



УДК 510.63

### ВЕРОЯТНОСТНАЯ ЛОГИКА И ОРТОГОНАЛЬНЫЙ БАЗИС СИЛЛОГИСТИКИ

Сметанин Ю.М

ГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет»,  
г. Ижевск, Россия

[gms1234gms@rambler.ru](mailto:gms1234gms@rambler.ru)

В работе рассматривается алгебра случайных событий и её интерпретация в невырожденной булевой алгебре на основе множеств. Показано, что классическое использование понятий логика и вероятность вполне совместимо с инженерными логико-вероятностными исчислениями и вероятностной логикой, начало которой восходит к классическим работам в области искусственного интеллекта. Показано, что некоторые весьма трудные задачи могут быть решены с помощью предлагаемого логического описания и точной интерпретации.

**Ключевые слова:** алгебраическая система, исчисление конституентных множеств, вероятность, ортогональный базис силлогистики.

#### 1. Введение

Исторически сложилось три точки зрения на совместное использование понятий логика и вероятность:

1. классическая [Колмогоров 1986]
2. инженерная (логико - вероятностное исчисление - ЛВИ) [Рябинин 2003]
3. исследователей искусственного интеллекта (вероятностная логика) [Nilson 1986].

Под термином вероятностная логика в данной работе понимается по сути классическая алгебра случайных событий и с исключенным двузначным отношением  $X \subseteq Y$  между случайными событиями  $X$  и  $Y$ . В работе показано, что различие во взглядах и «трудности» совмещения понятия логика и вероятность происходят от того, что Колмогоровский подход к исчислению вероятностей случайных событий использует невырожденную булеву алгебру на основе множеств [Владимиров 1969], а инженерный подход и подход искусственного интеллекта, использует вырожденную булеву алгебру на основе множеств индикаторов случайных событий, по сути своей - неадекватную модель объективной реальности.

#### 2. Постановка задачи

В работах [Сметанин 2009, 2010] предложен ортогональный базис силлогистики, имеющий выгодное отличие от системы простых суждений Аристотеля его определение дано, в том числе работе [Сметанин 2011b], опубликованной в данном сборнике.

Семь расширенных Жергонновых отношений изображены на фоне универсума смотри рис. 1

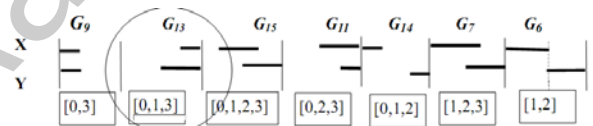


Рис. 1 Расширенные Жергонновы отношения

$G_{11}$ ,  $G_{13}$ , - правостороннее и левостороннее включение;

$G_9$  – равенство (равносильность);

$G_{15}$  независимое пересечение (независимость);

$G_6$  - полное противоречие (событие  $X$  выполняется когда не происходит  $Y$  - полная несовместимость  $X'$  совпадает с  $Y$ );

$G_{14}$  неполное противоречие - соподчиненность (события несовместны и их объединение не равно универсуму – неполная несовместимость  $X'$  совместно с  $Y$ );

$G_7$  - зависимое пересечение.

Последний термин явно не используется в теории вероятностей и не является отрицанием термина независимость событий. Все пары событий, кроме тех которые находятся в отношении  $G_{15}$ , являются зависимыми. Остальные восемь отношений являются вырожденными в том смысле, что допускают равенство универсуму сравниваемых множеств или их дополнений. Аристотель не допускал пустых терминов в рассуждениях [Брусенцов 1998].

На Рис. 2 показано, как соотносятся отношение между множествами  $X$  и  $Y$  и отношения между их индикаторами  $x$  и  $y$ .

