

УДК 519.6:621.385

## ЧЕТНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛН $E_{0j}$ ТИПА В НЕРЕГУЛЯРНОМ ВОЛНОВОДЕ С КРУГОВЫМ СЕЧЕНИЕМ

М.П. БАТУРА, А.А. КУРАЕВ, Т.Л. ПОПКОВА, А.О. РАК

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 31 мая 2011

Сформулирована система уравнений возбуждения волн  $E_{0j}$  в нерегулярном волноводе с круговым сечением в четной форме (первые производные амплитуд  $E_{0j}$ -волн в ядре системы отсутствуют). Такая форма уравнений позволяет использовать эффективные и сходящиеся четные алгоритмы решения. На широком ряде примеров решения задач для нерегулярных волноводов с сильно различающимися профилями показана эффективность предложенного метода.

*Ключевые слова:* нерегулярные волноводы с круговым сечением, четная форма уравнений возбуждения, четные алгоритмы численного решения.

### Введение

Теория возбуждения волн в нерегулярных волноводах, базирующаяся на методе преобразования координат и проекционном методе, приводит в конечном итоге к двухточечной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно амплитуд связанных нормальных волн в преобразованной системе координат [1–7]. Для нерегулярных волноводов с круговым сечением системы ОДУ для  $H_{0j}$  и  $E_{0j}$  волн (волн с нулевым азимутальным индексом) разделяются, т.е. оказываются независимыми [1–7]. Поэтому задачи возбуждения  $H_{0j}$  и  $E_{0j}$  решаются независимо.

Однако та и другая задача при одинаковом подходе приводит к различающимся по типу системам ОДУ, что необходимо учитывать при численной реализации их решения. Дело в том, что, как показано в [8–10], при четной форме ядра (главных частей) системы ОДУ численные алгоритмы при соответствующей формулировке оказываются устойчивыми, при смешанной же форме устойчивость численных алгоритмов не обеспечена. Под термином «четная форма» понимается, что в главной части ОДУ только четные операции дифференцирования: нулевая (сама функция), вторая производная, четвертая, шестая и т.д. При «смешанной форме» в ОДУ имеются как четные, так и нечетные операции дифференцирования (первая, третья, пятая и т.д.).

При использовании метода преобразования координат и проекционного метода система уравнений Максвелла в преобразованной системе координат обычно приводится к системе уравнений второго порядка относительно расчетного вектора  $\vec{E}'$  за счет исключения  $\vec{H}'$  из уравнений [1, 3, 4]. Такой подход весьма целесообразен для волн  $H_{0j}$ : во-первых, для них  $\vec{E}'$  содержит только одну компоненту  $E_\varphi$ , и краевая задача приводится к скалярной; во-вторых, в этом случае главная часть системы ОДУ при элементарном преобразовании переменных принимает четную форму [1, 3, 4]. Но такой общий подход нецелесообразен для  $E_{0j}$ -волн:  $\vec{E}'$  со-

держит две компоненты ( $E'_\rho$  и  $E'_z$ ), а результирующая система ОДУ не приводится к четной форме.

В предлагаемой статье использован (для формулировки уравнений возбуждения  $E_{0j}$ -волн) целесообразный (в свете изложенных выше соображений) подход: в преобразованной системе исключается  $\vec{E}'$  и строится уравнение второго порядка относительно  $\vec{H}'$ . При таком подходе краевая задача для  $E_{0j}$ -волн становится скалярной ( $\vec{H}'$  имеет только одну компоненту  $\rho H'_\varphi$ ), а результирующая система ОДУ относительно амплитуд нормальных волн приводится к четной форме. Приведенные в статье примеры численного решения задач для  $E_{0j}$  волн иллюстрируют устойчивость численных алгоритмов для решения полученной для  $E_{0j}$  волн системы ОДУ.

