

# РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ЭЛЕМЕНТАМИ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ

Курочка К. С., Стефановский И. Л.  
 Кафедра «Информационные технологии»,  
 Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого  
 Гомель, Республика Беларусь  
 E-mail: kurochka@gst.u.by, igorst@pisem.net

*Изложено приложение метода конечных элементов к расчету открытой тонкой цилиндрической оболочки постоянной толщины, нагруженной по всей поверхности равномерным нормальным давлением, элементами криволинейной формы. Выполнено сравнение результатов расчета с точным решением.*

## ВВЕДЕНИЕ

Для решения многих практических задач строительной механики используются приближенные методы. Одним из часто применяемых методов является метод конечных элементов [1].

Тонкостенные элементы конструкций обеспечивают высокую прочность и надежность сооружений при легкости, что обеспечило широкую распространенность в современной технике [2].

Рассмотрим изгиб открытой круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины, нагруженной по всей поверхности равномерным нормальным давлением.

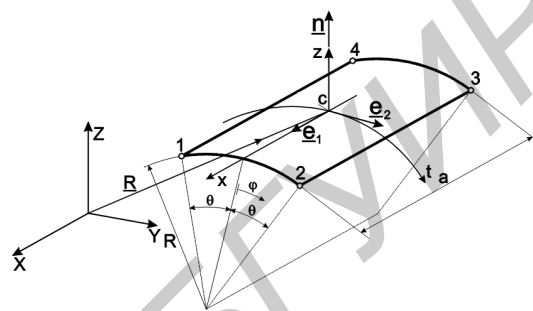


Рис. 1 – Криволинейный элемент оболочки

Будем использовать элементы с четырьмя узлами по 6 степеней свободы в каждом узле. Соответственно, векторы перемещений и углов поворота в точке срединной поверхности:

$$u^T = [ u \quad v \quad w ],$$

$$\beta^T = [ \beta_1 \quad \beta_2 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} ].$$

Деформации и изменения кривизны:

$$\epsilon^T = [ \epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad 2\gamma_{12} ],$$

$$k^T = [ k_{11} \quad k_{22} \quad 2k_{12} ].$$

Силы и моменты:

$$N^T = [ N_{11} \quad N_{22} \quad N_{12} ],$$

$$M^T = [ M_{11} \quad M_{22} \quad M_{12} ].$$

Векторы поверхностных нагрузок и сосредоточенных сил и моментов:

$$p^T = [ p_1 \quad p_2 \quad p_3 ],$$

$$\rho_N^T = [ N_1 \quad N_2 \quad -Q ],$$

$$\rho_M^T = [ M_1 \quad M_2 \quad 0 ],$$

где  $p$  содержит распределенную нагрузку в направлении координатных линий  $x$  и  $\varphi$ , а также распределенную нагрузку перпендикулярную срединной плоскости оболочки;  $\rho_N$  и  $\rho_M$  — содержат сосредоточенные в узлах силы и моменты.

## I. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ

Решение данной задачи будем искать методом конечных элементов. Для моделирования оболочек с использованием МКЭ как правило используются следующие виды оболочечных элементов [3]:

1. плоские;
2. криволинейные;
3. усеченные.

Поведение непрерывной криволинейной поверхности может быть достаточно точно аппроксимировано плоскими элементами малого размера. Однако, такие элементы не в состоянии точно описать геометрию криволинейной поверхности, что увеличивает размер конечно-элементной сетки, приводящей к увеличению объема вычислений. Более перспективными являются криволинейные элементы, представляющие геометрию оболочки более точно, что позволяет добиться более точных результатов при менее густой сетке.

Для решения поставленной задачи рассмотрим элемент оболочки в криволинейной системе координат, с координатными линиями  $x$  и  $\varphi$ :

Согласно вариационному принципу Лагранжа задача решается в перемещениях, с минимизацией потенциальной энергии системы оболочки (1). После определения перемещений, возможно вычисление компонентов тензоров деформаций и напряжений. Материал оболочки выбран изотропный, однородный и упругий. Вектор поперечных сил и моментов:

$$N = tC^{str}\varepsilon,$$

$$M = \frac{t^3}{12}C^{str}k,$$

где

$$C^{str} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

В качестве системы координат выберем цилиндрическую, для которой коэффициенты Ляме  $H_1=1$ ,  $H_2=R$ ; радиусы кривизны  $R_1=\infty$ ,  $R_2=R$ .

