варианта функционирования системы в смысле исследуемого свойства должен основываться на математически обоснованном сравнении вариантов, отличающихся как структурной организацией, так и параметрами элементарных участков, составляющих систему.

С позиций анализа вероятностных значений пропускной способности потоковых систем применимы как статические, так и динамические модели. Для статического исследования характеристик потоковых систем используются аналитические методы и средства их автоматизации, такие как АРБИТР (ПК АСМ СЗМА) [1] – программный комплекс автоматизированного структурно-логического моделирования и Relex Reliability Studio [2] – программная среда, включающая различные методы анализа надежности и реализующая разнообразные формы задания моделей (графы, деревья отказов). Применение указанных методов ограничено числом участков, составляющих систему, учитывающих, как правило, не более двух возможных значений пропускной способности. Увеличение количества участков и рассмотрение множества их вероятностных значений пропускной способности приводит к росту пространства состояний модели и усложнению связей между состояниями.

К динамическим моделям можно отнести статистическое имитационное моделирование, предполагающее рассмотрение различных траекторий функционирования исследуемых систем во времени с последующим усреднением полученных результатов моделирования. В частности, с целью определения максимальной пропускной способности сети, функционирующей в условиях случайных воздействий, разработан метод, основанный на сочетании алгоритма Форда-Фалкерсона и метода Монте-Карло [3]. При этом изменение параметров функционирования исследуемой системы требует проведения очередной серии имитационных экспериментов и последующую обработку результатов.

В статье рассматривается методика определения пропускной способности потоковой системы на основе вероятностно-алгебраического моделирования (ВАЛМ) [4], позволяющая учесть множество возможных изменяющихся во времени значений пропускной способности любого числа участков, составляющих систему и ее структурную организацию.

Общая характеристика метода вероятностно-алгебраического моделирования

Вероятностно-алгебраическое моделирование реализует процесс формирования вектора вероятностей состояний системы по векторам вероятностей состояний составляющих систему компонентов с учетом установленных между ними связей [4].

Система формализуется в виде множества компонентов $K = \{K_i\}, i = \overline{1, m}$, согласованное взаимодействие которых обеспечивает ее функционирование. Компоненты могут находиться в одном из множества состояний $S = \{S_j\}, j = \overline{1, n}$, характеризующих исследуемое свойство системы (надежность, пропускную способность и др.). Вероятности нахождения компонентов системы в каждом из состояний задаются векторами вероятностей:

$$P^i = (p_1^i, p_2^i, \dots, p_n^i), \sum_{j=1}^n p_j^i = 1, i = \overline{1, m}. \quad (1)$$

Предполагается, что компоненты системы независимы и между ними могут быть установлены функциональные связи с учетом целей исследования, которые описываются набором детерминированных и/или вероятностных функций $F = \{F_z\}$.

Элементы вектора вероятностей результирующего вектора P^3 , полученного в результате вероятностно-алгебраического умножения векторов P^1 и P^2 , определяются по формуле:

$$p_k^3 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^k p_i^1 p_j^2, \text{ где } i, j, k = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Коэффициенты a_{ij}^k называются коэффициентами вероятностно-алгебраического моделирования и удовлетворяют следующим требованиям:

$$\forall i, j, k \quad a_{ijk} \geq 0 \text{ и } \sum_{k=1}^n a_{ijk} = 1. \quad (3)$$

В случае детерминированных связей между компонентами исследуемой системы коэффициенты вероятностно-алгебраического моделирования определяются соотношениями:

$$\begin{cases} a_{ij}^k = 1, & \text{если } k = F(i, j), \\ a_{ij}^k = 0, & \text{если } k \neq F(i, j). \end{cases} \quad (4)$$

Основу метода ВАЛМ составляет алгебраический аппарат, который является удобным для исследования вероятностных свойств сложных систем и позволяет распространить общие свойства алгебраических структур на исследуемую предметную область.

Методика оценки пропускной способности потоковой сети

Определение вероятностных характеристик пропускной способности потоковой системы реализуется с использованием системы вероятностно-алгебраического моделирования PALS (Probability-Algebraic Simulation) [5] следующей последовательностью шагов.

