

УДК 621.317.846

## ФОРМУЛА ПЕТЛИ ГИСТЕРЕЗИСА

В.М. ИЛЬИН

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 24 января 2011

Получена формула петли гистерезиса, основанная на использовании нетрадиционного решения квадратных уравнений с вещественными коэффициентами. Это позволяет по-новому описать ординаты неоднозначных характеристик, упростить и повысить точность учета гистерезиса.

*Ключевые слова:* петли гистерезиса, границы участков, петли тригонометрических функций.

### Введение

Для получения формулы применены понятия: 1) особые значения аргумента  $h$ ; 2) части петли гистерезиса I–IV (см. рис. 1 и 2); 3) участки ветвей петли. Особые значения аргумента  $h$  – это  $0, \pm h_c, \pm 1$ . Им соответствуют ординаты ветвей, обычно применяющиеся при описании ферромагнетиков. Четыре части петли выделены между вертикалями, проходящими через особые значения  $h$  и охватывают всю площадь петли с учетом ее симметрии (см. рис. 1 и 2). Участки ветвей, (их восемь), ограничиваются теми же вертикалями, что разделяют ветви на закономерные составные части.

При перемагничивании ферромагнетика магнитодвижущей силой  $h$  степень его намагничивания, т.е. интенсивность ориентации его доменов в положительном или отрицательном направлении, отображается величиной и знаком ординат петли гистерезиса. Причем только два ее участка (из восьми) отображают процесс намагничивания ферромагнетика – рост его индукции  $b$ .

Первый участок соответствует росту  $h$  от  $h_c$  до 1, порождает нелинейный рост индукции от 0 до 1 (рис. 2). Это синусный участок – один из четырех синусных участков, входящих в нижнюю ветвь петли гистерезиса. Три предшествующих ему синусных участка соответствуют изменению  $h$  от  $-1$  до  $+h_c$ , т.е. снижению индукции от  $-1$  до 0 и отображают процесс размагничивания ферромагнетика.

Второй участок намагничивания имеет место при росте  $h$  в отрицательном направлении от  $-h_c$  до  $-1$ . Ему соответствует рост индукции от 0 до  $-1$ . Это косинусный участок – один из четырех косинусных участков – принадлежащих верхней ветви петли. Три предшествующих ему косинусных участка соответствуют изменению  $h$  от 1 до  $-h_c$ , т.е. снижению индукции от 1 до 0, также отображают размагничивание ферромагнетика (рис. 2).

Таким образом, перемагничивание ферромагнетика осуществляется в следующем порядке: если  $h$  возрастает от  $h_c$  до 1, индукция нелинейно растет от 0 до 1, ферромагнетик намагничивается в положительном направлении. Затем при изменении  $h$  от 1 до  $-h_c$  индукция, сохраняя свое положительное направление, убывает от 1 до 0 – ферромагнетик полностью размагничивается (рис. 4). Далее при изменении  $h$  от  $-h_c$  до  $-1$  индукция возрастает от 0 до  $-1$  – ферромагнетик намагничивается в отрицательном направлении. После этого при изменении  $h$  от  $-1$  до  $h_c$  индукция, сохраняя свое отрицательное направление, убывает от  $-1$  до 0 – ферромагнетик опять полностью размагничивается (рис. 4). Далее все повторяется. При этом для

всех петель проявляются закономерности: намагничивание ферромагнетика в положительном или отрицательном направлении (синусный или косинусный участок) осуществляется в пределах только одной части петли гистерезиса (I или IV), а его размагничивание производится в трех частях (I, II, III или IV, III, II), при этом изменение направления индукции происходит только в особых точках  $\pm h_c$  (рис. 2).

