ЭЛЕКТРОНИКА, РАДИОФИЗИКА, РАДИОТЕХНИКА, ИНФОРМАТИКА

УДК 517.925, 530.145

О СВЯЗИ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.А. САМОДУРОВ, Е.И. ФЕДОРАКО*

Белорусский государственный университет
пр. Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь

**Белорусский национальный технический университет*
пр. Независимости, 65, Минск, 220027, Беларусь

Поступила в редакцию 18 октября 2011

Используя методы теории непрерывных групп преобразований, исследуется связь между решениями двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Этими уравнениями моделируются конкретные физические процессы.

Ключевые слова: резонансно-усиливающая среда, сверхизлучательная лавина, дифференциальное уравнение, группа преобразований.

В работах [1, 2] получены и исследовались дифференциальные уравнения

$$\ddot{X} + \frac{\tau}{T_1}\dot{X} + 8e^{x} + 2N\left(1 + \frac{\tau}{N}\right) + \frac{2\tau^2}{T_1 T_2} = 0 \qquad (1)$$

и

$$\frac{d^2 y}{d\varepsilon^2} + \frac{1}{T_1\omega}\frac{dy}{d\varepsilon} + 2e^{y} + \frac{2}{T_1 T_2 \omega^2} = 0, \qquad (2)$$

в которых X и y – неизвестные функции, все остальные величины – параметры с конкретными физическими смыслами. Именно, уравнение (2) описывает вынужденный процесс, имеющий место при распространении ультракороткого излучения в резонансно-усиливающей среде с диссипацией, а уравнение (1) описывает явление, происходящее в условиях спонтанного высвечивания (СИЛ – сверхизлучательной лавины в терминологии работ [1, 2]).

Нетрудно заметить, что уравнения (1) и (2) отличаются только величиной коэффициентов, но в них присутствует экспонента от неизвестной функции. Естественно поэтому исследовать общее решение уравнения

$$y'' + f(x)y' + \Phi(y) + F(x) = 0, \qquad (3)$$

где $y(x)$ – искомая функция, $\Phi(y)$ – функция аргумента y, $f(x)$ и $F(x)$ – функции аргумента x, частными случаями которого являются уравнения (1) и (2).

Экспонента от неизвестной функции, входящая в уравнение (3), существенно влияет на вид его решений. Именно, все решения уравнения имеют индивидуальные особенности типа существенно-особых точек, положение и тип которых непосредственно не связаны с особенностями функций-коэффициентов уравнения (3). Это приводит к принципиальным трудностям в численном исследовании математических моделей процессов, описываемых в [1, 2], что особенно видно на примере исследований монографии [3], в которой рассматриваются физически сходные задачи.

Уравнение (3) было исследовано теоретико-групповым методом ([4, 5]). Оказалось, что оно может допускать (и в некоторых случаях допускает) группу преобразований лишь в случае, когда $\Phi\left(y\right)=e^{\mu y}$. Допускаемая группа позволяет по заданным решениям строить семейства новых решений уравнения вида (3).

Целью данного исследования является установление связи между решением одного из уравнений вида (3) и решением другого, структурно близкого к нему уравнения.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} y''+f\left(x\right)y'+Kz+F\left(x\right)=0, \\ z'=zy', \end{cases} \tag{4}$$

где $K=\text{const}\neq 0$, которая связана с уравнением вида (3), т.к. системе удовлетворяет функция $z=e^{y(x)}$, где $y\left(x\right)$ – решение 1-го уравнения системы.

Продифференцировав второе уравнение системы, получим равенство

$$z''=zy'^2+zy''.$$

Проведем исследование системы

$$\begin{cases} y''+f\left(x\right)y'+Kz+F\left(x\right)=0, \\ z''=zy'^2+zy'' \end{cases} \tag{5}$$

теоретико-групповым методом.

Будем искать инфинитезимальный оператор группы, допускаемый данной системой, в виде

$$X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta^1\frac{\partial}{\partial y}+\eta^2\frac{\partial}{\partial z}$$

согласно пособию [6]. Так как система (5) содержит уравнения второго порядка, то будем действовать на нее оператором группы продолженных преобразований $\underset{2}{X}$, который имеет вид

$$\underset{2}{X}=X+\varsigma_1^1\frac{\partial}{\partial y'}+\varsigma_1^2\frac{\partial}{\partial z'}+\varsigma_{11}^1\frac{\partial}{\partial y''}=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta^1\frac{\partial}{\partial y}+\eta^2\frac{\partial}{\partial z}+\varsigma_1^1\frac{\partial}{\partial y'}+\varsigma_1^2\frac{\partial}{\partial z'}+\varsigma_{11}^1\frac{\partial}{\partial y''},$$

где

$$\varsigma_1^1=\eta_x^1+y'\eta_y^1+z'\eta_z^1-y'\left(\xi_x+y'\xi_y+z'\xi_z\right),\ \varsigma_1^2=\eta_x^2+y'\eta_y^2+z'\eta_z^2-z'\left(\xi_x+y'\xi_y+z'\xi_z\right),$$

$$\varsigma_{11}^1=\eta_{xx}^1+y'\eta_{xy}^1+z'\eta_{xz}^1-y'\left(\xi_{xx}+y'\xi_{xy}+z'\xi_{xz}\right)+y'\left(\eta_{xy}^1+y'\eta_{yy}^1+z'\eta_{zy}^1-y'\xi_{xy}-y'^2\xi_{yy}-z'y'\xi_{zy}\right)+$$
$$+y''\left(\eta_y^1-2\xi_x-3y'\xi_y\right).$$