Имя	Кон.	Соотн./мера	Образ	
G1	$x \overline{y}$	$X'Y = \emptyset$	$A(X, Y)(X = \emptyset)(Y = \emptyset)$	$(x' < y')(y' = 0)$
	$x \overline{y}$	$X'Y = \emptyset$		
	$x \overline{y}$	$XY = \emptyset$		
	$x \overline{y}$	$XY \neq \emptyset$	$P(XY) = 1$	
G2	$\overline{x} y$	$X'Y = \emptyset$	$A(X', Y)(X' = \emptyset)(Y = \emptyset)$	$(x' < y')(x' = 0)(y = 0)$
	$\overline{x} y$	$X'Y = \emptyset$		
	$\overline{x} y$	$XY \neq \emptyset$	$P(XY) = 1$	
	$\overline{x} y$	$XY = \emptyset$		
G3	$\overline{x} y$	$X'Y = \emptyset$	$A(X'Y)(X' = \emptyset)(A(X', Y))$	$(x' \leq y)(x' = 0)(x' \leq y')$
	$\overline{x} y$	$X'Y = \emptyset$		
	$\overline{x} y$	$XY \neq \emptyset$	$P(XY) = P(Y')$	
	$\overline{x} y$	$XY \neq \emptyset$	$P(XY) = P(Y)$	
G4	$x \overline{y}$	$X'Y = \emptyset$	$A(X, Y)(Y = \emptyset)(X = \emptyset)$	$(x < y)(x = 0)(y' = 0)$
	$x \overline{y}$	$X'Y \neq \emptyset$	$P(X'Y) = 1$	
	$x \overline{y}$	$XY = \emptyset$		
	$x \overline{y}$	$XY = \emptyset$		$(x \leq y)(y' = 0)(x' \leq y)$
G5	$x \overline{y}$	$X'Y = \emptyset$	$A(X, Y)(Y = \emptyset)A(X'Y)$	
	$x \overline{y}$	$X'Y \neq \emptyset$	$P(X'Y) = P(X')$	
	$x \overline{y}$	$XY = \emptyset$		
	$x \overline{y}$	$XY \neq \emptyset$	$P(XY) = P(X)$	
G6	$x \overline{y}$	$X'Y = \emptyset$	$Eg(X, Y)(X \neq \emptyset)(Y \neq \emptyset)$	$x = y$
	$x \overline{y}$	$X'Y \neq \emptyset$	$P(X'Y) = P(Y)$	
	$x \overline{y}$	$XY \neq \emptyset$	$P(XY) = P(X)$	
	$x \overline{y}$	$XY \neq \emptyset$	$P(XY) = 0$	
G7	$x \overline{y}$	$X'Y = \emptyset$	$A(X', Y)(X \neq \emptyset)(Y \neq \emptyset)$	$x' \leq y$
	$x \overline{y}$	$X'Y \neq \emptyset$	$P(X'Y) = P(X')$	
	$x \overline{y}$	$XY \neq \emptyset$	$P(XY) = P(Y')$	
	$x \overline{y}$	$XY \neq \emptyset$	$P(XY) = 1 - P(X') - P(Y')$	
G8	$x \overline{y}$	$X'Y \neq \emptyset$	$P(X'Y) = 1$	
	$x \overline{y}$	$X'Y = \emptyset$	$A(X, Y)(X = \emptyset)(Y = \emptyset)$	$(x = y)(x = 0)(y = 0)$
	$x \overline{y}$	$XY = \emptyset$		
	$x \overline{y}$	$XY = \emptyset$		
G9	$x \overline{y}$	$X'Y \neq \emptyset$	$P(X'Y) = P(X') = P(Y')$	
	$x \overline{y}$	$X'Y = \emptyset$	$Eg(X, Y)(X \neq \emptyset)(Y \neq \emptyset)$	$x = y$
	$x \overline{y}$	$XY = \emptyset$		
	$x \overline{y}$	$XY \neq \emptyset$	$P(XY) = P(X) = P(Y)$	
G10	$x \overline{y}$	$X'Y \neq \emptyset$	$P(X'Y) = P(X')$	
	$x \overline{y}$	$X'Y = \emptyset$	$A(X, Y)(X \neq \emptyset)(Y = \emptyset)$	$(x \leq y')(y = 0)(x' \leq y')$
	$x \overline{y}$	$XY \neq \emptyset$	$P(XY) = P(X)$	
	$x \overline{y}$	$XY = \emptyset$		
G11	$x \overline{y}$	$X'Y \neq \emptyset$	$P(X'Y) = P(X')$	
	$x \overline{y}$	$X'Y = \emptyset$	$A(X', Y)(X \neq \emptyset)(Y \neq \emptyset)$	$x' \leq y'$
	$x \overline{y}$	$XY \neq \emptyset$	$P(XY) = 1 - P(X') - P(Y)$	
	$x \overline{y}$	$XY \neq \emptyset$	$P(XY) = P(Y)$	
G12	$x \overline{y}$	$X'Y \neq \emptyset$	$P(X'Y) = P(Y')$	
	$x \overline{y}$	$X'Y \neq \emptyset$	$P(X'Y) = P(Y)$	
	$x \overline{y}$	$XY = \emptyset$	$A(X, Y)(X = \emptyset)(Y \neq \emptyset)$	$(x \leq y)(x = 0)(x \leq y')$
	$x \overline{y}$	$XY = \emptyset$		
G13	$x \overline{y}$	$X'Y \neq \emptyset$	$P(X'Y) = P(Y')$	
	$x \overline{y}$	$X'Y \neq \emptyset$	$P(X'Y) = 1 - P(X) - P(Y')$	
	$x \overline{y}$	$XY = \emptyset$	$A(X, Y)(X \neq \emptyset)(Y \neq \emptyset)$	$x \leq y$
	$x \overline{y}$	$XY \neq \emptyset$	$P(XY) = P(X)$	
G14	$x \overline{y}$	$X'Y \neq \emptyset$	$P(X'Y) = 1 - P(X) - P(Y)$	
	$x \overline{y}$	$X'Y \neq \emptyset$	$P(X'Y) = P(Y)$	
	$x \overline{y}$	$XY \neq \emptyset$	$P(XY) = P(X)$	
	$x \overline{y}$	$XY = \emptyset$	$A(X, Y)(X \neq \emptyset)(Y \neq \emptyset)$	$x \leq y'$
G15	$x \overline{y}$	$X'Y \neq \emptyset$	$X'Y + X'Y + XY +$	$y' + x'y + xy' +$
	$x \overline{y}$	$X'Y \neq \emptyset$	$+XY = U$	$+xy = I$
	$x \overline{y}$	$XY \neq \emptyset$		
	$x \overline{y}$	$XY \neq \emptyset$		

Рис. 2 Проекция Жергонновых отношений

В столбце «Кон.» На рис. 2 показано, какие конститутенты в данном отношении являются пустыми либо непустыми множествами. В столбце «Соотн./мера» показано, как жергонново соотношение между множествами выражается через функторы ортогонального базиса силлогистики и дополнительные утверждения о равенстве (неравенстве) пустому множеству образующих соотношение множеств. Из соотношений, рассмотренных на рис.2, следует [Сметанин 2011a, 2011b] отсутствие изоморфизма между ними.