Следует также подчеркнуть актуальность формулировки уравнений возбуждения волн  $E_{0j}$  в нерегулярных волноводах с круговым сечением в адекватной для устойчивых численных методов форме, поскольку эти типы волн используются в супермощных черенковских генераторах и усилителях, обеспечивающих создание радиолокационных систем и систем ПРО нового поколения.

### Уравнения Максвелла в преобразованной системе координат

Будем рассматривать продольно-нерегулярный волновод с круговым сечением, внутренняя граница которого задана как  $b(z)$ , где  $b$  – радиус волновода при заданном  $z$ ,  $z$  – продольная координата. Граничное условие на идеально проводящей внутренней поверхности  $b(z)$  задано как

$$\left[ \vec{n} \vec{E} \right]_{r=b(z)} = 0. \quad (1)$$

Проведя преобразование координат (переходим от реальной системы координат  $r, \varphi, z$  к системе  $\rho, \varphi, z$ , где  $\rho = r/b(z)$ ), получаем граничное условие (1) в виде

$$\left[ \vec{n} \vec{E}' \right]_{\rho=1} = 0, \quad (2)$$

а уравнения Максвелла приобретают следующий вид (среда – вакуум) [1, 3, 4]:

$$\text{rot} \vec{H}' = \varepsilon_0 \hat{g} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} + \hat{g} \vec{J}', \quad \text{rot} \vec{E}' = -\mu_0 \hat{g} \frac{\partial \vec{H}'}{\partial t}. \quad (3)$$

Здесь  $\varepsilon_0, \mu_0$  – соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума, а составляющие вспомогательных векторов  $\vec{E}'$ ,  $\vec{H}'$ ,  $\vec{J}'$  следующим образом связаны с ковариантными проекциями  $\vec{E}'$ ,  $\vec{H}'$ ,  $\vec{J}'$  (физические векторы напряженностей электрического и магнитного полей и плотности электрического тока) [1–6]:

$$\vec{E} = E'_\rho \vec{a}^1 + E'_\varphi \rho \vec{a}^2 + E'_z \vec{a}^3, \quad \vec{H} = H'_\rho \vec{a}^1 + H'_\varphi \rho \vec{a}^2 + H'_z \vec{a}^3,$$

$$\vec{J} = J'_\rho \vec{a}^1 + J'_\varphi \rho \vec{a}^2 + J'_z \vec{a}^3,$$

где  $\vec{a}^1, \vec{a}^2, \vec{a}^3$  – система взаимных векторов преобразованной неортогональной системы координат  $\rho, \varphi, z$ :

$$\vec{a}^1 = \frac{\vec{r}_0}{b} - \vec{z}_0 \frac{\rho}{b} \frac{db}{dz}, \quad \vec{a}^2 = \frac{\vec{\varphi}_0}{b\rho}, \quad \vec{a}^3 = \vec{z}_0$$

Метрический тензор  $\hat{g}$  имеет вид [1, 4]:

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & g_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ g_{31} & 0 & g_{33} \end{pmatrix},$$

$$g_{11} = 1 + \rho^2 \left( \frac{db}{dz} \right)^2, \quad g_{13} = -\rho b \left( \frac{db}{dz} \right) = g_{31}, \quad g_{33} = b^2 \quad (4)$$

Соответственно  $\hat{g}^{-1}$  записывается как

$$\hat{g}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & G_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ G_{31} & 0 & G_{33} \end{pmatrix}, \quad G_{13} = G_{31} = \frac{\rho}{b} \frac{db}{dz}, \quad G_{33} = \frac{1}{b^2} + \frac{\rho^2}{b^2} \left( \frac{db}{dz} \right)^2. \quad (5)$$

Исключим теперь из системы уравнений (3)  $\vec{E}'$  и составим уравнение относительно  $\vec{H}'$ :

$$\text{rot}(\hat{g}^{-1} \text{rot} \vec{H}') - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\hat{g} \vec{H}') - \text{rot} \vec{J}' = 0. \quad (6)$$