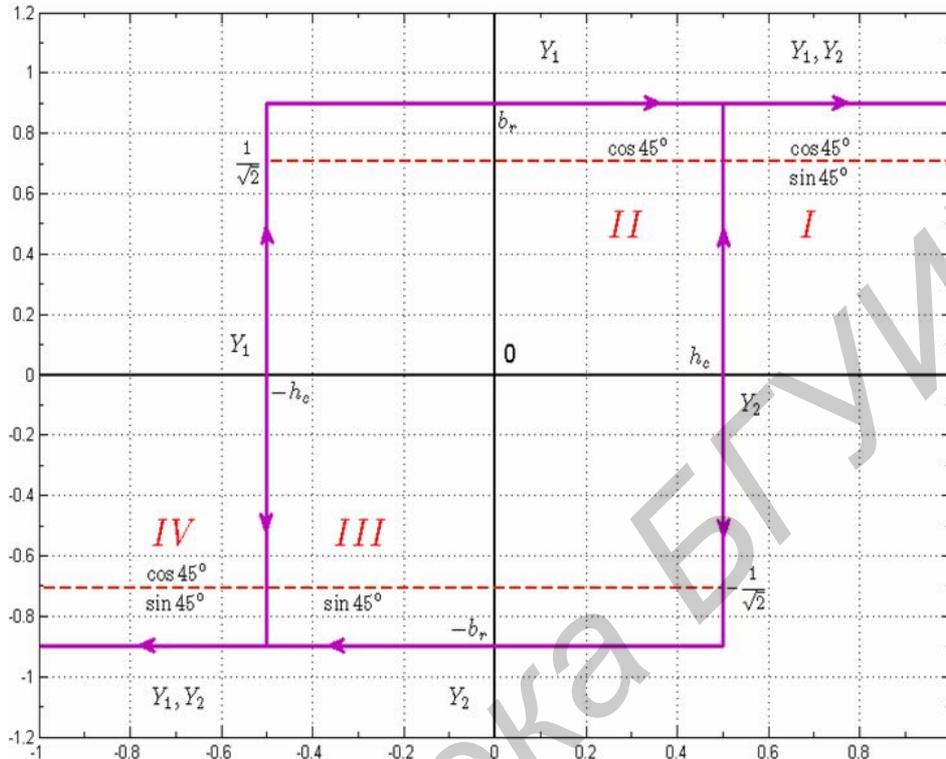


Рис. 1. Идеальная нормированная прямоугольная характеристика с ее геометрическими ( $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $\pm h_c$ ,  $\pm b_r$ ) и тригонометрическими ( $A$ ,  $\cos 45^\circ$ ,  $\sin 45^\circ$ ) параметрами