Алгебра множеств является булевой алгеброй относительно строгого и нестрогого включения - как естественного упорядочения. С каждой такой алгеброй автоматически связывается (в случае частичного упорядочения на основе нестрогого включения) изоморфная ей булева алгебра соответствующих характеристических функций (индикаторов) смотри [Сметанин 2001a, 2011b]. В случае частичного упорядочения на основе строгого включения между алгеброй множеств и алгеброй характеристических функций, устанавливается неизоморфное отображение. Случай нестрогого включения не обеспечивает односмысловость суждений, вследствие чего был введен ортогональный базис силлогистики [Сметанин 2009, 2010, 2011a, 2011b]

Таким образом, польку случайное событие имеет интерпретацию в форме множества, а высказывание интерпретируется как пропозициональная переменная с двумя возможными значениями «истина» и «ложь», то изоморфизм между алгеброй событий и алгеброй их индикаторов возможен только в случае если множества - события в универсуме (достоверном событии), упорядочены отношением нестрогого порядка. Для случая строгого частичного порядка показано, что изоморфизма нет, а есть гомоморфизм. С точки зрения просто частичного порядка безразлично, что рассматривать - алгебраическую систему множеств или изоморфную ей алгебраическую систему характеристических функций этих множеств. Это отражено в теореме Стона [Горбатов 1976]. Для случая строгого частичного порядка справедлива

**Теорема 1.** Алгебраическая система  $\sum = \{X_i\}$

задаваемая системой множеств с определенным на них отношением строгого частичного порядка (строгое включение) не изоморфна алгебраической системе  $S$  их индикаторов, на которой строгий частичный порядок из  $\sum = \{X_i\}$  отражается в частичный порядок.

То есть, в случае рассмотрения строгого частичного порядка строгого изоморфизма между этими системами нет, а есть гомоморфное отображение первой во вторую. Проекционная модель [Вальков 1985] на основе индикаторов настолько грубая, что любое непустое подмножество универсума алгебраической системы множеств отражается в ней как ноль либо единица. Это, в свою очередь, является одной из причин парадоксов материальной импликации. Булевой алгеброй называется дистрибутивная структура с неравными друг другу нулем 0 и

единицей 1, в которой всякий элемент имеет дополнение. Таким образом, булева алгебра всегда содержит не менее двух элементов. Алгебра, содержащая только 0 и 1, называется вырожденной [Владимиров с.19]. **Классическая логика построена на основе вырожденной булевой алгебры, в которой 0 отождествлен с абстрактной ложью, а 1 с абстрактной истиной. То есть, она отражает объективную реальность как систему событий (минуя моделирование событий множествами) даже не в систему характеристических функции этих множеств, а в абстрактные, по Гильберту, пропозициональные переменные.**

В работах [Сметанин 2009, 2010, 2011b] в качестве модели высказывания предлагается рассматривать множество. Значение же высказывания определяется индикатором этого множества - высказывательной переменной. Эта идея восходит к самому Аристотелю, особенно наглядно ее представил Жергонн, однако алгебраический подход не получил развития в математической логике, и только в работах [Кулик1997, Кулик2010] получены существенные результаты. Причин здесь несколько и одна из наиболее веских - многосмысловость простых суждений Аристотеля (смотри работу [Сметанин 2011b] из настоящего сборника). Устранение многосмысловости за счет введения ортогонального базиса силлогистики (ОБ) сразу позволило значительно продвинуться вперед:

1. построить точную интерпретацию рассуждений в форме алгебраической системы;
2. построить эффективный алгоритм проверки логического следования заключений из посылок силлогизма;
3. указать на неправильные модусы Аристотеля и Б. Рассела [Сметанин 2011a];
4. доказать отсутствие парадоксов материальной импликации и вернуть ей смысл логического следования, а также установить причину, по которой анализируя словесную продукцию со связкой «если ..., то» логики, используя вырожденную булеву алгебру вынуждены признавать наличие парадоксов [Сметанин 2011a].
5. свести воедино три означенные в начале публикации точки зрения на совместное использование логики и вероятности.

Рассмотрение суждений как множеств позволяет сопоставить терминологию элементарной теории вероятностей и суждений ортогонального базиса. Здесь имеет место однооднозначное соответствие.

Испытание (опыт) – алгебраическая система с образующими  $\sum = \{X_i\}$ .  $X_i$  - случайное событие и одновременно суждение на основе ортогонального базиса. В случае составного (с использованием связей) события ему сопоставляется сложное суждение на основе простых суждений ОБ. Отношения между случайными событиями  $X_i$  (влечет, равносильно, независимость, несовместность, полное противоречие (событие противоположное данному) находятся во взаимно однозначном соответствии с семью расширенными жергонновыми отношениями и тремя

функторами ОБ, смотри рис. 1 и комментарии к нему. Рассмотрение набора суждений и логического следования одних суждений (событий) из комплекса других приводит к необходимости рассмотрения многоместных отношений (предикатов). Наглядная форма представления таких отношений – линейные диаграммы Лобанова [Лобанов2009], которыми можно иллюстрировать интерпретацию алгебраических систем выражающих постановку задач полисиллогистики и вероятностной логики. Ввиду недостатка места автор не будет далее углубляться в теорию. Вместо этого мы постараемся привести убедительные примеры, иллюстрирующие новые возможности вероятностной логики в связи с использованием в ней ОБ.