## II. АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Конечные элементы оболочек очень чувствительны к точности представления движения как жесткого целого [4]. Сходимость метода конечных элементов определяется способностью приближенных выражений для деформаций представлять произвольное деформированное состояние [5]. Чаще ограничиваются требованием к нулевому и постоянному слагаемым в выражениях для деформаций, которые представляют движение элемента как жесткого целого и постоянного напряженного состояния [4]. Для точного представления жестких смещений необходимо, чтобы функции аппроксимирующие перемещения содержали их точные выражения. Использование чисто полиномиальных выражений для перемещений позволяет лишь приближенно представить жесткие смещения. Перемещение элемента тела как твердого целого аппроксимируется с использованием функций (2), (3), (4). Для аппроксимации деформаций используются полиномы (5), (6), (7). Компоненты полного вектора перемещений:

$$u = u_0 + u_1,$$

$$v = v_0 + v_1,$$

$$w = w_0 + w_1.$$

## III. РЕЗУЛЬТАТЫ

Для верификации представленной модели рассмотрена задача определения напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки радиусом  $R=1$  м, длиной 10 м, толщиной 0,01 м, изготовленной из стали с модулем упругости  $E=3 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>, коэффициентом Пуассона  $\mu=0,3$ , под действием внешнего равномерного нормального давления. Края оболочки свободны. Точное решение [2] составило  $4,250 \cdot 10^{-7}$  м.

Результаты расчета представлены в таблице.

Таблица 1 – Результаты расчета

Размер сетки	12x4	24x8	48x20
W ( $\times 10^{-7}$ м)	4.14	4.22	4.24
Погрешность(%)	2.5	0.6	0.1

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты показали, что с увеличением количества конечных элементов приближенные решения стремятся к точным [2]. Количество элементов варьировалось по окружности от 12 до 48, по длине оболочки от 4 до 20. Погрешность составила от 0,1 % до 2,5 %.

## IV. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голованов, А. И. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек / А. И. Голованов, М. С. Корнишин. – Казань, 1990. – 269 с.
2. Тимошенко, С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 635 с.
3. Chapelle, D. The Finite Element Analysis of Shells – Fundamentals / D. Chapelle, K-J Bathe. – Berlin.: Springer, 2009. – 426 p.
4. Gallagher, R. H. Finite element representations for thin shell instability analysis // Bucking of Structures, Cambridge.: 1974. – 51 p.
5. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике – М.: Мир, 1975. – 541 с.

$$P_e = \frac{1}{2} \int_A (\varepsilon^T N + k^T M) H_1 H_2 dq_1 dq_2 - \int_A u^T p H_1 H_2 dq_1 dq_2 - \int_S (u^T \rho_N + \beta^T \rho_M) dS \quad (1)$$

$$u_0 = a_1 + a_2 R (\cos \varphi - \cos \theta) - a_3 R \sin \varphi \quad (2)$$

$$v_0 = -a_2 x \sin \varphi + a_3 x \cos \varphi + a_4 R (\cos \varphi \cos \theta - 1) - a_5 \sin \varphi + a_6 \cos \varphi \quad (3)$$

$$w_0 = a_2 x \cos \varphi + a_3 x \sin \varphi + a_4 R \sin \varphi \cos \varphi + a_5 \cos \varphi + a_6 \sin \varphi \quad (4)$$

$$u_1 = a_7 x + a_8 \varphi + a_9 x \varphi \quad (5)$$

$$v_1 = a_{10} \varphi + a_{11} x \varphi \quad (6)$$

$$w_1 = a_{12} x^2 + a_{13} x \varphi + a_{14} \varphi^2 + a_{15} x^3 + a_{16} x^2 \varphi + a_{17} x \varphi^2 + a_{18} \varphi^3 + a_{19} x^3 \varphi + a_{20} x^2 \varphi^2 + a_{21} x \varphi^3 + a_{22} x^3 \varphi^2 + a_{23} x^2 \varphi^3 + a_{24} x^3 \varphi^3 \quad (7)$$