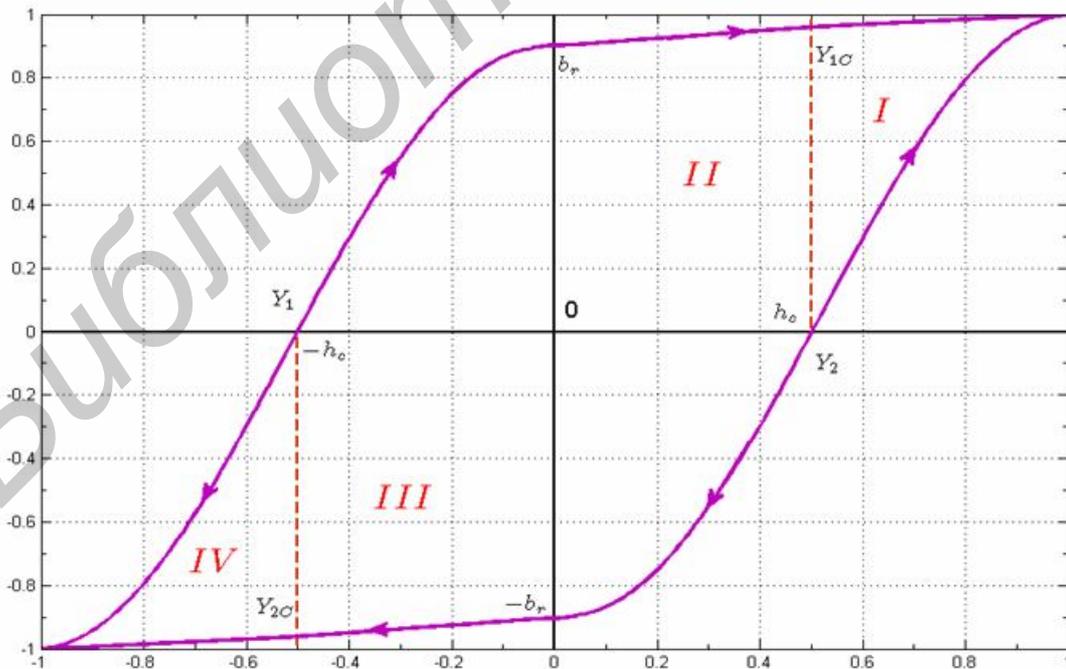


Рис. 2. Части петли гистерезиса I-IV с участками ее ветвей, задаваемых особыми симметричными значениями аргумента  $h$ :  $0$ ,  $\pm h_c$ ,  $\pm 1$

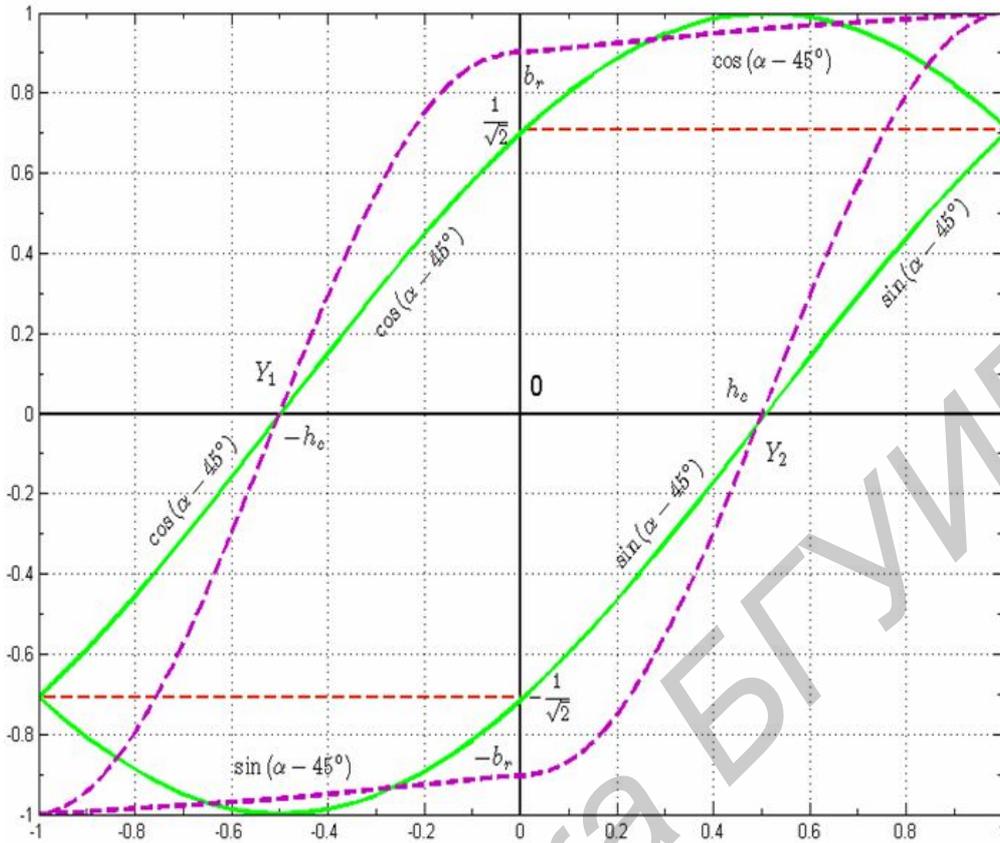


Рис. 3. Диаграмма моделирующих тригонометрических функций  $A$ ,  $\cos(\alpha - 45^\circ)$ ,  $\sin(\alpha - 45^\circ)$ , совмещенная с петлей гистерезиса