При исследовании вопроса о том, какие множества можно построить посредством операций (объединения «+», пересечения «\*», дополнения до универсума «'»)  $X^2 = U \setminus X$  из порождающих  $n$  произвольных множеств  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , вводится важное понятие конституенты. Обозначим

$$X_i^{\sigma_i} = \begin{cases} X_i, & \text{если } \sigma_i = 1 \\ \bar{X}_i, & \text{если } \sigma_i = 0 \end{cases}$$

Множество вида,

$$\prod_{i=1}^n X_i^{\sigma_i} = X_1^{\sigma_1} X_2^{\sigma_2} \dots X_n^{\sigma_n} \text{ где } \sigma_i = 0 \text{ или } \sigma_i = 1 \text{ назовем конституентой.}$$

Общее число не пустых конституент не превосходит  $2^n$ . Каждой конституенте можно сопоставить двоичный набор  $\prod_{i=1}^n x_i^{\sigma_i} = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$  длины  $n$ , где

$x_i^{\sigma_i}$  есть характеристическая функция множества

$$X_i^{\sigma_i}, x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i, & \sigma_i = 1 \\ \bar{x}_i, & \sigma_i = 0 \end{cases}$$

**Определение 1.** Булева переменная  $x$  является характеристической переменной (индикатором) множества  $X$ , если она определены следующим образом смотри (1),  $e$  – произвольный элемент универсума  $U$ .

$$x = \begin{cases} 1, & \text{если } e \in X \\ 0, & \text{если } e \notin X \end{cases}$$

Характеристическая функция множества (индикатор)  $X$  ставит в соответствие любому элементу универсума  $e$  двоичную переменную  $x$ , которая равна 1, если  $e$  принадлежит множеству  $X$  либо равна 0, если  $e$  не принадлежит  $X$ . Набор из индикаторов множеств составляющих конституенту будем называть характеристической функцией конституенты.

**Определение 2.** Базисом заданной алгебраической системы (системы с фиксированным порядком

номеров порождающих множеств) будем называть множество непустых конституент данной системы.

**Определение 3.** Базовым множеством номеров (БМН или BSN) заданной алгебраической системы назовем множество номеров непустых конституент, представленное в десятичном, либо в двоичном виде<sup>1</sup>.

Алгебраическая система с зафиксированным линейным порядком множеств носителей далее будет называться заданной.

Приведем важную теорему, которая позволяет распознавать многомерные отношения, содержащие независимые в совокупности случайные события.

**Теорема 2.** Система  $\Sigma = \{X_i\}$  из  $n$  множеств являющаяся образующей алгебраической системы с заданным отношением строгого порядка (строгое включение) может быть взаимно однозначно сопоставлена системе случайных событий независимых в совокупности тогда и только тогда, когда  $БМН(\Sigma) = [0..2^n]$ . Другими словами, тогда и только тогда, когда все  $2^n$  конституент, построенных из  $\{X_i\}$  являются непустыми множествами.

Теорема доказывается по индукции.

### 3. Примеры решения задач

Сначала рассмотрим задачу с которой началась вероятностная логика. [Nilson 1986]. Здесь данная задача приводится в нашей транскрипции.

**Задача 1.** (Вероятностная логика в ИИ) Дана совокупность случайных событий  $X$  и  $Y$ , заданы вероятность  $P(X)=p_1$  и вероятность  $P(X \subset Y)=p_2$ . Найти (оценить) вероятность  $P(Y)=p$ .

Сразу отметим, что опыт в котором воспроизводятся  $X$  и  $Y$  определяет одно из невырожденных отношений из рисунков 1 и 2, поэтому значения вероятностей  $p_1$  и  $p_2$  в обязательном порядке зависят от реализуемого отношения, что понимал Нельсон, вводя понятия возможных миров. Для расчета искомой вероятности достаточно рассмотреть все невырожденные отношения и рассчитать вероятность  $p$  по ним.

Для  $G_{15}$   $p_2$  должно быть равно  $1-P(XY')=p_2$  в силу независимости  $X$  и  $Y$  имеем

$1-p_1(1-P(Y))=p_2$  или  $1-p_1+p_1P(Y)=p_2$ . Отсюда  $P(Y)=(p_1+p_2-1)/p_1$ . Последняя формула соответствует ответу для данной задачи, полученному в работе [Кулик 2010] другие случаи там не рассматриваются. Для  $G_{14}$  мы с необходимостью имеем  $p_2=0$  и  $P(Y)<1-P(X)$ . Для  $G_{11}$  -  $Y \subset X$  с необходимостью имеем  $p_2=1$  и  $p \geq p_1$ . Для  $G_{13}$  -  $X \subset Y$  с необходимостью имеем  $p_2=p$ . Для  $G_9$  -  $X=Y$  необходимо имеем  $p_2=1$  и  $p=p_1$ . Для  $G_7$  и  $G_6$  с необходимостью имеем  $p_2=0$  и  $p \leq 1-p_1$ .

**Задача 2.** (Пример взят из работ по ЛВИ).

Рассмотрим один из примеров оценки риска и эффективности при борьбе двух компаний за заказ при противодействии третьей компании. Дружественные компании  $A$  и  $B$  хотят получить выгодный заказ. Компания  $C$  может помешать им. Компания  $C$  (событие  $X3$  с вероятностью  $p_3$ ) вступит в борьбу за получение заказа и будет противодействовать компаниям  $A$  и  $B$ . Противодействие компании  $C$  могут заставить компанию  $A$  (событие  $X5$  с условной вероятностью  $p_5=P(X5/X3)$  при  $P(X5/X3')=0$ ) и компанию  $B$  (событие  $X4$  с условной вероятностью  $p_4=P(X4/X3)$  при  $P(X4/X3')=0$ ) отказаться от намерений. Если же компания  $B$  (событие  $X1$  с вероятностью  $p_1=P(X1/X5')$  при  $P(X1/X5)=0$ ) и компания  $A$  (событие  $X2$  с условной вероятностью  $p_2=P(X2/X4')$  при  $P(X2/X4)=0$ ) смогут получить заказ, то прибыль компании  $A$  составит  $E=6$  млрд. и прибыль компании  $B$  составит  $E=2$  млрд.