Полагая, что процесс установившийся и периодический (стационарные режимы релятивистских ЛБВ и ЛОВ), представим искомое решение  $\vec{H}'$  в виде

$$\vec{H}' = \text{Re} \sum_{m=0}^M \dot{\vec{H}}'_m e^{jm\omega t} \quad (7)$$

Теперь обратимся к рассматриваемому нами случаю возбуждения  $E_{0j}$ -волн в волноводе. Тогда  $\dot{\vec{H}}'_m$  с учетом граничного условия задачи (2) можно представить в виде следующего конечного ряда [1–6]:

$$\dot{\vec{H}}'_m = \sum_{i=1}^I \dot{A}_{mi}^M(z) \vec{\Phi}_0 J_1(v_{0i}\rho), \quad J_0(v_{0i}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (8)$$

### Проекционные соотношения и системы ОДУ для $\dot{A}_{mi}^M(z)$ и $\dot{C}_{mi}^M(z)$

Для нахождения системы ОДУ, определяющих амплитуды связанных нормальных волн  $E_{0j}$  воспользуемся проекционным методом Галеркина. Подставим искомое решение (7), (8) в исходную систему (6) и заменим ее эквивалентной ей системой проекционных равенств:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left\{ \text{rot}(\hat{g}^{-1} \text{rot} \dot{\vec{H}}'_m) - m^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \hat{g} \dot{\vec{H}}'_m \right\} \cdot \vec{\Phi}_0 \cdot J_1(v_{0p}\rho) \rho d\rho = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \text{rot} \vec{J}' \cdot \vec{\Phi}_0 \cdot J_1(v_{0p}\rho) \rho d\rho \cdot e^{-jm\omega t} d\omega t = \\ & = \frac{-1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial J'_z}{\partial \rho} - \frac{\partial J'_\rho}{\partial z} \right) \cdot J_1(v_{0p}\rho) \rho d\rho \cdot e^{-jm\omega t} d\omega t = -I_{mp}(z), \end{aligned} \quad (9)$$

$$p = 1, 2, \dots, I, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

После подстановки в (9) формы решения для  $\dot{\vec{H}}'_m$  (8) с учетом (4), (5), получаем систему ОДУ для  $\dot{A}_{mi}^M$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \dot{A}_{mp}^M}{dz^2} + \left( m^2 - \frac{v_{0p}^2}{b^2} \right) \cdot \dot{A}_{mp}^M + \\ & + \frac{1}{h_{pp}} \sum_{i=1}^l \left\{ -\frac{2}{b} \frac{db}{dz} \cdot I_{1pi} \frac{d\dot{A}_{mi}^M}{dz} + \dot{A}_{mi}^M \left[ \left( \frac{3}{b^2} \left( \frac{db}{dz} \right)^2 + \frac{1}{b} \frac{d^2 b}{dz^2} \right) I_{1pi} - \frac{1}{b^2} \frac{db}{dz} \cdot I_{3ip} \right] \right\} = -I_{mp}(z) \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$h_{pp} = \frac{1}{2} J_1^2(v_{0p}),$$

$$I_{1pi} = \int_0^1 J_0(v_{0i}\rho) \cdot J_1(v_{0p}\rho) v_{0i} \rho^2 d\rho,$$

$$I_{3pi} = \int_0^1 J_1(v_{0i}\rho) \cdot J_1(v_{0p}\rho) (v_{0i}\rho)^2 d\rho.$$

Граничные условия к системе ОДУ (10) на регулярных согласованных концах волновода имеют стандартный вид [7].

