

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА СМАЧИВАНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Олиферович Н. М., Гринюк Д. А., Оробей И. О.

Кафедра автоматизации технологических процессов и электротехники, Белорусский государственный технологический университет
Минск, Республика Беларусь
E-mail: bogosnadya@ Rambler.ru

Для оптимального управления процессами смачивания необходимо получение законов, описывающих данное явление. Авторами было разработано устройство, которое позволяет по нарастанию емкости конденсатора определять время капиллярного впитывания тестовой бумагой. Конструкция первичного преобразователя данного прибора предусматривает радиальное или вертикальное распространение фронта смачивания. Для интерпретации показаний прибора необходима математическая модель, которая отображает зависимость изменения площади поверхности смоченной бумаги от времени. В данной работе представлена модель, полученная для случая вертикального распространения фронта.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование поверхностных явлений на границах раздела способствует интенсификации известных и созданию новых технологических процессов для высокодисперсных систем. Большое значение приобретает исследование явлений на границе раздела твердого тела с жидкостью. Эти эффекты являются начальными и существенными стадиями разных технологических процессов. Разработка математических моделей смачивания твердого тела открывает новые возможности управления этими процессами [1-3].

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Оценку динамики процесса впитывания можно производить по наблюдению за процессом пропитки фильтровальной бумаги с заранее известными свойствами. Рассмотрим вариант движения жидкости по капиллярам пористого тела в вертикальной плоскости (см.рис. 1).

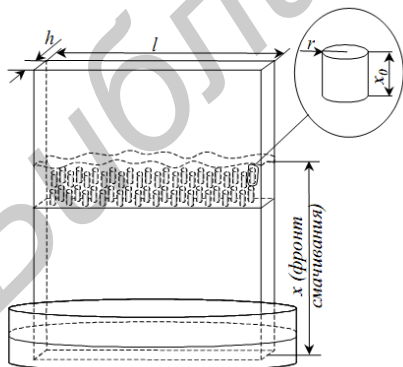


Рис. 1 – Геометрические параметры измерительного преобразователя

Образец фильтровальной бумаги имеет толщину h , ширину l , с основным эффективным размером капилляра r . Согласно пористости γ на 1 метр длины помещается n капилляров радиусом r .

Вклад силы поверхностного натяжения одного капилляра имеет вид [4]:

$$f_{1,r} = 2\pi r (\sigma_{12} - \sigma_{13}), \quad (1)$$

где σ_{12}, σ_{13} – межфазное натяжение «твердое тело – газ» и «твердое тело – жидкость» соответственно.

Эта сила определяется количеством капилляров, приходящимся на периметр текущего распространения фронта, т.е.

$$f_1 = 2\pi r (\sigma_{12} - \sigma_{13}) l n h n, \quad (2)$$

где n – количество капилляров по фронту распространения жидкости. n через величину пористости материала γ выражается в виде:

$$\gamma = V_{nn}/V_0, \quad (3)$$

где $V_{nn} = x h l n^2 \pi r^2$ – объем порового пространства по фронту распространения жидкости, $V_0 = x h l$ – объем образца, смоченный жидкостью. Тогда формула (3) примет вид:

$$\gamma = \frac{x y l n^2 \pi r^2}{x y l} = n^2 \pi r^2.$$

Выразив n и подставив в (2), получим:

$$f_1 = 2\pi r (\sigma_{12} - \sigma_{13}) \frac{l h \gamma}{r^2 \pi} = \frac{2 l h \gamma}{r} (\sigma_{12} - \sigma_{13}) = A_1,$$

где

$$A_1 = \frac{2 l h \gamma}{r} (\sigma_{12} - \sigma_{13}) \quad (4)$$

коэффициент, который определяется параметрами бумаги (толщиной, пористостью и размерами пор), а также коэффициентами межфазного натяжения «твердое тело – газ» и «твердое тело – жидкость». Из полученного результата видно, что вклад силы поверхностного натяжения является величиной постоянной и не будет зависеть от уровня подъема фронта смачивания x .

Действие силы тяжести будет определять давление жидкости $\rho g x$, которая перемещается

по капиллярам фильтровальной бумаги, где ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, x – уровень подъема фронта смачивания. Эта сила будет замедлять процесс впитывания, ее вклад можно представить:

$$f_2 = PS = \rho g x S, \quad (5)$$

где S – суммарная площадь этих капилляров. S можно рассчитать по формуле:

$$S = nhnl\pi r^2 = n^2 hl\pi r^2 = \frac{\gamma}{r^2 \pi} hl\pi r^2 = hl\gamma.$$

Окончательно выражение для действия силы тяжести примет вид:

$$f_2 = \rho g x \gamma hl = x C_1,$$

где

$$C_1 = \rho g \gamma hl. \quad (6)$$

При расчете динамики впитывания для учета влияния движения жидкости в капиллярах принимают условие о квазистационарном течении (т. е. для больших времен t) и пользуются формулой Пуазейля:

$$f_3 = -8\pi\eta x \dot{x}. \quad (7)$$

Используем следующую систему построения капилляров в бумаге (см. рис. 2).