В примере вероятности  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  назначены методом экспертной оценки с учетом внешних факторов и капитала фирм  $A, B$  и  $C$ .

Определить вероятность получения заказа компанией  $A$  или  $B$  и ожидаемый выигрыш двух компаний  $A$  и  $B$ .

Решим задачу традиционным способом.

Определим вероятности  $P(X1), P(X2)$  в силу парной независимости ( $X1$  и  $X2$ ), ( $X14$  и  $X3$ ), ( $X2$  и  $X3$ ) и несовместимости ( $X1$  и  $X5$ ), ( $X2$  и  $X4$ ),

$X1 = (X1X5') + (X1X5) = X1X5'$  с учетом того, что  $X1, X5$  несовместимы,  $X1X5 = \emptyset$ ;

$X2 = (X2X4') + (X2X4) = X2X4'$  с учетом того, что  $X2, X4$  несовместимы,  $X2X4 = \emptyset$ ;

$X4 = X4X3 + X4X3' = X3X4$  с учетом того, что  $X3'X4 = \emptyset$

$X5 = X5X3 + X5X3' = X3X5$  с учетом того, что  $X3'X5 = \emptyset$

$P(X4) = P(X3) * P(X4/X3) + P(X3') * P(X4/X3') = p_3 * p_4 = r_4$ ;

$P(X5) = P(X3) * P(X5/X3) + P(X3') * P(X5/X3') = p_3 * p_5 = r_5$ ;

$P(X1) = P(X5') * P(X1/X5') = (1-r_5) * p_1 = (1-p_3 * p_5) * p_1 = r_1$ ;

$P(X2) = P(X4') * P(X2/X4') = (1-r_4) * p_2 = (1-p_3 * p_4) * p_2 = r_2$

Примем вероятности событий.

$p_1=0.85; p_2=0.95; p_3=0.7; p_4=0.4; p_5=0.5$

Целевое событие  $Z=X1+X2$ .

Вероятностный полином (функция) достижения цели  $P(Z)=r_1 + r_2 - r_1 * r_2 = (1-p_3 * p_5) * p_1 + (1-p_3 * p_4) * p_2 - (1-p_3 * p_5) * p_1 * (1-p_3 * p_4) * p_2 = 0,85859$

Введем в условия примера показатели эффективности достижения трех разных целей:

$E1 = 6$ , если свою цель достигнет только компания  $A$   $P1=P(X1X2') = 0,17459$ ;

$E2 = 2$ , если свою цель достигнет только компания  $B$   $P2=P(X1'X2) = 0,30609$ ;

$E3 = 8$  если свои цели достигнут обе компании,  $P3=P(X1X2)=0,37791$ ;

Используя вычисленные вероятности определяем суммарную эффективность достижения трех (математическое ожидание) целей равна

$T = E1 * P1 + E2 * P2 + E3 * P3 = 6 * 0,17459 + 2 * 0,30609 + 8 * 0,37791 = 4,683$

<sup>1</sup> Сммотри пояснение к рисунку 3.

Решим задачу способом, ориентированным на применение компьютера, используя описание взаимосвязей между случайными событиями посредством функторов ортогонального базиса.

Построим систему случайных событий (алгебру) отражающую логическую структуру задачи, которая аналитически выглядит так:

Причинно следственные связи явлений (событий) процесса борьбы за заказ можно описать в виде четырех утверждений:

1. событие  $X1$  влечет событие противоположное  $X5$ ;
2. событие  $X2$  влечет событие противоположное  $X4$ ;
3. событие противоположное  $X3$  влечет не наступление  $X5$ ;
4. событие противоположное  $X3$  влечет не наступление  $X4$ ;

Тот же результат получается если, описать логику задачи в виде равенств равносильных отношению включения:  $X1=X1X5'$ ;  $X5=X5X3$ ;  $X2=X2X4'$ ;  $X4=X4X3$ ;

Для системы с заданными соотношениями включения и в виде равенств получены, с помощью программы, одинаковые базовые множества номеров  $Ur$  и построена линейная диаграмма рис 1.

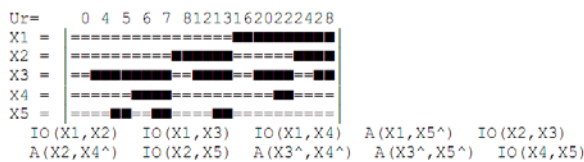


Рис. 3 Диаграмма логических связей задачи.

Номера входящие в множество  $Ur$  это номера непустых конституент упорядоченной (перенумерованной) системы множеств  $X1, X2, X3, X4, X5$ . Сопоставление конституент номерам и наоборот осуществляется очень просто. Например, номер 28 переводится в двоичную систему счисления как 11100 и ему ставится в соответствие конституента  $X1X2X3X4'X5'$  где единица на  $i$ -ом месте сопоставляется множеству  $Xi$ , а ноль на  $j$ -ом месте дополнению множества  $Xj$ , то есть множеству

$$U \setminus X_j = X_j'$$

На диаграмме рис. 1 случайным событиям, которые могут произойти соответствуют подмножества номеров универсума  $Ur$ : Например, событию  $X1=(X1X5')$  с вероятностью  $r1$  соответствует множество номеров  $X1=X1X5'=[16, 20, 22, 24, 28]$ , при этом вероятность  $P(X1X5')=P(X5')*P(X1/X5')=(1-r3)*p1=(1-p3*p5)*p1=r1$ .

