О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Жук А. И.
Кафедра высшей математики, Брестский государственный технический университет
Брест, Республика Беларусь
E-mail: aizhuk85@mail.ru

Исследуются неавтономные системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций. Получены ассоциированные решения рассматриваемых систем.

Введение

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T = [0, a] \subset \mathbb{R}$:

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f^{ij}(t, x(t))\dot{L}^j(t), i = \overline{1,p} \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

где $f^{ij}, i = \overline{1,p}, j = \overline{1,q}$ - липшицевы функции, $x(t) = [x^1(t), x^2(t), ..., x^p(t)]$, а $L^j(t), j = \overline{1,q}$ - функции ограниченной вариации на отрезке T. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^j(t), j = \overline{1,q}$ непрерывны справа, $L^j(0) = L^j(0-) = 0$ и $L^j(a-) = L^j(a)$. Рассматриваемая система уравнений описывает модель процесса взлета ракеты. Обобщенные коэффициенты соответствуют тому, что масса меняется скачкообразно, когда отбрасываются ступени ракеты. Также к таким системам уравнений приводят задачи управления с импульсными воздействиями.

Задача (1)-(2) содержит произведение обобщенных функций, поэтому не является корректной. Существуют различные подходы, чтобы корректно определить произведение в правой части задачи (1)-(2). Например, существует возможность формализации данной задачи в рамках теории обобщенных функций [1]. Также возможен переход к интегральному уравнению [3], где интеграл понимается в определенном смысле, или к аппроксимации исходного уравнения дифференциальными уравнениями с гладкими коэффициентами [2].

Еще один подход связан с алгебрами новых обобщенных функций. Первая такая была предложена Коломбо (см. [4]). А общий метод построения подобных алгебр описан в [5]. В данной работе решение задачи (1)-(2) исследуется в алгебре новых обобщенных функций (из [6,7]). Важнейшая особенность новых обобщенных функций состоит в том, что они определяются, как классы эквивалентных последовательностей гладких функций и зависят от способа аппроксимации, что позволяет охватить решения, получающиеся в результате толкования задачи (1)-(2) с помощью трех описанных выше подходов.

I. Основные результаты

Следуя работе [7] заменяем обычные функции, присутствующие в (1), на соответствующие им новые обобщенные функции получим запись уравнения в дифференциалах в алгебре мнемофункций.

$$d_{\widetilde{h}}\widetilde{x^i}(\widetilde{t}) = \sum_{j=1}^{q} \widetilde{f^{ij}}(\widetilde{t}, \widetilde{x}(\widetilde{t}))d_{\widetilde{h}}\widetilde{L^j}(\widetilde{t}), i = \overline{1,p} \quad (3)$$

с начальным условием $\widetilde{x}|_{[\widetilde{a};\widetilde{h}]} = \widetilde{x}^0$, где $\widetilde{h} = [\{h_n\}] \in H$, $\widetilde{a} = [\{a\}] \in \widetilde{T}$ и $\widetilde{t} = [\{t_n\}] \in \widetilde{T}$, $\widetilde{x} = [\{x_n(t)\}]$, $\widetilde{f} = [\{f_n(x)\}]$, $\widetilde{g} = [\{g_n(x)\}]$, $\widetilde{x}^0 = [\{x_n^0(t)\}]$, $\widetilde{L} = [\{L_n(t)\}]$ и $L_n \to L$, $x_n^0 \to x(0)$. Далее, если заменить в (3) каждую новую обобщенную функцию представителем класса ее определяющего, получим запись задачи (3) на уровне представителей

$$x_n^i(t+h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(t, x_n(t))[L_n^j(t+h_n) - L_n^j(t)], \quad (4)$$