На шаге 1 выделяется множество элементарных участков потоковой системы и связей между ними. В диалоговом режиме с использованием стандартных компонентов $K = \{K_i\}$ и библиотеки функций $F = \{F_z\}$ формируется графическая схема $G(F, K)$ исследуемой системы, которая представляет собой дерево. Листьями дерева являются компоненты исследуемой системы, а узлами – функции, определяющие связи между компонентами системы.

На шаге 2 на основе натуральных экспериментов с прототипом потоковой системы или методом экспертных оценок реализуется подготовка параметров моделирования.

На шаге 3 для каждого компонента задается количество состояний $S = \{S_j\}, j = \overline{1, n}$ и начальные вектора вероятностей, характеризующие эти состояния:

$$P^{i0} = (p_1^{i0}, p_2^{i0}, \dots, p_j^{i0}), \sum_{j=1}^n p_j^{i0} = 1, i = \overline{1, m} \quad (5)$$

Для этой цели используются соответствующие средства ввода информации PALS, которые автоматически заносят в базу данных исходные данные.

На шаге 4 осуществляется задание времени моделирования и выбор способа формирования значений векторов вероятностей

$$P^{it} = (p_1^{it}, p_2^{it}, \dots, p_n^{it}), \sum_{j=1}^n p_j^{it} = 1, t = \overline{1, T}, \quad (6)$$

характеризующих изменение пропускной способности компонентов во времени.

Одним из способов, определяющих динамическое изменение векторов вероятностей (6), является первичное моделирование с использованием марковской модели с дискретным временем и дискретными состояниями, переходная матрица которой имеет вид:

$$PK_i = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 0 & \sum_{i=1}^2 p_i & p_3 & p_4 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^3 p_i & p_4 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sum_{i=1}^{n-1} p_i & p_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Возможен переход к рассмотрению процессов вероятностных изменений участков потоковой системы с восстановлением. В зависимости от стратегий восстановления компонентов выбирается одна из имеющихся параметризованных моделей Маркова. Параметры моделей, описывающих изменение вероятностных характеристик компонентов потоковой системы, определяются в результате алгоритмической обработки данных, полученных при проведении натуральных экспериментов.

Альтернативным способом задания динамического изменения векторов вероятностей является описание элементов исходных векторов вероятностей (5) параметрическими функциями. Использование в качестве параметра функций времени позволяет управлять скоростью изменения вероятностных характеристик компонентов. Проведение статического моделирования, реализуемого одной итерацией, при параметрическом задании исходных векторов (5) позволяет сформировать результирующий вектор, характеризующий пропускную способность потоковой системы в символьном виде.

На шаге 5 в соответствии с заданным временем моделирования проводится динамическое вероятностно-алгебраическое моделирование, которое реализует компьютерные вычисления на каждой итерации моделирования с учетом вероятностного изменения состояний компонентов. При этом неоднократно реализуется статическое моделирование, осуществляющее свертку исходных векторов вероятностей состояний компонентов по формуле (2) с учетом уровня вложенности функций и коэффициентов вероятностно-алгебраического моделирования (4).

На шаге 6 по желанию пользователя результаты моделирования графически отображаются в виде временных диаграмм, представляющих изменение вероятностных характеристик пропускной способности, как отдельных участков, так и всей потоковой системы.

На шаге 7 для случая исследования функционирующей потоковой системы осуществляется проверка адекватности построенной вероятностно-алгебраической модели реальному объекту. В PALS она проводится автоматически путем проверки близости средних значений откликов модели соответствующим характеристикам реальной потоковой сети. В случае отрицательных результатов осуществляется переход на шаг 4.

На шаге 8 определяется влияние вероятностных характеристик пропускной способности участков потоковой сети на значение компонентов вектора откликов всей системы при ее фиксированной структурной организации. С этой целью организуются модельные эксперименты, в которых, во-первых, варьируются значения векторов (5), позволяющие оценить влияние начального состояния участков системы на результирующее состояние всей сети. Во-вторых, для рассмотрения возможных режимов эксплуатации потоковой системы изменяются параметры марковских моделей участков, описывающие вероятностное изменение пропускной способности во времени.