Система (10), однако, не удовлетворяет поставленной нами задаче, поскольку ее ядро содержит первую производную функции  $\dot{A}_{mp}^M$ , что приводит к неустойчивости вычислительного алгоритма. Поэтому введем замену переменных: положим  $\dot{A}_{mp}^M = b(z) \dot{C}_{mp}^M(z)$ . Тогда система ОДУ для  $\dot{C}_{mp}^M$  принимает требуемую четную форму ядра (главной части):

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \dot{C}_{mp}^M}{dz^2} + \left( m^2 - \frac{v_{0p}^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} \left( \frac{db}{dz} \right)^2 + \frac{2}{b} \frac{d^2 b}{dz^2} - \frac{1}{b^2} \left( \frac{db}{dz} \right) \frac{I_{3pp}}{h_{pp}} \right) \dot{C}_{mp}^M + \\ & + \sum_{i=1, i \neq p}^l \left\{ -\frac{2}{b^2} \frac{db}{dz} \frac{I_{1ip}}{h_{pp}} \left( \frac{db}{dz} \dot{C}_{mi}^M + b \frac{d\dot{C}_{mi}^M}{dz} \right) + \dot{C}_{mi}^M \left[ \left( \frac{3}{b^2} \left( \frac{db}{dz} \right)^2 + \frac{1}{b} \frac{d^2 b}{dz^2} \right) \frac{I_{1ip}}{h_{pp}} - \frac{1}{b^2} \left( \frac{db}{dz} \right) \frac{I_{3ip}}{h_{pp}} \right] \right\} = I_{mp}(z). \end{aligned} \quad (11)$$

Физическая напряженность магнитного поля на частоте  $m\omega$  выражается как  $\vec{H}_m = \vec{\Phi}_0 \dot{H}_{m\varphi}$ , причем

$$\dot{H}_{m\varphi} = \sum_{p=1}^l \dot{C}_{mp}^M(z) \cdot J_1 \left( v_{0p} \frac{r}{b(z)} \right) \cdot e^{jm\omega t},$$

а физическая напряженность  $\vec{E}'_m$  как

$$\begin{aligned} \vec{E}'_m &= \frac{1}{jm\omega \varepsilon_0} \left\{ \vec{z}_0 \frac{\partial(rH_{m\varphi})}{\partial r} - r \frac{\partial \dot{H}_{m\varphi}}{\partial z} - \vec{J}_m e^{jm\omega t} \right\} = \frac{e^{jm\omega t}}{jm\omega \varepsilon_0} \cdot \sum_{p=1}^l \vec{z}_0 \dot{C}_{mp}^M \frac{\gamma_{0p}}{b(z)} \cdot J_0 \left( v_{0p} \frac{r}{b(z)} \right) + \\ & + \frac{e^{jm\omega t}}{jm\omega \varepsilon_0} \sum_{p=1}^l \vec{r}_0 \left( \dot{C}_{mp}^M \cdot J_1' \left( v_{0p} \frac{r}{b(z)} \right) \cdot \frac{rv_{0p}}{b^2(z)} \frac{db}{dz} - \frac{d\dot{C}_{mp}^M}{dz} \cdot J_1 \left( v_{0p} \frac{r}{b(z)} \right) \right) = \\ & = \frac{-je^{jm\omega t}}{m} \cdot \frac{W_0}{k} \cdot \sum_{p=1}^l \vec{z}_0 \dot{C}_{mp}^M \frac{v_{0p}}{b(z)} \cdot J_0 \left( v_{0p} \frac{r}{b(z)} \right) + \\ & + \frac{-je^{jm\omega t}}{m} \cdot \frac{W_0}{k} \cdot \sum_{p=1}^l \vec{r}_0 \left( \dot{C}_{mp}^M \cdot J_1' \left( v_{0p} \frac{r}{b(z)} \right) \cdot \frac{rv_{0p}}{b^2(z)} \frac{db}{dz} - \frac{d\dot{C}_{mp}^M}{dz} \cdot J_1 \left( v_{0p} \frac{r}{b(z)} \right) \right), \end{aligned} \quad (12)$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad W_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}.$$