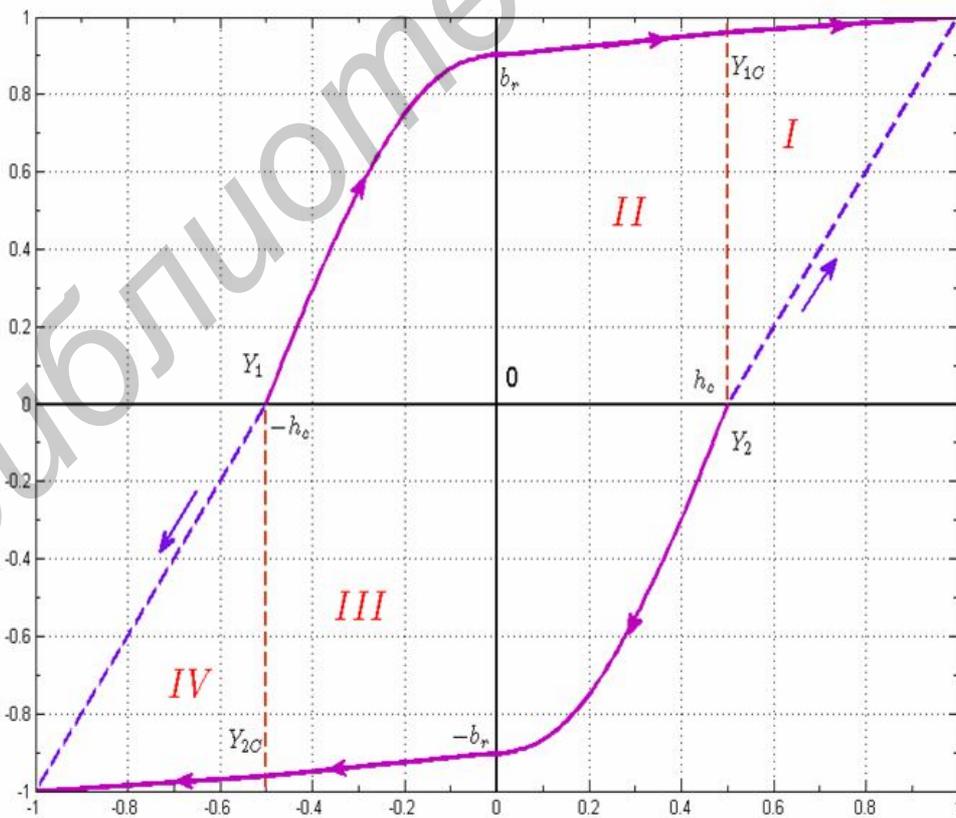


Рис. 4. Диаграмма шести участков размагничивания с хордами (штрихи) двух участков намагничивания ферромагнетика

### Диаграмма расчетных тригонометрических функций

Ранее [1] показана прямая связь между ординатами петли гистерезиса и соответствующими им корнями частных уравнений (2)–(6). В дополнение к этой статье [2] дано решение этих уравнений нетрадиционным методом. Для особых значений  $h$  общее решение порождает соотношения (рис. 3):

$$\begin{aligned}
 h = 1, \quad Y_1 = Y_2 = 1, \quad A = \sqrt{2}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}; \\
 h = h_c, \quad Y_1 = Y_{1c}, \quad Y_2 = 0, \quad A = Y_{1c}, \quad \cos \alpha = 1, \quad \sin \alpha = 0; \\
 h = 0, \quad Y_1 = b_r, \quad Y_2 = -b_r, \quad A = \sqrt{2}b_r, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \\
 h = -h_c, \quad Y_1 = 0, \quad Y_2 = Y_{2c}, \quad A = |Y_{2c}|, \quad \cos \alpha = 0, \quad \sin \alpha = -1; \\
 h = -1, \quad Y_1 = Y_2 = -1, \quad A = \sqrt{2}, \quad \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Эти соотношения дают основание сформулировать *теорему*: все участки ветвей нормированных петель гистерезиса имеют одинаковые интервалы значений расчетных тригонометрических функций, несмотря на различные интервалы аргумента  $h$ .