На шаге 9 исследуется влияние структурной организации потоковой системы на векторы откликов моделирования при неизменных вероятностных значениях параметров компонентов. При этом могут быть рассмотрены случаи: введения новых участков, увеличивающих пропускную способность участков – «узких мест» сети, обнаруженных при исследовании исходного структурного варианта сети; исключения участков, пропускная способность которых обращается в ноль в результате аварий (профилактических ремонтов); рассмотрения альтернативных вариантов структурной организации потоковой сети. Сравнение результирующих векторов пропускной способности сети для различных вариантов ее структурной организации позволит выбрать лучший из них, а также оценить выигрыш при резервировании отдельных участков и проигрыш при рассмотрении усеченных вариантов.

Пример определения вероятностных характеристик пропускной способности потоковой системы

Для демонстрации методики вероятностной оценки пропускной способности была выбрана транспортная система сообщения (ТСС), включающая участки дорог, соединяющие населенные пункты. Варианты структурной организации ТСС представлены на рис. 1, а, б.

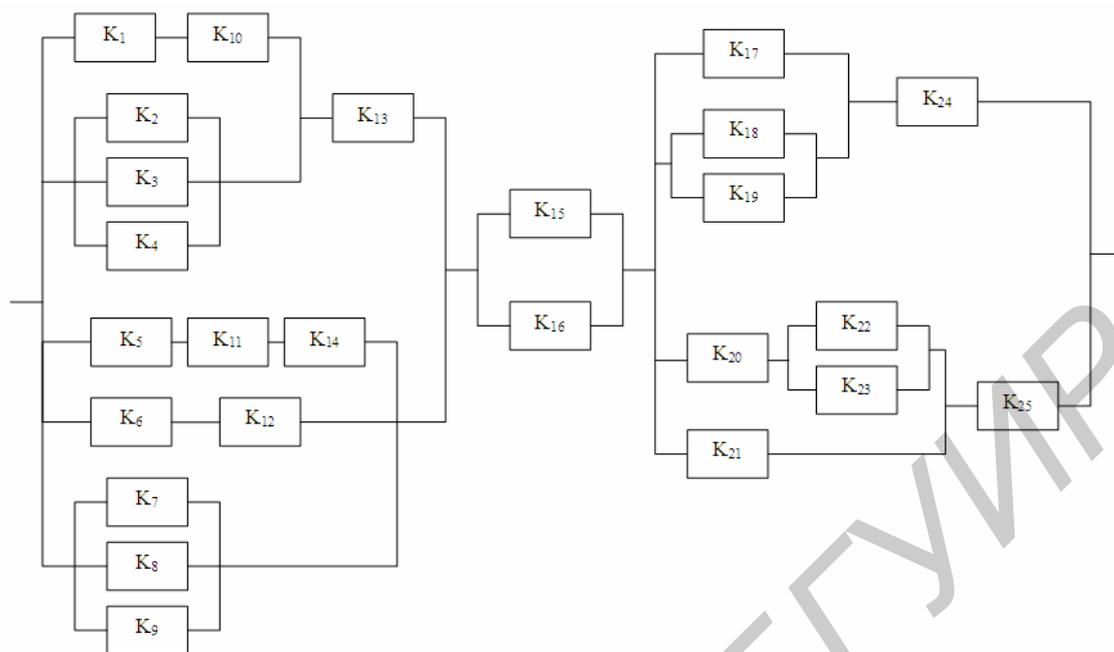
Участки дорог исследуемой ТСС представлены компонентами $K = \{K_i\}, i = \overline{1, 28}$, которые описываются однотипным образом и характеризуются множеством состояний $S = \{S_j\}, j = \overline{1, 10}$, соответствующих определенному уровню пропускной способности, вероятностно изменяющемуся во времени. Пропускная способность участка (PR) указывает на максимально возможное количество единиц транспорта, которое он способен пропустить за выбранную единицу времени. Состоянию S_1 соответствует максимальная пропускная способность PR_1 . Состоянию S_{10} соответствует пропускная способность $PR_{10}=0$, при которой движение по участку дороги прекращается. Остальные состояния характеризуют промежуточные уровни пропускной способности участков, значения которых устанавливаются в зависимости от множества случайных факторов, одним из которых является износ дорог, возникающий в процессе обслуживания сетью транспортных потоков.