Уравнения (10)–(12) приведены в размерных единицах длин  $z, b(z)$ . Очевидно, что если левые и правые части этих уравнений умножить на  $1/k^2$ , то величины  $z, b(z)$  в них преобразуются в безразмерные, что, естественно, удобно для выполнения расчетов. В дальнейшем мы условимся без изменения обозначений указанных величин считать, что в уравнениях (10) – (12)

$$b(z) \triangleq kb(z), \quad z \triangleq kz. \quad (13)$$

### Четный алгоритм расчета амплитуд $\dot{C}_{mp}^M$

Четная форма уравнений возбуждения  $E_{0j}$ -волн (11) открывает путь для использования четных алгоритмов пошагового решения этих уравнений, предложенных в [8–10] и апробированных на решении задач возбуждения  $H_{0j}$ -волн [8–10].

Воспользуемся приведенным в [8–10] пошаговым алгоритмом решения четного уравнения для  $H_{0j}$ -волн вида

$$\frac{d^2 \dot{C}}{dz^2} + Q(z) \dot{C} = \dot{f} \quad (14)$$

в следующей форме:

$$\dot{C}_{i+2} = \frac{2\dot{C}_{i+1} - \dot{C}_i}{\tau} - \frac{\dot{C}_{i+1}}{\tau} \cdot h^2 Q_{i+1} + h^2 \frac{\dot{f}_{i+1}}{\tau^2}, \quad (15)$$

где  $\tau > 1$ , число, выбираемое при конкретных расчетах, причем  $\tau \rightarrow 1$  при уменьшении шага интегрирования.

На рис. 1,а приведен профиль  $b(z)$  рассчитываемого волновода ( $I_{mp} = 0$ ), на рис. 1,б – распределения  $|\dot{C}_{1p}^M|$  при числе шагов четного алгоритма  $N = 20000$ . Приемлемая точность достигается уже при  $N = 2000$ .

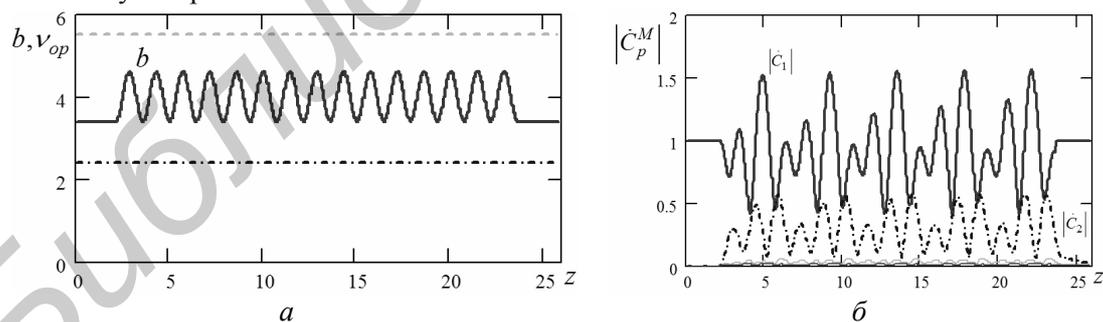


Рис. 1. Расчет поля Е-волны с помощью четного алгоритма: профиль волновода и  $v_{0p}$ :  $\cdots$  –  $v_{01}$ ,  $v_{02}$  –  $\cdots$  (а);

$$|\dot{C}_{1p}^M(z)| \text{ при } N = 20000 : \cdots - p=1; \cdots - p=2; \text{—} - p=3; \text{—} - p=4 \text{ (б)}$$

Рис. 2 иллюстрирует сходимость четного алгоритма при увеличении  $N$ : здесь приведены зависимости максимальной на  $z$  относительной погрешности  $\delta|\dot{C}_{1p}^M|$  и зависимость  $1/\tau_p$  от  $N(p=1,2,\dots)$ .