$$x_n(t)|_{[0,h_n)} = x_{n0}(t) \quad (5)$$

Здесь $L_n^j(t) = (L^j * \rho_n)(t) = \int_0^{\frac{1}{n}} L^j(t + s)\rho_n(s)\, ds$, $j = \overline{1,q}$ где $\rho_n(t) = n\rho(nt)$, $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\rho \geq 0$, $supp\rho \subseteq [0,1]$, $\int_0^1 \rho(s)\, ds = 1$, а $f_n = (f^{ij})_{i,j=1}^{p,q}$, $f_n^{ij} = f^{ij} * \widetilde{\rho}_n$, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ где $\widetilde{\rho}_n(x_0, x_1, x_2, ..., x_p) = n^{p+1}\widetilde{\rho}(nx_0, nx_1, nx_2, ..., nx_p)$, $\widetilde{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R}^{p+1})$, $\widetilde{\rho} \geq 0$, $\int_{[0,1]^{p+1}} \widetilde{\rho}(x_0, x_1, ..., x_p)\, dx_0 dx_1 ... dx_p = 1$, $supp\widetilde{\rho} \subset [0,1]^{p+1}$.

При некоторых дополнительных условиях [2] функция x_n^j будет гладкой, поэтому при этих условиях решение задачи (4)-(5) определяет мнемофункцию, которая является решением задачи (3). В данной работе исследуются условия, при которых указанная мнемофункция ассоциирует некоторую обычную функцию x, которую называют ассоциированным решением задачи (1)-(2). На уровне представителей указанная проблема сводится к описанию предельного поведения решений задачи (4)-(5).

Случай Ито. Для описания предельного поведения задачи (4)-(5) рассмотрим систему уравнений, где $i = \overline{1,p}$

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q} \int_0^{t+} f^{ij}(s, x(s-))\, dL^j(s). \qquad (6)$$

Теорема 1. [8] *Пусть f^{ij} $i = \overline{1,p}, j = \overline{1,q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены. $L^j(t)-$ произвольные функции ограниченной вариации. Тогда при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ так, что $\frac{1}{n} = o(h_n)$, для всех $t \in T$ решение $x_n(t)$ задачи Коши (4)-(5) сходится к решению системы уравнений (6), если для любого $t \in T$ выполняется $|x_{n0}(\tau_t) - x_0| \to 0$.*

В случае Стратоновича для описания предельного поведения задачи (4)-(5) рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q} \int_0^{t} f^{ij}(s, x(s))\, dL^{jc}(s) +$$

$$+ \sum_{\mu_r \le t} S^i(\mu_r, x(\mu_r-), \Delta L(\mu_r)), \qquad (7)$$

где $i = \overline{1,p}$. $S^i(\mu, x, u) = \varphi^i(1, \mu, x, u) - \varphi^i(0, \mu, x, u)$, а $\varphi^i(t, \mu, x, u)$ находится из уравнения $\varphi^i(t, \mu, x, u) = x^i + \sum_{j=1}^{q} u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s, \mu, x, u))\, ds, i = \overline{1,p}$. Из результатов статьи [9] вытекает, что решение систем (6) и (7) существует и единственно.

Теорема 2. [10] *Пусть f^{ij} $i = \overline{1,p}, j = \overline{1,q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены. Тогда при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ так, что $h_n = o(\frac{1}{n})$, решение $x_n(t)$ задачи Коши (4)-(5) сходится к решению системы уравнений (7) для всех $t \in T$, если $|x_{n0}(\tau_t) - x_0| \to 0$ для любого $t \in T$.*