Начальные значения вероятностей состояний, характеризующих пропускную способность участков, задаются векторами:

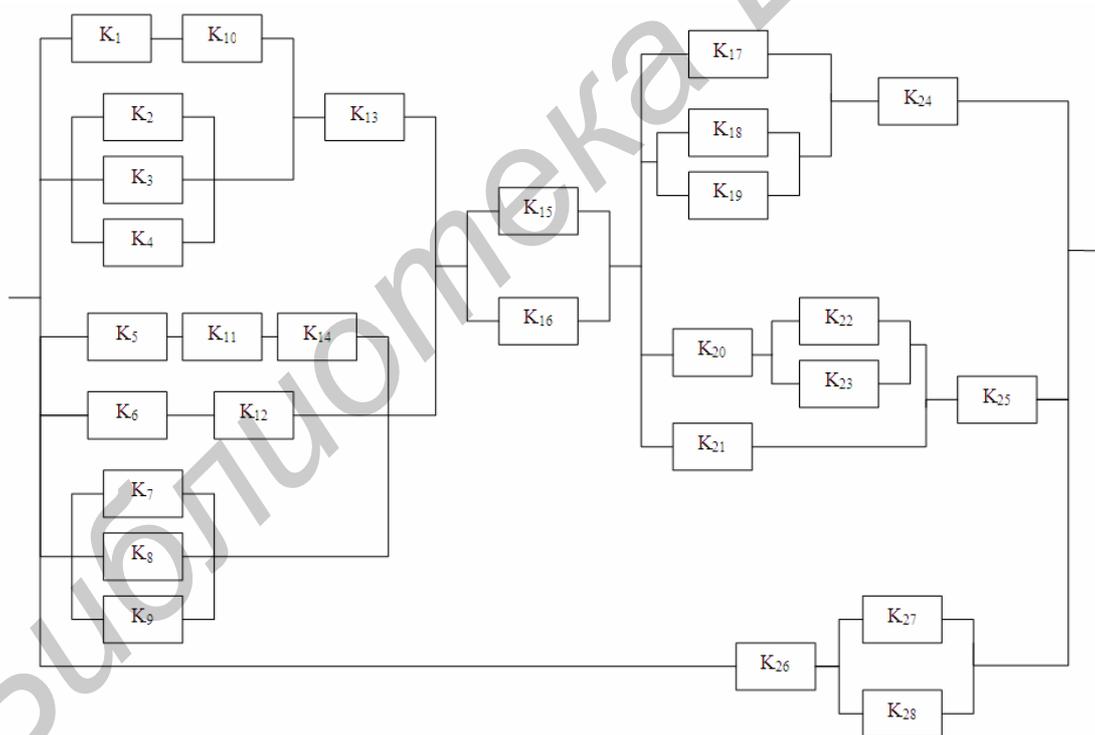
$$P^{i0} = (P_1^{i0}, P_2^{i0}, \dots, P_{10}^{i0}), \sum_{j=1}^{10} P_j^{i0} = 1, i = \overline{1, 28},$$

которые изменяются во времени.

Предполагается, что вероятностное изменение состояний участков дорог описывается марковскими моделями с дискретными состояниями и дискретным временем, параметры которых задаются матрицами вида (7). Матрицы переходных вероятностей $PK_i, [10 \times 10], i = \overline{1, 28}$ для всех компонентов различны и формируются в результате статистического анализа данных, характеризующих износ участков.



a



б

Рис. 1. Графовая структура ТСС: *a* – вариант 1; *б* – вариант 2

В результате первичного моделирования формируются значения векторов вероятностей, описывающие состояния участков сети на заданном промежутке времени:

$$P^t = (p_1^t, p_2^t, \dots, p_{10}^t), \sum_{j=1}^{10} p_j^t = 1, i = \overline{1, 28}, t = \overline{1, 100}.$$

Полученные вектора являются исходными данными для вероятностно-алгебраического моделирования исследуемой системы. Ставится задача определения вектора вероятностей, характеризующего состояние пропускной способности сети, по вероятностным характеристикам участков сети.

