КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ТОНКОЙ ПЛАСТИНКЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ИЗМЕНЕНИЯ ЕЁ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

К.С. Курочка, И.Г. Нестереня
Кафедра информационных технологий,
Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого
Гомель, Республика Беларусь
E-mail: kurochka@gstu.by, igor.nesterenya@gmail.com

Представлена математическая модель, позволяющая учесть изменение температуры пластины, вызванное её деформацией на основе метода конечных элементов. Разработано соответствующее программное обеспечение и проведена его верификация.

Введение

В результате деформации металических конструкций, происходит их нагрев [1]. Поскольку физические свойства материалов зависят от температуры [2], то в ряде случаев при проектирование конструкций, подверженнх воздействию динамической нагрузки, необходимо учитывать изменение температуры, вызванное деформацией. Одним из эффективных методов исследования подобных конструкций, позволяющих учесть все особенности их поведения, является компьютерное моделирование посредством построения и исследования соответствующих математических моделей.

I. Постановка задачи

Действия внешних сил приводят к изменению напряженно-деформированного состоянию [1, 2, 3].

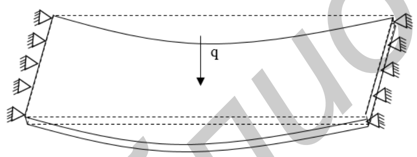

Рис. 1 – Закрепленная пластина под действием нагрузки

Таким образом, при деформации увеличивается внутренняя энергия тела, вызываемая изменением потенциальной энергии, зависящей от взаимного расположения молекул тела [1]. Если деформация упругая, то при снятии нагрузки упругие силы совершают работу. При пластической деформации твердых тел они значительно нагреваются, поскольку тело не восстанавливает свою форму, значит, в соответствии с законом сохранения энергии, часть энергии деформации переходит во внутреннюю энергию, в результате чего происходит увеличение кинетической энергии молекул. Внутренняя кинетическая энергия и есть температура. В этом случае изменение внутренней энергии происходит за счет работы сил, обусловливающих деформацию. Применяя принцип возможных перемещений [4, 5, 6], согласно которому работа внешних сил на возможных перемещениях равна вариации потенциальной энергии записывается в виде:

$$\tilde{A} = \tilde{W}, \tag{1}$$

где A – работа; W – полная потенциальная энергия.

Изменение потенциальной энергии будет соответствовать выражению:

$$W = E + \theta,$$

где E – энергия деформации; θ – энергия нагрева.

Энергия нагрева зависит от внешних источников нагрева и конвекционного обмена, в случае, если пластина теплоизолированная, то на неё не будут действовать внешние тепловые потоки и не будет происходить конвекционный обмен, в таком случае, нагрев пластины будет происходить только в результате перехода энергии деформации во внутреннюю энергию.

Воспользуемся вариационным уравнением Лагранжа в виде [4]:

$$\{R\}\{\tilde{\sigma}\}^T = \int_V \{\sigma\}\{\tilde{\epsilon}\}^T dV, \tag{2}$$

где {R} – вектор узловых усилий.

II. Получение локальной матрицы жесткости

Исследуемая пластинка будет дискретизирована тетраэдальным конечным элементом с 4 узлами, и 12 степенями свободы. Перемещение любого узла в пространстве полностью определяется тремя компонентами u, v и w в направлениях осей координат x, y и z соответственно.

Через перемещения узлов, должна быть выражены матрица напряжений и матрица деформаций [6]. Для изотропного материала при использовании упругих постоянных: модуля упругости G и коэффициента Пуассона ν известны значения элементов матриц [4, 7].

Применяя вариационный принцип Лагранжа (2) и заменяя деформацию и напряжение выраженные через перемещение, имеем [6]:

$$\{R\} = \int_V [B]^T [D][B]\, dV, \qquad (3)$$

где [B] – матрица напряжений, [D] – матрица деформаций.

Проведя математические преобразования в (3), локальная матрица жёсткости будет иметь вид:

$$\{R\} = V[B]^T [D][B].$$

После нахождения матрицы жесткости для каждого конечного элемента, должна быть составлена глобальная матрица жесткости [6]. Должен быть сформирован вектор узловых усилий [4, 5, 6], и заданы граничные условия [4, 6].

III. Нахождение изменения температуры

После того как будут найдены перемещения узлов, можно найти энергию деформации из соотношения [6, 7]:

$$E = \frac{1}{2} \int \{\epsilon\}^T [D]\{\epsilon\}\, dV. \qquad (4)$$

Если выразить деформацию через перемещения узлов, уравнение (4) примет вид :

$$E = \frac{1}{2}\{\delta\}^T [K]\{\delta\},$$

где $\{\delta\}$ – вектор узловых перемещений.

Для определения энергии деформации идущей на изменение внутренней энергии, используется коэффициент, указывающий долю энергии переходящей во внутреннюю η. Найдя изменение внутренней энергии, можно найти изменение температуры. На основании первого закона термодинамики [3], можно найти изменение температуры.

Таким образом, изменение температуры для каждого конечного элемента может быть вычислено из следующего соотношения:

$$\{\Delta T\} = \frac{\eta\{\delta\}^T [K]\{\delta\}}{2C_v},$$

где G_v – удельная теплоемкость.

IV. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим пластинки из различных материалов(толщина – 0,05 м, длина 1 м, ширина – 1 м), закрепленные с двух сторон, находящиеся под действием равномерно-распределенной импульсной нагрузки, с частотой 5 Гц.

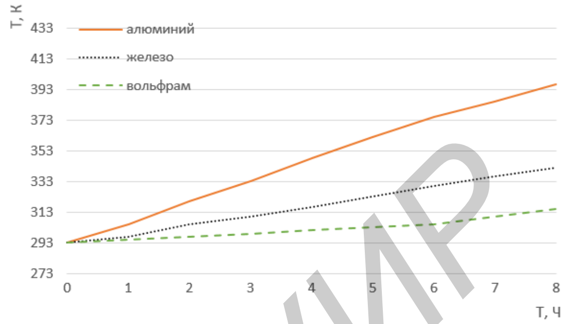

Рис. 2 – Нагрев пластин при действии динамической нагрузки

Анализируя данные приведенные на рис. 2, видно, что длительное воздействие динамической нагрузкой на пластину, вызывает значительный её нагрев, а значит учет изменения температуры является необходимым при проектировании конструкций подверженных динамическому воздействию.

1. Линдау, Л. Д. Теоретическая физика: учебное пособие: для вузов. В 10 т. том 8. Теория упругости / Л. Д. Линдау – Москва, ФизМатЛит, 2003. – 264 с.
2. Зависимость модуля упругости твердого тела от температуры [Электронный ресурс]/ Эффективная физика. – Режим доступа: http://www.effects.ru/science/78/index.htm – Дата доступа: 12.05.2014.
3. Александров, А. В. Основы теории упругости и Пластичности: учебник / А. В. Александров, В. Д. Потапов – Москва: Высшая школа, 1990. – 393 с.
4. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ. / О. Зенкевич, К. Морган – М.: Мир, 1986. – 482 с.
5. Норри, Д. Введение в метод конечных элементов: учебник / Д. Норри, Ж. де Фриз – Москва: Мир, 1981. – 298 с.
6. Zienkiewicz, O. C. The finite element method for solid and structural mechanics. Sixth edition / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. – Oxford : Elsivier, 2005. – 631 p.
7. Потенциальная энергия деформации [Электронный ресурс]/ nuru. – Режим доступа: http://nuru.ru/sopr/010.htm – Дата доступа: 30.05.2014.