Последовательно, с учетом логических связей вычислим вероятность всех конституент, составляющих базовое множество номеров  $Ur=[4,5,6,7,8,12,13,16,20,22,24,28]$ . Используя логическое описание задачи, получим:

$$[28]=X1X2X3X4'X5' = X1X2X3 \text{ в силу 1 и 2. В силу независимости } X1, X2, X3 \text{ } P[28]=r1*r2*r3;$$

$$[24]=X1X2X3'X4'X5' = X1X2X3' \text{ в силу 1 и 2, } P[24]=r1*r2*(1-r3);$$

$$[2]=X1X2'X3X4X5' = X1X2'X4 \text{ в силу 1 и 3, } P[2]=r1*(1-r2)*r4;$$

$$[20]=X1X2'X3X4'X5' = X1X2'X3X4' \text{ в силу 1 и 3}$$

$$P[20]=r1*(1-r2)*(r3-r4);$$

$$[16]=X1X2'X3'X4'X5' = X1X2X3' \text{ в силу 3 и 4,}$$

$$P[16]=r1*(1-r2)*(1-r3);$$

$$[13]=X1'X2X3X4'X5' = X1'X2X5 \text{ в силу 2 и 4, } P[13]=(1-r1)*(r2)*(r5);$$

$$[12]=X1'X2X3X4'X5' = X1'X2X3X5' \text{ в силу 2 и 4}$$

$$P[12]=(1-r1)*(r2)*(r3-r5);$$

$$[8]=X1'X2X3'X4'X5' = X1'X2X3'X5' \text{ в силу 2 и 4}$$

$$P[8]=(1-r1)*(r2)*(1-r3);$$

$$[7]=X1'X2'X3X4X5 = X1'X2'X4X5 \text{ в силу 3 и 4, } P[7]=(1-r1)*(1-r2)*r4*r5;$$

$$[6]=X1'X2'X3X4X5' = X1'X2X4X5' \text{ в силу 3, } P[6]=(1-r1)*(1-r2)*r4*(1-r5);$$

$$[5]=X1'X2'X4'X5 \text{ в силу 1, } P[5]=(1-r1)*(1-r2)*(1-r4)*r5;$$

$$[4]=X1'X2'X3X4'X5' \text{ в силу 3 и 4 и независимости } X4 \text{ и } X5, P[4]=(1-r1)*(1-r2)*(r3-r4-r5+r4*r5);$$

$$[0]=X1'X2'X3'X4'X5' = X1'X2'X3' \text{ в силу 3 и 4 } P[0]=(1-r1)*(1-r2)*(1-r3);$$

Легко проверить, что

$$P[16..28]=P[16]+P[20]+P[22]+P[24]+P[28]=P(X1)=r1*(1-r2)*(1-r3)+r1*(1-r2)*(r3-r4)+r1*(1-r2)*r4+r1*r2*r3=r1;$$

$$P[8..13]+P[24,28]=P(X2)=(1-r1)*(r2)*(r5)+(1-r1)*(r2)*(r3-r5)+(1-r1)*(r2)*(1-r3)+r1*(1-r2)*r4+r1*r2*r3=r2;$$

$$P[4..7]+P[12,13]+P[20,22]+P[28]=P(X3)=(1-r1)*(1-r2)*(r3-r4-r5+r4*r5)+(1-r1)*(1-r2)*(1-r4)*r5+(1-r1)*(1-r2)*r4*r5+(1-r1)*(1-r2)*r4*(1-r5)+(1-r1)*(r2)*(r3-r5)+(1-r1)*(r2)*(r5)+r1*(1-r2)*(r3-r4)+r1*(1-r2)*r4+r1*r2*r3=r3;$$

$$P[6,7]+P[22]=P(X4)=(1-r1)*(1-r2)*r4*r5+(1-r1)*(1-r2)*r4*(1-r5)+r1*(1-r2)*r4=(1-r1)*(1-r2)*[r4*r5+r4-r4*r5]+r1*(1-r2)*r4=(1-r1)*(1-r2)*r4+r1*(1-r2)*r4=r4*(1-r2);$$

$$P[5,7,13]=(1-r1)*(1-r2)*(1-r4)*r5+(1-r1)*(1-r2)*r4*r5+(1-r1)*(r2)*(r5)=(1-r1)*r5;$$

$$P[8..28]=P(X1+X2)=r1+r2-r1*r2;$$

Этот и предыдущий результат указывают на детерминированную связь случайных событий  $X1$  и  $X5'$ ,  $X2$  и  $X4'$  одно не может произойти без другого. Кроме того, имеют место еще 2 равенства.

$$P[0..7]=P(X1'X2')=(1-r1)*(1-r2)=1-P(X1+X2)=(1-r1-r2+r1*r2);$$

$$P[0, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 16, 20, 22, 24, 28]=1$$

Произведем декомпозицию исходной логики - алгебраической модели задачи (рис. 4).

В системе событий можно выделить два кластера на основе силы логических связей между ними это системы  $\{X1, X3, X5\}$  и  $\{X2, X3, X4\}$ . Их линейные диаграммы показаны на рис. 4.

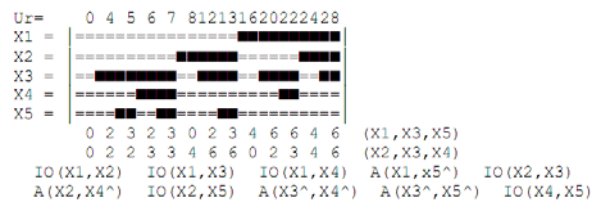


Рис. 4 Декомпозиция исходной задачи

То есть исходную задачу можно решать, разбив ее на две подзадачи. Решение приведено ниже. Разбиение можно осуществить на исходной диаграмме удалив из нее сначала множества  $X2$  и  $X4$ , затем  $X1$



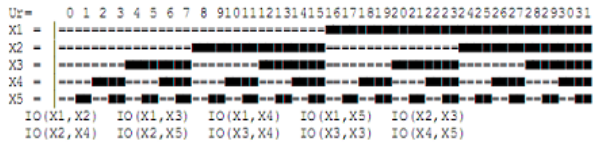


Рис. 8 Диаграмма логических связей задачи об электроснабжении.