В расчетных вероятностных моделях используется функция $F_1(i, j) = \min(i + j - 1, n)$ для параллельных участков сети и функция $F_2(i, j) = \max(i, j)$ для последовательных участков, что имеет естественную интерпретацию в случае исследования свойства пропускной способности ТСС. Результирующая пропускная способность параллельно расположенных участков является суммой их пропускных способностей. Пропускная способность последовательно расположенных участков определяется минимальным значением пропускных способностей участков.

Результатом моделирования являются динамические вероятностные характеристики пропускной способности, как отдельных участков, так и ТСС в целом для двух вариантов ее структурной организации, представленные на рис. 2, 3.

На рис. 2 представлена динамика состояний участка K_{10} , отображающая переход от вероятностного распределения состояний, соответствующих максимальной пропускной способности, к более равномерному распределению вероятностей возможных состояний. На рис. 3 сопоставляются вероятностные характеристики пропускной способности двух вариантов сети (25 участков и 28 участков).

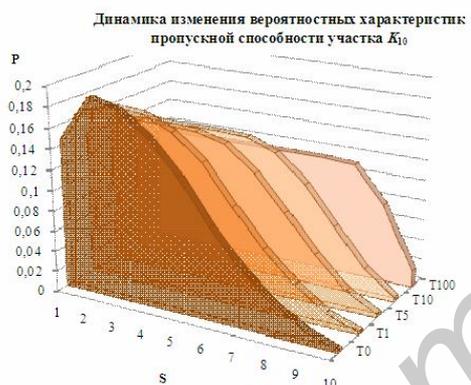


Рис. 2. Динамика вероятностных состояний участка K_{10}



Рис. 3. Вероятностные характеристики пропускной способности двух вариантов сети

Сравнительный анализ данных позволяет сделать вывод о том, что изменение структурной организации ТСС заметно отражается на изменении вероятностных характеристик пропускной способности. Введение дополнительных участков (вариант 2) позволяет уменьшить снижение пропускной способности сети во времени, возникающее в результате естественного износа эксплуатируемых дорог ТСС.

Заключение

Применение методики оценки пропускной способности потоковой системы с использованием ВАЛМ позволяет учесть ее вероятностную природу и решить следующие задачи:

- статически и в динамике провести сравнительный анализ различных структурных вариантов системы;
- подобрать параметры компонентов, обеспечивающих необходимый уровень пропускной способности системы;
- оценить влияние параметров пропускной способности участков и их групп на пропускную способность всей сети;
- получить в символьном виде вектор вероятностей пропускной способности сети.

THE METHOD OF EVALUATION OF THE CAPACITY OF STREAMING NETWORKS BASED ON THE PROBABILISTIC-ALGEBRAIC MODELING

E.I. SUKACH

Abstract

An approach to estimating the dynamic characteristics of the capacity of streaming network, based on the method of probability-algebraic modeling is considered, which allows to determine the probability values of the characteristics of the systems' functioning using the same characteristics of their components, is considered.

Литература

1. Нозик А.А., Можяев А.С // Монтаж и наладка средств автоматизации и связи. 2007. №2. С. 32–40.
2. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://www.relex.com/products>.
3. Сукач Е.И. // Реєстрація, зберігання і обробка даних (Data Recording, Storage & Processing). 2008. Т.10, №3. С. 37–45.
4. Сукач Е.И. // Математичні машини і системи (Mathematical Machines and Systems). 2010. №3. С. 116–123.
5. Сукач Е.И., Ратобильская Д.В. // VI Международная конференция-форум «Информационные системы и технологии», Академия управления при Президенте Республики Беларусь, 24-25 ноября 2010.