МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ В ВИДЕ ПРИКЛАДНОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Береснев Д. В., Андрадэ А. И.
Факультет компьютерных систем и сетей, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектороники
Минск, Республика Беларусь
E-mail: {beresnev.dima8, veimar.94}@gmail.com

В данной работе рассмотрены некотрые методы решения дифференциальных уравнений математической физики. Тщательно проанализироаны уравнения движеия классической механики, система дифференциальных уравнений Максвелла, закон Ома в дифференциальной форме, волновое уравнение, а также уравнение Шрёдингера. Дана теоритическая информация о математических и физических аспектх даных дифференциальных уравнений. Подробно описаны численные методы решения дифференциальных уравнений – Метод Ренге-Кутты, метод Эйлера, метод Адамса-Башфорта и метод Эйлера-Коши

Введение

Совсем недавно, решая даже самые простые численные задачи, специалисты, занимающиеся вычислительной математикой, были вынуждены осваивать основы программирования и писать программы одноразового применения. Между тем возможности компьютеров постоянно росли. Современные персональные компьютеры по своим характеристикам и возможностям намного превосходят первые ЭВМ, занимавшие целые комнаты и залы. А скорость вычисления нинешних персональных компьютеров в сотни раз превышает скорость вычисления первых ПК. В связи с этим стал меняться взгляд на назначение компьютера. На первое место вышло применение их для работы с текстовыми процессорами (например, Microsoft Word) и прикладными программными системами для автоматизации офисной деятельности. Развитие мультимедиа привело к бурному применению компьютеров в роли игровых устройств. В результате главный стимул развития компьютерной техники создаётся, к сожалению, не высокоинтеллектуальными задачами.

Однако времена меняются и вечные ценности, к коим принадлежит наука и образование, вновь возвращаются. В последние годы во всём мире существенно возрос интерес к серьёзному применению ПК, в том числе в области математических расчётов. Этому в большей степени способствовала разработка специальных компьютерных математических программных систем, резко снизивших потребность в написании собственных маленьких программных продуктов.

В последние годы показателем интеллектуальной мощи компьютеров, в том числе и персональных, стали уже не программы для игры в шахматы, а новейшие системы компьютерной математики (СКМ) (иногда их называют системами компьютерной алгебры, или системами символьных (аналитических) вычислений).

Таким образом, с недавнего времени среди пользователей пресональных компьютеров различного класса достаточно популярными и широко используемыми стали термины «Система компьютерной математики» и «система компьютерного моделирования». Созданные для проведения символьных преобразований математических вырожений, эти системы были доведены до уровня, позволяющего облегчить, а подчас и заменить труд математиков – теоретиков и аналитиков. Все вышеописанные обстоятельства и дали импульс авторам данной работы для исследований в сфере вычислительной математики и программирования.

I. Описание методов решения дифференциальных уравнений

1. Обыкновенные ДУ. Постановка задачи.

Различные задачи во многих областях науки и техники при их математическом моделировании сводятся к дифференциальным уравнениям.

Дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, которые, кроме неизвестных функций одного или нескольких независимых переменных, содержат также и их производные. Дифференциальные уравнения (ДУ) называют обыкновенными (ОДУ), если неизвестные функции являются функциями одного переменного, в противном случае ДУ называться уравнениями в частных производных. Соотношение:

$$F(x, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (1)$$

связывающее переменную x, неизвестную функцию $Y = Y(x)$ и ее производные до порядка (n) включительно, называют ОДУ n-го порядка.

2. Задача Коши. В зависимости от вида ДУ (1) задача Коши формируется следующим образом.

1. Если n = 1, то требуется найти $Y = Y(x)$, удовлетворяющую уравнению:

$$\frac{dY}{dX} = f(x, Y) \qquad (2)$$

и принимающую при $x = x_0$ заданное значение y_0 :

$$Y(x_0) = Y_0 \qquad (3)$$

Для определенности будем считать, что решение нужно получить для значений $x > x_0$. В качестве начального значения может быть произвольное x, но чаще всего принимают $x_0 = 0$, что не влияет на разработку численного ме-тода для (2). Заметим, что все численные методы разработаны для решения ОДУ именно первого порядка.

2. Задача Коши для ОДУ n-го порядка:

$$Y^{(n)} = f(x, Y', Y'', ..., Y^{n-1}) \qquad (4)$$

найти $Y = Y(x)$, удовлетворяющую (4) и начальным условиям:

$$Y(x_0) = Y_0; Y'(x_0) = Y_0', ...,$$

$$Y^{(n-1)}(x_0) = Y_0^{(n-1)}$$

где

$$Y_0, Y_0', ..., Y_0^{(n-1)}$$

– есть заданные числа.

3. Задача Коши для системы ДУ:

$$\begin{cases} dY_1/dx &= f_1(x, Y_1, Y_2, ...Y_n) \\ dY_2/dx &= f_2(x, Y_1, Y_2, ...Y_n) \\ \quad\dots & \\ dY_n/dx &= f_n(x, Y_1, Y_2, ...Y_n) \\ \quad. & \end{cases}$$

Задача Коши для системы заключается в отыскании $Y_i(x)$, удовлетворяющих системе и начальным условиям:

$$Y_1(x_0) = Y_{10}; ...; Y_n(x_0) = Y_{n0};$$

Если удается найти общее решение дифференциального уравнения, или системы дифференциальных уравнений, то задача Коши сводится к отысканию значений произвольных постоянных.

II. Программное обеспечение

Прикладное программное обеспечение, разработанное авторами данной работы на основе теории высшей математики о дифференциальных уравнениях, а также базируясь на теоретических сведения математической физики, способно осуществлять отлаженную работу следующих опций, призванных решить некоторые задачи математики:

1. Некторые виды работы с матрицами
2. Решение систем алгебраических уравнений матодом Гаусса-Жордана
3. Аналитическое (символьное) интегрирование некоторых функций
4. Численное решение дифференциальных уравнений первого порядка
   - **Метод Рунге-Кутты.** На его основе могут быть построены разностные схемы разного порядка точности. Идея его реализации стоит в подборе ряда Тейлора при разложении искомой функции $Y = Y(x)$ в окрестностях узлов сетки в плане повышения точности этого разложения, а именно, увеличение числа производных высшего порядка без их непосредственного определения из-за сложности аналитических выражений полных производных по x от функции $f(x, y)$.
   - **Метод Эйлера.** Этот метод основан на разложении искомой функции $Y(x)$ в ряд Тейлора в окрестностях узлов системы $x = x_i$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$, в котором отбрасываются все члены, содержащие производные второго и более высоких порядков. Как правило, используется равномерная сетка

     $$\Delta x = x_{i+1} - x_i = h = \\ = const(i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

   - **Метод Адамса-Башфорта.**
   - **Метод Эйлера-Коши.**
5. Численное решение некоторых систем дифференциальных уравнений
6. Реализация решения ряда дифференциальный уравнений математической физики
7. Построение графиков некоторых математических функций. Построение графиков интегральных кривых

III. Заключение

В конце хотелось бы отметить, что в процессе разработки и модернизации данного проекта, опираясь на теорию дифиренциальных уравнений и математическую физику, был получен многофункциональный программный продукт, который способен с хорошей степенью точности выполнять ряд математических задач, поставленный пользователем.