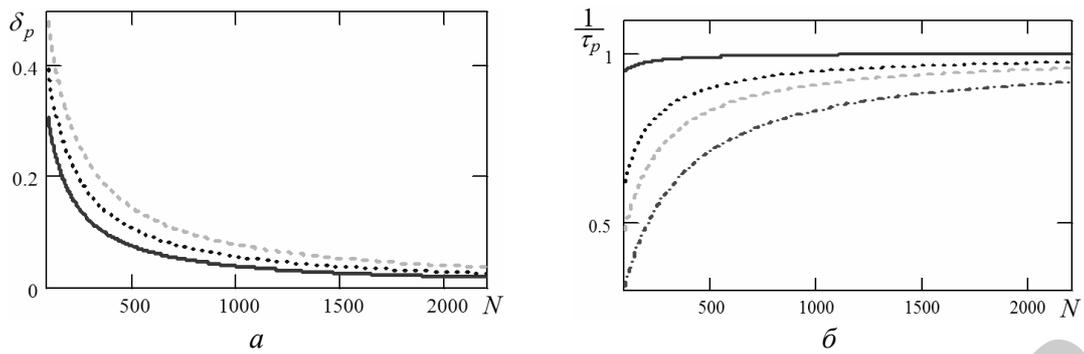


Рис. 2. Сходимость четного алгоритма при увеличении  $N$ :  $\delta_p = \delta_p(N)$  (а);  $\frac{1}{\tau_p}(N)$ ; —  $p=1$ ; ---  $p=2$ ; — —  $p=3$ ; - · -  $p=4$  (б)

Рис. 3 иллюстрирует влияние высших (закритических) волн  $E_{0j}$  на структуру поля в волноводе.