Для доказательства теоремы установим связь особых значений  $h$  с величинами косинусов и синусов обобщенных углов  $\alpha_0$ , включающих постоянные начальные фазы и текущие величины:

$$\begin{aligned}
 h = 1, \quad \cos \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_0 = 45^\circ; \\
 h = h_c, \quad \cos \alpha_0 = 1, \quad \sin \alpha_0 = 0, \quad \alpha_0 = 0^\circ; \\
 h = 0, \quad \cos \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \alpha_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_0 = -45^\circ; \\
 h = -h_c, \quad \cos \alpha_0 = 0, \quad \sin \alpha_0 = -1, \quad \alpha_0 = -90^\circ; \\
 h = -1, \quad \cos \alpha_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \alpha_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_0 = -135^\circ.
 \end{aligned} \tag{2}$$

В свернутом виде эту связь можно записать для верхней и нижней ветвей петли гистерезиса как:

$$\begin{aligned}
 \cos(-45^\circ \pm \alpha), \\
 \sin(-45^\circ \pm \alpha),
 \end{aligned} \tag{3}$$

где  $\alpha$  отсчитывается от центра петли гистерезиса вправо, принимая значения  $0, +45^\circ, +90^\circ$ , и влево, принимая значения  $-45^\circ, -90^\circ$ .

Это дает для верхней (косинусной) ветви петли при:

$$\begin{aligned}
 h = 0, \quad \alpha = 0^\circ, \quad \cos(-45^\circ) &= \frac{1}{\sqrt{2}}; \\
 h = h_c, \quad \alpha = 45^\circ, \quad \cos 0^\circ &= 1; \\
 h = 1, \quad \alpha = 90^\circ, \quad \cos 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}};
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$h = -h_c, \quad \alpha = -45^\circ, \quad \cos(-90^\circ) = 0;$$

$$h = -1, \quad \alpha = -90^\circ, \quad \cos(-135^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

Для нижней (синусной) ветви петли при:

$$\begin{aligned}
 h = 0, \quad \alpha = 0^\circ, \quad \sin(-45^\circ) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}; \\
 h = h_c, \quad \alpha = 45^\circ, \quad \sin 0^\circ &= 0; \\
 h = 1, \quad \alpha = 90^\circ, \quad \sin 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}};
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$h = -h_c, \quad \alpha = -45^\circ, \quad \sin(-90^\circ) = -1;$$

$$h = -1, \quad \alpha = -90^\circ, \quad \sin(-135^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Из (4) и (5) следует, что разность углов концов участков и первой, и второй ветвей одна и та же для тригонометрических функций всех петель гистерезиса:

$$\begin{aligned}
 45^\circ - 0^\circ &= 45^\circ, \\
 0 - (-45^\circ) &= 45^\circ, \\
 -45^\circ - (-90^\circ) &= 45^\circ, \\
 -90^\circ - (-135^\circ) &= 45^\circ.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Такая разность углов тригонометрических функций порождает отличие начала и конца участков косинуса и синуса на  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \text{const}$ .

Вместе с (6) это является доказательством теоремы. Из рассмотренных соотношений можно сделать также следующие выводы:

- 1) диаграмма тригонометрических функций, как и петля гистерезиса, является замкнутой кривой (рис. 3);
- 2) она полностью описывается аналитически;
- 3) при любом значении  $h$  имеет место соотношение  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ ;
- 4) проекции интервалов  $\cos \alpha$  и  $\sin \alpha$  на ось аргумента  $h$  совпадают с его интервалами;
- 5) диаграмма имеет симметрию относительно центра петли гистерезиса.

### Формула ветвей петли гистерезиса

На рис. 4 выделены участки петли гистерезиса, их шесть, которые отображают процесс размагничивания ферромагнетика после достижения им максимальной индукции в положительном ( $b = +1$ ) или отрицательном ( $b = -1$ ) направлении. При этом в обоих случаях индукция падает от максимальной величины ( $\pm 1$ ) до 0, сохраняя направление предшествующего максимума. В этом процессе, однако, есть принципиально отличающиеся этапы: на участках I и II, а также III и IV спад индукции происходит в условиях спада магнитодвижущей силы  $h$  от  $\pm 1$  до 0, что не ускоряет размагничивание ферромагнетика. Вместе с инерционностью его доменов это приводит, как видно из рис. 4, к почти линейному снижению индукции от  $\pm 1$  до  $\pm b_r$ .