Смешанный случай. В качестве представителей рассмотрим следующие функции: $L_n^j(t) = (L^j * \rho_n^j)(t) = \int_0^{\frac{1}{\gamma^j(n)}} L^j(t+s)\rho_n^j(s)\, ds$,где $\rho_n^j(t) = \gamma^j(n)\rho^j(\gamma^j(n)t)$, $\rho^j \ge 0$, $supp\rho^j \subseteq [0,1]$, $\int_0^1 \rho^j(s)\, ds = 1$, а $f_n = f * \widetilde{\rho}_n$. Для описания предельного поведения задачи (4)-(5) рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q} \int_0^{t} f^{ij}(s, x(s))\, dL^{jc}(s) +$$

$$+ \sum_{\mu_r \le t} S^i(\mu_r, x(\mu_r-), \Delta L(\mu_r)), \qquad (8)$$

где $S^i(\mu, x, u) = \varphi^i(1, \mu, x, u) - \varphi^i(0, \mu, x, u)$, $\mu \in T$, $x \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^q$, а $\varphi^i(t, \mu, x, u)$ находится из уравнения (9), где $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ и $L^{jc}(t)$- непрерывная, а $L^{jd}(t)$-разрывная составляющие функции $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$, $H(s)-$ функция Хэвисайда, μ_r- точки разрыва функции $L(t)$, $\Delta L(\mu_r) = L^d(\mu_r+) - L^d(\mu_r-)$ - величина скачка. Из результатов статьи [9] вытекает, что решение системы (8) существует и единственно для всех значений параметров $\mu \in T$, $x \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^q$.

Теорема 3. *Пусть f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены. $L^i(t), i = \overline{1,q}$ - непрерывные справа функции ограниенной вариации. Тогда при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ $\gamma^j(n) \to \infty$ для $j = \overline{1,b}$ $\gamma^j(n)h_n \to \infty$, и для $j = \overline{b+1,q}$ $\gamma^j(n)h_n \to 0$, решение $x_n(t)$ задачи Коши (4)-(5) сходится к решению системы уравнений (8) в $L^1(T)$, если $\int |x_{n0}(\tau_t) - x_0|\, dt \to 0$.*

Заметим, что из Теоремы 3 не следует Теоремы 1 и 2, так как ассоциированные решения задачи (1)-(2) в последней теореме получены в другом топологическом пространстве.

1. Антосик, П. Теория обобщенных функций: секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский – М.: Мир, 1976. – 311 с.
2. Завалищин, С. Т. Импульсные процессы: модели и приложения / С. Т. Завалищин, А. Н. Сесекин – М.: Наука, 1991. – 256 с.
3. Das, P. S. Existence and stability of measure differential equations / P. S. Das, R. R. Sharma // Czech. Math. J. – 1972. – Vol. 22, – №1. – P. 145–158.
4. Colombeau, J. F. Elementary introduction to new generalized functions / J. F. Colombeau // North-Holland Mathematics Studies 113 (North-Holland Amsterdam), – 1985. – 300 p.
5. Антоневич, А. Б. Об общем методе построения алгебр обобщенных функций / А .Б. Антоневич, Я. В. Радыно // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 318, №2. – С. 267–270.
6. Лазакович, Н. В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н. В. Лазакович // Доклады НАН Беларуси. – 1994. – Т. 35, №5. – С. 23–27.
7. Yablonski, A. Differential equations with generalized coefficients / A. Yablonski // Nonlinear analysis. – 2005. – Vol.63. – P. 171–197.
8. Жук, А. И. Неавтономные системы дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных функций / А. И. Жук, О. Л. Яблонский // Труды института математики. – 2011. – Т. 19, № 2. – С. 43–51.
9. Groh, J. A nonlinear Volterra-Stieltjes integral equation and a Gronwall inequality in one dimension / J. Groh // Illinois journal of Mathematics. – 1980. – Vol. 24, №2. – P. 244–263.
10. Жук, А. И. Системы дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных функций / А. И. Жук, О. Л. Яблонский // Известия НАН Беларуси. Сер. физ. мат. наук. – 2011. – №1. – С. 12–16.

$$\varphi^i(t, \mu, x, u) = x^i + \sum_{j=1}^{b} u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s-, \mu, x, u))\, dH(s-1) + \sum_{j=b+1}^{q} u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s, \mu, x, u))\, ds \qquad (9)$$