В результате действия оператором $\underset{2}{X}$ на уравнения системы (5), получим следующие инвариантные уравнения:

$$\begin{cases} \xi f'y'+\xi F'+K\eta^2+\varsigma_1^1 f+\varsigma_{11}^1=0, \\ -\eta^2 y'-z\varsigma_1^1+\varsigma_1^2=0. \end{cases} \tag{6}$$

Подставив в 1-е из уравнений системы (6) значения ς_1^1 и ς_{11}^1 и y'' из 1-го уравнения системы (5), имеем

$$\xi f'y' + \xi F' + K\eta^2 + f\left(\eta^1_x + y'\eta^1_y + z'\eta^1_z - y'\left(\xi_x + y'\xi_y + z'\xi_z\right)\right) + \eta^1_{xx} + y'\eta^1_{xy} + z'\eta^1_{xz} -$$
$$-y'\left(\xi_{xx} + y'\xi_{xy} + z'\xi_{xz}\right) + y'\left(\eta^1_{xy} + y'\eta^1_{yy} + z'\eta^1_{zy} - y'\xi_{xy} - y'^2\xi_{yy} - z'y'\xi_{zy}\right) + \qquad (7)$$
$$+\left(-fy' - Kz - F\right)\left(\eta^1_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y\right) = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при переменных z', $z'y'$, y', y'^2, y'^3, y'^2z', z и свободный член уравнения (7), получим систему уравнений

$$\begin{cases} f\eta^1_z + \eta^1_{xz} = 0, \\ -f\xi_z - \xi_{xz} = 0, \\ \xi f' + f\xi_x + \eta^1_{xy} + 3F\xi_y - \xi_{xx} = 0, \\ 2f\xi_y - 2\xi_{xy} + \eta^1_{yy} = 0, \\ \xi_{yy} = 0, \\ \xi_{zy} = 0, \\ -K\eta^1_y + 2K\xi_x = 0, \\ \xi F' + K\eta^2 + f\eta^1_x + \eta^1_{xx} + F\left(2\xi_x - \eta^1_y\right) = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Подставив во 2-е из уравнений системы (6) значения ς^1_1 и ς^2_1, имеем

$$-\eta^2 y' - z\left(\eta^1_x + y'\eta^1_y + z'\eta^1_z - y'\left(\xi_x + y'\xi_y + z'\xi_z\right)\right) + \eta^2_x + y'\eta^2_y + z'\eta^2_z - z'\left(\xi_x + y'\xi_y + z'\xi_z\right) = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при переменных y', y'^2z, zy', zz', $zz'y'$, z', z, $z'y'$, z'^2 и свободный член последнего уравнения, получим систему уравнений

$$\begin{cases} -\eta^2 + \eta^2_y = 0, \\ \xi_y = 0, \\ \eta^1_y - \xi_x = 0, \\ \eta^1_z = 0, \\ \xi_z = 0, \\ \eta^2_z - \xi_x = 0, \\ \eta^2_x = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

При решении систем уравнений (8) и (9) необходимо рассматривать два различных случая:

1) для произвольных функций $f(x)$ и $F(x)$ этим системам удовлетворяют функции $\xi = 0,\ \eta^1 = c_1,\ \eta^2 = 0$, где c_1 – произвольная константа;

2) при условии, что $f(x) = \alpha$, а $F(x) = \gamma$, где α, γ – произвольные константы, указанным системам удовлетворяют функции $\xi = c,\ \eta^1 = c_1,\ \eta^2 = 0$, где c и c_1 – произвольные константы.

С учетом соотношений (6), делаем вывод о том, что система (5) допускает 2 преобразования переменных:

а) при условии, что $f(x) = \alpha,\ F(x) = \gamma$, где α, γ – константы

$x^* = x + c,$

$y^* = y + c_1,$

$z^* = z;$

б) для произвольных функций $f(x)$ и $F(x)$

$x^* = x,$

$y^* = y + c,$

$z^* = z.$

Таким образом доказаны следующие ниже теоремы.

Теорема 1. Если $y_1(x)$ – решение уравнения

$$y'' + \alpha y' + Ke^y + \gamma = 0,$$

то уравнение

$$y'' + \alpha y' + K\mu e^y + \gamma = 0$$

имеет семейство решений $y = y_1(x + c) - \ln\mu$, где c – произвольная постоянная.

Теорема 2. Если $y_1(x)$ – решение уравнения

$$y'' + f(x)y' + Ke^y + F(x) = 0,$$

то уравнение

$$y'' + f(x)y' + K\mu e^y + F(x) = 0$$

имеет решение $y = y_1(x) - \ln\mu$.

Доказанные теоремы позволяют переносить результаты исследований (численных или аналитических) одного из семейств уравнений вида (3) на близкие к нему уравнения.

ON A CONNECTION BETWEEN SOLUTIONS OF TWO NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

A.A. SAMODUROV, H.I. FEDORAKO

Abstract

A connection between solutions of two nonlinear differential equations of the second order is studied. The method of investigations is based on the theory of continuous group of transformations. The studied equations are models of the process of physics.

Литература

1. *Чудновский В.М., Холодкевич Е.Д.* // Физика твердого тела. 1982. Т. 24, №4. С. 1118–1123.
2. *Бондарев И.Р., Чудновский В.М., Самодуров А.А.* // Теоретико-групповые методы в фундаментальной и прикладной физике. 1988. С. 186–194.
3. *Пришивалко А.П.* Оптические и тепловые поля внутри светорассеивающих частиц. Минск, 1983.
4. *Самодуров А.А., Чудновский В.М.* // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, №5. С. 911–913.
5. *Горбузов В.Н., Самодуров А.А.* Уравнения Риккати и Абеля. Гродно, 1986.
6. *Ибрагимов Н.Х.* // Математика. Кибернетика. 1989. №8.