

ПАРАУНИТАРНЫЙ БАНК ФИЛЬТРОВ БЕЗ ПОТЕРЬ С ЛИНЕЙНОЙ ФЧХ НА ОСНОВЕ DSP48 БЛОКОВ В FPGA АРХИТЕКТУРЕ

Н.А. Петровский

Кафедра электронных вычислительных средств,
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Минск, Республика Беларусь
E-mail: nick@petrovsky.eu

Предлагается реализация умножителя кватернионов – базового элемента параунитарного банка фильтров с линейной ФЧХ на основе алгебры кватернионов. Умножитель реализован на лестничной схеме. Показана архитектура на основе DSP48 блоков для FPGA Spartan 6, приведены аппаратные затраты ПЛИС и АЧХ результирующей системы.

ВВЕДЕНИЕ

Алгебра кватернионов \mathbb{H} является ассоциативной некоммутативной четырёхмерной алгеброй $\mathbb{H} = \{\mathbf{q} = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k | q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}\}$, где ортогональные мнимые части подчиняются следующим законам умножения: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$. В параунитарных банках фильтров, операция умножения кватерниона переменной \mathbf{x} на кватернион константу \mathbf{q} играет доминирующую роль.

Существует две матрицы умножения кватернионов справа $\mathbf{M}^-(q)$ и слева $\mathbf{M}^+(q)$, связанные следующими соотношениями $\mathbf{M}^\mp(q) = \mathbf{D}_C \mathbf{M}^\pm(\bar{q}) \mathbf{D}_C$, где $\bar{q} = q_1 - q_2i - q_3j - q_4k$ определяет сопряжённый кватернион, $\mathbf{D}_C = \text{diag}(1, -\mathbf{I}_3)$ – оператор гиперкомплексного сопряжения $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{D}_C \mathbf{q}$. Параунитарный банк фильтров (ПУБФ) без потерь представляют основу многополосного вейвлет преобразования для частотного разделения мультимедиа данных. Для числа каналов больше двух линейность ФЧХ соблюдается, лестничные и решетчатые структуры также сохраняют свойство перфективной реконструкции входного сигнала, что даёт возможность использовать арифметику с фиксированной запятой [1].

В данной работе предлагается схема умножителя кватернионов на основе лестничной структуры для случая вырожденного кватерниона.

I. ПАРАУНИТАРНЫЙ БАНК ФИЛЬТРОВ В АЛГЕБРЕ КВАТЕРНИОНОВ С ЛИНЕЙНОЙ ФЧХ

Передаточные характеристики ПУБФ с линейной АЧХ для системы анализа запишутся следующим образом:

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{G}_N(z) \mathbf{G}_{N-1}(z) \dots \mathbf{G}_1(z) \mathbf{E}_0, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_0 \mathbf{W} \text{diag}(\mathbf{I}_2, \mathbf{J}_2),$$

$$\mathbf{G}_i(z) = \frac{1}{2} \Phi_i \mathbf{W} \Lambda(z) \mathbf{W}, \quad \text{при } i = 1, \dots, N,$$

$$\Lambda(z) = \text{diag}(\mathbf{I}_2, z^{-1} \mathbf{I}_2),$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_2 & -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_0 = \mathbf{M}^+(P_0) \mathbf{M}^-(Q_0),$$

$$\Phi_i = \mathbf{M}^+(P_i), \quad \text{при } i = 1, \dots, N.$$

ПУБФ с линейной ФЧХ для системы синтеза на кватернионах определяет факторизация матрицы $\hat{\mathbf{D}}(z)$:

$$\hat{\mathbf{D}}(z) = \hat{\mathbf{E}}_0(z) \hat{\mathbf{G}}_0(z) \dots \hat{\mathbf{G}}_{N-1}(z) \hat{\mathbf{G}}_N, \quad (2)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{diag}(\mathbf{I}_2, \mathbf{J}_2) \mathbf{W} \hat{\Phi}_0,$$

$$\hat{\mathbf{G}}_i(z) = \frac{1}{2} \mathbf{W} \hat{\Lambda}(z) \mathbf{W} \hat{\Phi}_i, \quad \text{при } i = 1, \dots, N,$$

$$\hat{\Lambda}(z) = \text{diag}(z^{-1} \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_2),$$

$$\hat{\Phi}_0 = \mathbf{M}^+(\bar{Q}_0) \mathbf{M}^-(\bar{P}_0),$$

$$\hat{\Phi}_i = \mathbf{M}^-(\bar{P}_i), \quad \text{при } i = 1, \dots, N.$$

Для $N = 3$ коэффициенты ПУБФ для длины слова L приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Коэффициенты банка фильтров анализа с линейной ФЧХ

Коэф.	$Re()$	$Im_i()$	$Im_j()$	$Im_k()$	L
Q_0	-231/512	459/1024	0	0	11
P_0	-7/8	-3/8	0	0	4
P_1	-3/16	15/16	0	0	5
P_2	-9/16	-13/16	0	0	5

АЧХ системы анализа для реализации с фиксированной точкой (разрядность системы 16) показана на рис. 1

Коэффициенты, указанные в таблице 1, представляют из себя вырожденные кватернионы с нулевыми мнимыми частями j и k , операция умножения может быть упрощена для таких значений.

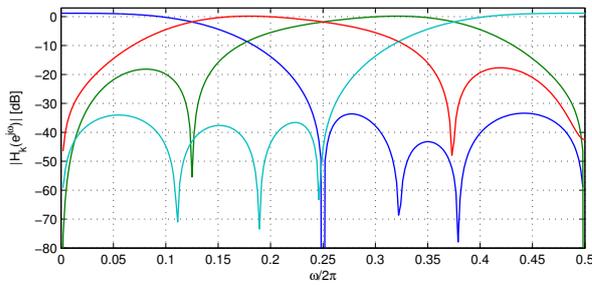


Рис. 1 – АЧХ системы анализа 4-х канального ПУБФ в алгебре кватернионов с линейной фазой.

II. ЛЕСТНИЧНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ УМНОЖИТЕЛЯ ПУБФ

Для практической реализации лестничной структуры умножителя, в случае множителей показанных в таблице 1, где мнимые части j и k равны нулю, факторизация может быть упрощена в сравнении с известной [1]. Умножение на такой кватернион эквивалентно параллельному комплексному умножению компонентов Re , $Im(i)$ и $Im(j)$, $Im(k)$ на ненулевые коэффициенты \mathbf{q} .

Перейдя к полярной системе координат $e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$ для $\phi \neq 0$ можно определить вращение Гивенса в матричном виде:

$$e^{j\phi} x = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}(\phi)} \underbrace{\begin{bmatrix} \text{Re}(x) \\ \text{Im}(x) \end{bmatrix}}_x, \quad (3)$$

где матрица $\mathbf{R}(\phi)$ описывает геометрическое вращение на плоскости, которую можно определить в виде 3-х шаговой лестничной факторизации:

$$\mathbf{R}(\phi) = \zeta \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где t_1 и t_2 определяются следующим образом:

$$t_1 = \frac{\cos\phi - \zeta}{\sin\phi}, \quad t_2 = \zeta \sin\phi. \quad (5)$$

Выбирая ζ согласно (6), можно выполнить вращение на любой угол ϕ :

$$\zeta = \begin{cases} 1, & \phi \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi) \\ -1, & \phi \in (\pi/2, 3\pi/2) \end{cases}. \quad (6)$$

Для реализации умножения на сопряженный множитель $\bar{\mathbf{q}}$ достаточно изменить знаки t_1 и t_2 .

III. FPGA РЕАЛИЗАЦИЯ ОПЕРАЦИИ ГИПЕРКОМПЛЕКСНОГО УМНОЖЕНИЯ НА ВЫРОЖДЕННЫЙ КВАТЕРНИОН

Умножение действительных чисел на кристалле XC6SLX45T серии Spartan-6 выполнено на встроенных DSP блоках DSP48A1. Схема прямой и обратной лестничной структуры показана на рис. 2. Из-за параллельной структуры и высокой производительности умножителя к остальной системе возможно использовать только 3 MAC структуры с последовательным режимом передачи исходных данных.

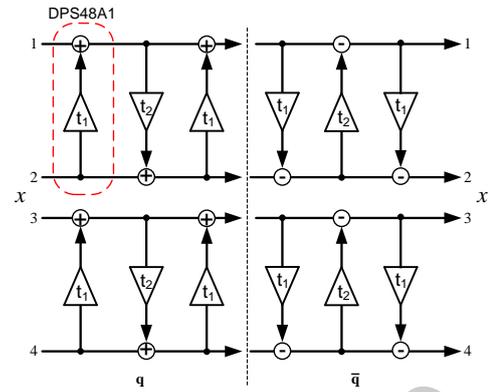


Рис. 2 – Схема умножителя кватернионов для вырожденного кватерниона константы $\bar{\mathbf{q}}$

На рис. 3 приведена результирующая АЧХ ПУБФ системы анализ-синтез для разрядности 18 подтверждающая свойство совершенной реконструкции сигнала.

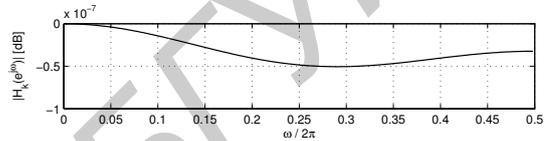


Рис. 3 – АЧХ системы анализ-синтез 4-х канального ПУБФ в алгебре кватернионов с линейной фазой для разрядности системы 18 бит.

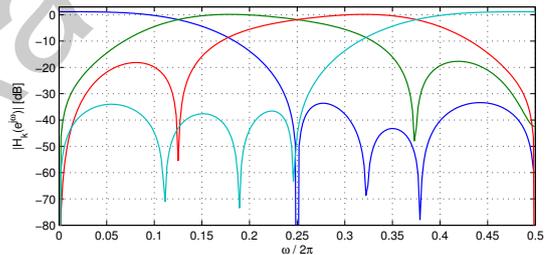


Рис. 4 – АЧХ системы анализа 4-х канального ПУБФ в алгебре кватернионов с линейной фазой для разрядности системы 18 бит.

Полученная АЧХ 4-х канального ПУБФ (рис. 4) показывает соответствие системы условию регулярности 1-ого рода. В отличие от решения [2] система обладает большей производительностью и оптимизацией для кристаллов ПЛИС фирмы Xilinx.

Аппаратные затраты ПЛИС показаны в таблице 2.

Таблица 2 – Аппаратные затраты умножителя

f_{clk} (МГц)	Slice Registers	Slice LUTs	LUT-FF	DSP48
280	612	272	272	6

- Parfieniuk, M. Quaternion multiplier inspired by the lifting implementation of plane rotations / M. Parfieniuk, A. Petrovsky // *IEEE Trans. Circuits Syst. I.* – Oct. 2010. – Vol. 90, № 10. – P. 2708–2717.
- Petrovsky, N. The CORDIC-inside-Lifting Architecture for Constant-Coefficient Hardware Quaternion Multipliers / N. Petrovsky, M. Parfieniuk // *International Conference on Signals and Electronic Systems (ICSES'2012)* – Sep. 2012. – Wroclaw, Poland – 6 P.