Потом наступает принципиально новый, второй этап размагничивания. В особой точке 0 меняется направление магнитодвижущей силы  $h$ , которая, возрастая до  $\mp h_c$ , интенсивно воздействует на трудно ориентируемые домены, возвращая их в нейтральное положение. Индукция при этом на участке III или II круто снижается от  $\pm b_r$  до 0 нелинейно. Ферромагнетик интенсивно размагничивается. При дальнейшем росте  $h$  до  $\mp 1$  индукция нелинейно возрастает от 0 до  $-1$  (косинусный участок) или от 0 до  $-1$  (нелинейный синусный участок) (см. выше).

Предлагаемый метод моделирования петли гистерезиса основан на разделении ее на восемь участков (рис. 2), описание которых возможно с помощью простых формул. Заметим также, что оба близких к линейным промежутка размагничивания  $1 \div b_r$  и  $-1 \div -b_r$  «обратимого вращения намагниченности» [4] разделяются ординатами  $Y_{1c}$  и  $Y_{2c}$  на два участка, еще более близких к линейным (Рис. 4). Для петли с коэффициентом прямоугольности равным 1 они строго линейны (рис. 1). Таким образом, петля гистерезиса содержит два близких к линейным косинусных и два таких же синусных участка, которым соответствуют по два нелинейных синусных и по два нелинейных косинусных участка (рис. 2 и 4).

Это дает возможность представить простыми соотношениями ординаты линейных участков, а через них, с помощью тригонометрических функций, отобразить ординаты нелинейных участков, то есть определить все ординаты петли гистерезиса.

Участки I и II верхней ветви петли гистерезиса – два отрезка прямых, каждый из которых размещен между двумя заданными точками (рис. 4): первый между точками с координатами  $(1, 1)$  и  $(h_c, Y_{1c})$ , второй – между точками с координатами  $(h_c, Y_{1c})$  и  $(0, b_r)$ . Для первого и второго участков [3] получим:

$$\begin{aligned} \frac{Y_{1,I} - Y_{1c}}{1 - Y_{1c}} = \frac{h - h_c}{1 - h_c} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} Y_{1,I} = (h - h_c) \left( \frac{1 - Y_{1c}}{1 - h_c} \right) + Y_{1c} \\ Y_{1,II} = \frac{h}{h_c} (Y_{1c} - b_r) + b_r \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично можно представить участки III и IV нижней ветви петли: третий – с координатами  $(-h_c, Y_{2c})$  и  $(0, -b_r)$ , четвертый – с координатами  $(-1, -1)$  и  $(h_c, Y_{2c})$ . Откуда получим:

$$\begin{cases} Y_{2,III} = h \left( \frac{b_r - Y_{2c}}{-h_c} \right) - b_r \\ Y_{2,IV} = (h + h_c) \left( \frac{Y_{2c} - 1}{h_c - 1} \right) - Y_{2c} \end{cases} \quad (8)$$

По формулам (7) и (8) определяются непосредственно ординаты четырех участков петли с учетом их границ. При конкретно заданных  $\pm h_m, \pm h_c, \pm b_r, Y_{1c}, Y_{2c}$  связь между ординатами этих участков и аргументом  $h$  выражается через простые коэффициенты, что упрощает расчет.

Для определения ординат четырех нелинейных участков петли гистерезиса используем соотношения [2]:  $Y_1 = A \cos \alpha$ ,  $Y_2 = A \sin \alpha$ , откуда

$$A = \frac{Y_1}{\cos \alpha}, \quad Y_2 = \frac{Y_1}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha = Y_1 \operatorname{tg} \alpha; \quad \text{и} \quad A = \frac{Y_2}{\sin \alpha}, \quad Y_1 = \frac{Y_2}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha = Y_2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

На участке I в соответствии с (3) косинус и синус имеют углы границ  $45^\circ$  и  $0$ . Значение этих же углов имеет отношение функций, то есть  $\operatorname{tg} 45^\circ$  и  $\operatorname{tg} 0$ . Таким образом, ординаты первого нелинейного – синусного участка равны:

$$Y_{2,I} = Y_{1,I} \operatorname{tg} \alpha_I, \text{ где } \alpha_I = 0 \div 45^\circ. \quad (9)$$