Эта диаграмма удовлетворяет условиям теоремы 1, то есть события  $\{X1, X2, X3, X4, X5\}$  независимы в совокупности. На рис. 9 показана часть этой диаграммы, конstituенты, которой образуют целевое событие Z.

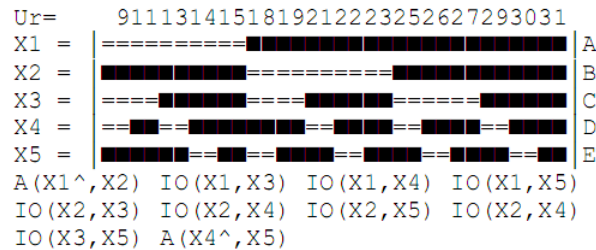


Рис. 9 Часть линейной диаграммы задачи, соответствующая событию целевому событию

$$Z = X1X4 + X1X3X5 + X2X4 + X2X3X4$$

- $P[31] = r1 * r2 * r3 * r4 * r5;$
- $P[30] = r1 * r2 * r3 * r4 * (1-r5);$
- $P[29] = r1 * r2 * r3 * (1-r4) * r5;$
- $P[28] = r1 * r2 * r3 * (1-r4) * (1-r5);$
- $P[27] = r1 * r2 * (1-r3) * r4 * r5;$
- $P[26] = r1 * r2 * (1-r3) * r4 * (1-r5);$
- $P[23] = r1 * (1-r2) * r3 * r4 * (1-r5);$
- $P[22] = r1 * (1-r2) * r3 * r4 * r5;$
- $P[21] = r1 * (1-r2) * r3 * (1-r4) * r5;$
- $P[20] = r1 * (1-r2) * r3 * (1-r4) * (1-r5);$
- $P[19] = r1 * (1-r2) * (1-r3) * r4 * r5;$
- $P[15] = (1-r1) * r2 * r3 * r4 * r5;$
- $P[14] = (1-r1) * r2 * r3 * r4 * (1-r5);$
- $P[13] = (1-r1) * r2 * r3 * (1-r4) * r5;$
- $P[11] = (1-r1) * r2 * (1-r3) * r4 * r5;$
- $P[10] = (1-r1) * r2 * (1-r3) * r4 * (1-r5);$

Для случая когда  $r1=r2=r3=r4=r5=0,5$  имеем  $P(Z)=0,5$ , что соответствует результату Рябинина И.А. и Кулика Б.А

#### Задача 4

Рассмотрим известный пример Бернштейна, иллюстрирующий, то обстоятельство, что попарно независимые случайные события числом не менее трех могут образовать систему событий не являющихся независимыми в совокупности.

У пирамиды четыре грани A, B, C, D. Грань A имеет цвет E, грань B имеет цвет F, грань C имеет цвет G, грань D трехцветная. Она имеет цвета E, F, G.

Случайные события при бросании тетраэдра:

A - выпала грань A; B - выпала грань B; C - выпала грань C; D - выпала грань D; E - выпал цвет E; F - выпал цвет F; G - выпал цвет G.

Попарно несовместимыми событиями являются события A, B, C, D. Являются ли независимыми в совокупности события E, F, G? Нет, не являются. Для того чтобы они были независимыми в совокупности необходимо, чтобы их БМН было равно  $[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$ . Это следует из теоремы 1

Её условие не выполняется, так как после удаления событий A, B, C, D БМН системы будет равно  $[7, 1, 2, 4]$ . Один из возможных вариантов задания логических связей задачи для компьютерной программы записан между служебными словами ZADNAME и END.

```
ZADNAME: BERN
NUMBERVAL:7
A B C D E F G
NUMBERPOS:13
EQ(A*B,U^)$
EQ(A*C,U^)$
EQ(A*D,U^)$
EQ(B*C,U^)$
EQ(C*D,U^)$
EQ(B*D,U^)$
EQ(A+D,E)$
EQ(B+D,F)$
EQ(C+D,G)$
A(D,E)$
A(D,F)$
A(D,G)$
EQ(A+B+C+D,U)$ END
```

Этим ограничениям сопоставляется линейная диаграмма причинно - следственных связей испытания, показанная на машинограмме рис. 10. Если из нее удалить множества, X1, X2, X3, X4, соответствующие событиям A, B, C, D, то БМН оставшейся системы множеств E=X5, F=X6, G=X7, то есть множество номеров непустых конstituент будет равно не  $[0..7]$ , а будет равно  $[1, 2, 4, 7]$ . Таким образом, мы доказали, что случайные события E, F, G не являются независимыми в совокупности.