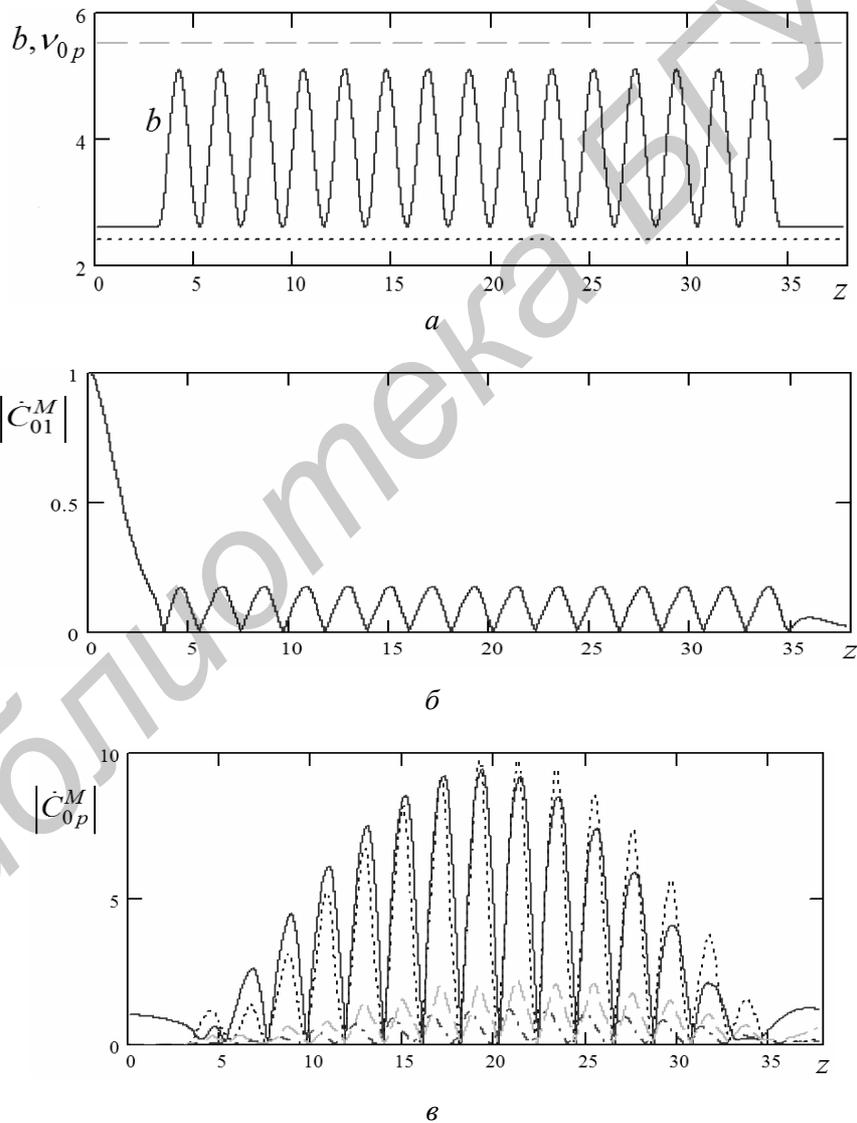


Рис. 3. Влияние высших (закритических) волн  $E_{02}, E_{03}, E_{04}$  на структуру поля в волноводе: профиль волновода  $b(z)$  (а);  $|\dot{C}_{01}^M|$  (б); модовый состав полного поля в волноводе: —  $p=1$ ; ---  $p=2$ ; — —  $p=3$ ; - · -  $p=4$  (в)

На рис. 3,а приведен профиль волновода, на рис 3,б – структура поля, рассчитанная при учете только  $E_{01}$ -моды, на рис 3,в – то же самое, но с учетом закритических  $E_{02}$ ,  $E_{03}$ ,  $E_{04}$ -мод. Расчеты проводились при  $N = 8000$ . Сравнение рис. 3,б и рис. 3,в указывает на существенную роль закритических волн в рассматриваемом (резонансном) случае: их учет очевидным образом необходим.

### Заключение

Приведенные в статье результаты свидетельствуют о целесообразности использования четной формы уравнений возбуждения  $E_{0j}$  волн в нерегулярных волноводах с круговым сечением, позволяющей применять для численного решения задачи эффективные четные алгоритмы, обеспечивающие сходимость решения в отличие от стандартных методов.

## THE EVEN FORM FOR EXCITATION EQUATIONS OF $E_{0j}$ -MODES IN THE IRREGULAR WAVEGUIDES WITH CIRCULAR SECTION

M.P. BATURA, A.A. KURAYEV, T.L. POPKOVA, A.O. RAK

### Abstract

The system of excitation equations of  $E_{0j}$ -modes in the irregular waveguide with circular section is formulated in the even form (the first derivatives of  $E_{0j}$ -modes amplitudes in the core of system are absent). This form of equations allow to use the effective and convergence even algorithms for solutions. The effectiveness of suggested method is corroborated at series of examples of solution of the problems for irregular waveguides with intense remarkable profiles.

### Литература

1. Кураев А.А. // Известия АН БССР. Сер. ФТН. 1979. №1. С. 121–127.
2. Кураев А.А. // Весці НАН Беларусі. Сер. ФТН. 1999. №4. С. 60–65.
3. Кураев А.А. Теория и оптимизация электронных приборов СВЧ. Минск, 1979.
4. Кураев А.А. Мощные приборы СВЧ. Методы анализа и оптимизации параметров. М., 1986.
5. Кураев А.А., Попкова Т.Л., Сеницын А.К. Электродинамика и распространение радиоволн. Мн., 2004.
6. Батура М.П., Кураев А.А., Сеницын А.К. Моделирование и оптимизация мощных электронных приборов СВЧ. Минск, 2006.
7. Батура М.П., Кураев А.А., Сеницын А.К. Основы теории, расчета и оптимизации современных электронных приборов СВЧ. Минск, 2007.
8. Кураев А.А., Попкова Т.Л. // Радиотех. и электрон. Вып. 25. С. 3–9.
9. Кураев А.А., Попкова Т.Л., Рак А.О. // Техника и приборы СВЧ. 2010. №1, С. 19–25.
10. Батура М.П., Кураев А.А., Попкова Т.Л. // Докл. БГУИР. 2010. №8 (54). С. 61–70.