На участке II в соответствии с (3) косинус и синус имеют углы границ  $0$  и  $-45^\circ$ . Значение этих углов имеет и тангенс этого нелинейного участка. Следовательно, его ординаты:

$$Y_{2,II} = Y_{1,II} \operatorname{tg} \alpha_{II}, \text{ где } \alpha_{II} = 0, -45^\circ.$$

На участке III ординаты нижней ветви определяем по формуле (8), далее находим ординаты верхней ветви этого участка по соотношению:

$$Y_{1,III} = \frac{Y_{2,III}}{\sin \alpha_{III}} \cdot \cos \alpha_{III} = Y_{2,III} \operatorname{ctg} \alpha_{III} \quad (10)$$

Ординаты четвертого участка нижней ветви петли гистерезиса  $Y_{2,IV}$  определяем по формуле (8), а через них находим ординаты верхней ветви этого участка:

$$Y_{1,IV} = Y_{2,IV} \operatorname{ctg} \alpha_{IV}, \text{ где } \operatorname{ctg} \alpha_{IV} = \frac{\cos \alpha_{IV}}{\sin \alpha_{IV}} \quad (11)$$

Таким образом, определяются все ординаты петли гистерезиса в пределах восьми ее участков, как здесь кратко изложено. В зависимости от характера решаемых задач их можно использовать по отдельным участкам или же объединять. Если необходимо определить, например, площадь петли гистерезиса, которая, как известно, пропорциональна потерям энергии на перемагничивание ферромагнетика, и тем самым проанализировать потери, площадь проще определять по участкам I–IV или даже по двум участкам I и II и удвоить с учетом симметрии петли. Для первого участка она может быть представлена с учетом (7) и (9) в сокращенной исходной записи как

$$Y_{1,I} - Y_{1,II} = Y_{1,I} - Y_{1,I} \operatorname{tg} \alpha_I = Y_{1,I} (1 - \operatorname{tg} \alpha_I) \quad (12)$$

с учетом того, что периметры площадок, ограниченных частью верхней ветви ( $Y_{1,I}$ ) и частью нижней ветви ( $Y_{2,I}$ ), предопределены параметрами петли. Аналогично можно записать для второй части петли:

$$Y_{1,II} - Y_{2,II} = Y_{1,II} - Y_{1,II} \operatorname{tg} \alpha_{II} = Y_{1,II} (1 - \operatorname{tg} \alpha_{II}) \quad (13)$$

Так что общая площадь петли гистерезиса может быть представлена через соотношение:

$$S = 2 \left[ Y_{1,I} (1 - \operatorname{tg} \alpha_I) + Y_{1,II} (1 - \operatorname{tg} \alpha_{II}) \right],$$

что дает с учетом (12) предпосылку вычисления площади с помощью определенных интегралов. Предполагается также изучение возможности использования изложенного метода, в частности, для анализа работы ферромагнетиков при воздействии магнитодействующей силы – функции времени.

### Заключение

По-новому определены ординаты петли гистерезиса. Основа метода – нетрадиционное решение квадратных уравнений, описывающих ординаты. Введены понятия: особые значения аргумента  $h$ ; части петли гистерезиса I–IV; ее участки. Доказана теорема об общности свойств тригонометрических функций для них. Намечены пути использования метода.

## THE FORMULA OF THE LOOP OF THE HYSTERESIS

V.M. ILYIN

### Abstract

Has received the loop formula of the hysteresis which is based on use of the nonconventional decision of quadratics with material factors. Is allows to simplify and raise the accuracy of the account of the hysteresis.

### Литература

1. *Ильин В.М.* // Докл. БГУИР. 2006. №2. С. 57–63.
2. *Ильин В.М.* // Докл. БГУИР. 2009. №3. С. 41–45.
3. *Жевняк Р., Карпук А.* Высшая математика, учебник. Минск, 1992.

Библиотека БГУИР