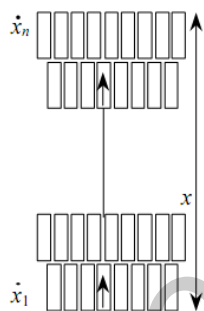


Рис. 2 – Система построения капилляров при вертикальном распространении жидкости

Отдельные капилляры одинаковы, имеют длину x_0 и сечение S_r , причем количество капилляров в каждом из рядов одинаково. Исходя из формулы Пуазейля для одиночного капилляра

$$f_{3,r} = -8\pi\eta x_0 \dot{x}. \quad (8)$$

Сила вязкого течения для всего смоченного участка бумаги определяется суммой вкладов каждого ряда в силу вязкого течения:

$$f_3 = \sum f_{3,r,i} = -\frac{8\eta\gamma hl}{r^2} x \dot{x} = -D_1 x \dot{x},$$

где

$$D_1 = \frac{8\eta\gamma hl}{r^2}. \quad (9)$$

Равнодействующая трех сил

$$f = f_1 - f_2 + f_3 = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \frac{dm}{dt}\dot{x} + m\ddot{x}. \quad (10)$$

Величина m будет определяться количеством жидкости в капиллярах. Вследствие того, что скорость и ускорение будут неравномерными, и с удалением от края будут уменьшаться,

из закона сохранения момента импульса следует, что необходимо учитывать массу только тех капилляров, которые соприкасаются непосредственно с сосудом. Т.е

$$m = \rho V = \rho l h n^2 x \pi r^2 = \rho l h \frac{\gamma}{r^2 \pi} x \pi r^2 = \rho l h \gamma x = F_1 x,$$

где

$$F_1 = \rho l h \gamma. \quad (11)$$

Тогда

$$\frac{dm}{dt} = F_1 \dot{x}. \quad (12)$$

Подставив значения сил f_1 , f_2 , f_3 , а также выражение, полученное для массы m , в уравнение (10), получим:

$$A_1 - x C_1 - D_1 x \dot{x} = F_1 \dot{x}^2 + F_1 x \ddot{x}.$$

Преобразуем полученное выражение:

$$\ddot{x} = -\frac{D_1}{F_1} \dot{x} - \frac{\dot{x}^2}{x} + \frac{1}{x} \frac{A_1}{F_1} - \frac{C_1}{F_1}$$

Подставив значения коэффициентов (4), (6), (9), (11), получим:

$$\ddot{x} = -\frac{8\eta}{r^2 \rho} \dot{x} - \frac{\dot{x}^2}{x} + \frac{1}{x} \frac{2\Delta\sigma}{r\rho} - g$$

или

$$\ddot{x} = -b_0 \dot{x} - \frac{\dot{x}^2}{x} + \frac{1}{x} b_1 - b_2.$$

Выполнив подстановку

$$x = \exp(y); \quad \dot{x} = \dot{y} \exp(y); \quad \ddot{x} = \ddot{y} \exp(y) + \dot{y}^2 \exp(y),$$

получим:

$$\ddot{y} = -b_0 \dot{y} - 2\dot{y}^2 + \frac{1}{\exp(2y)} b_1 - \frac{b_2}{\exp(y)}. \quad (13)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение полученного нелинейного дифференциального уравнения (13) позволяет получить зависимость фронта распространения смоченной поверхности бумаги от времени при вертикальном расположении образца. Полученная модель может быть использована для интерпретации показаний прибора непрерывного измерения процесса смачивания [5] при использовании первичного преобразователя с вертикальным распространением фронта смачивания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сумм, Б. Д. Физико-химические основы смачивания и растекания / Б. Д. Сумм, Ю. В. Горюнов – М.: Химия, 1976. – 232 с.
2. Быховский, А. И. Растекание / А. И. Быховский. – Киев: Наук. думка, 1983. – 192 с.
3. Washburn, E. W. The dynamics of capillary flow / E. W. Washburn // – Phys. Rev. – 1921. №17. – P. 273-283.
4. Дерягин, Б. В. Скольжение жидкостей в капиллярах / Б. В. Дерягин, Н. Н. Федякин // Докл. АН СССР. – 1968. – № 6, с. 1300–1302.
5. Гринюк, Д. А. Устройство непрерывного измерения процесса смачивания / Д. А. Гринюк, И. О. Оробей, Н. М. Богослав // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. – 2011. – Вып. XVIII. – С.108–112.