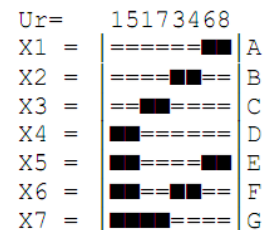


Рис. 10 Линейная диаграмма для примера Бернштейна

Рассмотренные примеры решения задач вероятностной логики, то есть задач теории вероятностей описанных в форме односмысловых логических суждений на основе функторов ортогонального базиса позволяют ставить и решать задачи компьютеризации интеллектуальной деятельности. По существу программная реализация точной интерпретации комплекса суждений является своеобразным усилителем естественного интеллекта.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье анализируется актуальная проблема искусственного интеллекта совместное использование логики и вероятности при решении задач. Как отмечается в работе [Кулик 2010] это является нетривиальной задачей. Автором предлагается алгебраическая (на основе алгебры множеств) интерпретация аристотелевской силлогистики изоморфная алгебре случайных событий относительно отноше-

ния строгого включения одного множества в другое. Которая позволяет решать задачи проверки гипотез о логическом следовании суждения из множества посылочных суждений, то есть устанавливать правильность рассуждений в форме полисиллогизмов. По свидетельству профессора Непейводы Н.Н. количество работ в мировой науке, посвященных этому вопросу превышает 500, что указывает на сложность проблемы. Для ее решения предложен целый ряд расходящихся решений, предложенных самими авторитетными логиками. В работах [Сметанин 2010, 2011a, 2011b] предложена точная и непротиворечивая модель силлогистики, которая в данной публикации естественным образом «погружена» в вероятностную меру. В таком случае естественно возникает вопрос об адекватности этой модели содержательному смыслу. Наш анализ показывает, что эта модель не менее адекватна, чем лучшие из предложенных решений. Предлагаемый подход к компьютеризации решения задач является новым. Развитие предлагаемого подхода видится в создании формального исчисления конституентных множеств и построения системы искусственного интеллекта для решения вероятностных и логических задач, в частности возможно получить новые научно – обоснованные результаты в теории байесовских сетей [Тулупьев 2006], [Рассел 2006] и вероятностных выводов. Обратим внимание читателей на то, что предложенная модель не только является объединение всех трех подходов упомянутых во введении, но и естественным образом позволяет отразить не только причинно – следственные (детерминированные и стохастические) связи событий, но и естественное упорядочение их прообразов во времени в объективной реальности. Частичный порядок следования событий во времени легко укладывается в линейный порядок их следования в заданной алгебраической системе [Сметанин 2010]. В заключение автор обращается к научным работникам с предложением о партнерстве. Предлагается рассмотреть возможности совместных разработок для компьютеризации решения задач инжиниринга и реинжиниринга бизнес - процессов (BP), задач искусственного интеллекта, задач расчета надежности систем и безопасности бизнеса, задач анализа законодательных актов, задач модернизации и компьютеризации сложившейся в 20 веке дидактической системы обучения логике. Все это произвести на основе подхода развиваемого проф. Непейводой Н.Н. в области неклассических логик и хаотического программирования и подхода к решению задач полисиллогистики и вероятностной логики развиваемого доц. Сметаниным Ю.М. на основе ортогонального базиса силлогистики, являющегося альтернативой базису силлогистики Аристотеля.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- [Бочаров 2010] Бочаров В.А., Маркин В.И. Силлогистические теории. – М.: Прогресс – Традиция, 2010. 336 с.  
 [Вальков 1985] Вальков К.И. Проекционное моделирование и автоматизация. Учебное пособие для факультета повышения квалификации. Л.: ЛИСИ, 1985, 86 с.  
 [Владимиров 1969] Владимиров Д.А. Булевы алгебры. М.:

Наука 1969. С. 320, л.

- [Колмогоров ] Колмогоров А. Н. Теория вероятностей и математическая статистика: //Сб. статей— М.: Наука, 1986.—535 с.  
 [Рябинин 2003] Рябинин И.А. Логико-вероятностное исчисление как аппарат исследования надежности и безопасности структурно-сложных систем. // АИТ, «Наука», М, 2003, № 7, с. 178-186.  
 [Лобанов 2009] Лобанов В.И. Русская вероятностная логика – М.: «Русская правда» 2009.- 320 стр.  
 [Сметанин 2009] Сметанин Ю. М. Ортогональный базис силлогистики // Вестник Удмуртского университета. Серия математика, механика. Компьютерные науки. Вып. 4 . 2009 г. С .155-166  
 [Сметанин 2010] Сметанин Ю. М. Алгоритм решения полисиллогизмов в ортогональном базисе посредством исчисления конституентных множеств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 4.-С. 172-185.  
 [Сметанин 2011a] Анализ парадоксов материальной импликации в ортогональном базисе силлогистики // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 4.- С.144-162  
 [Сметанин 2011b] Медицинская диагностика и ортогональный базис силлогистики.// В настоящее собрание.  
 [Горбатов 1976] Горбатов В.А. Теория частично упорядоченных систем. – М.: «Советское радио», 1976. – 336 с.  
 [Кулик 1997] Кулик Б.А. Логические основы здравого смысла. Под редакцией Поспелова Д.А. – СПб.: Политехника, 1997. – 131 с.  
 [Кулик 2010] Алгебраический подход к интеллектуальной обработке данных и знаний . Б.А. Кулик, А.А. Зуенко, А.Я. Фридман. – СПб.: изд-во Политех. Ун-та, 2010.- 235 с.  
 [Порецкий 1884] Порецкий П.С. О способах решения логических равенств и об одном обратном способе математической логики.// Собрание протоколов заседаний секции физико - математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете, т. 2, Каз., 1884.  
 [Брусенцов 1998] Брусенцов Н.П. Искусство достоверного рассуждения. Неформальная реконструкция аристотелевой силлогистики и булевой математики мысли. - М.: Фонд «Новое тысячелетие», 1998.  
 [Nilson 1986] Nilson N. J. Probabilistic Logic /N/ J/ Nilson // Artificial Intelligense. 1986 N 28/ - pp 71-87.  
 [Тулупьев 2006] Тулупьев А. Л., Николенко С. И., Сироткин А. В. Байесовские сети: Логико-вероятностный подход. — СПб.: Наука, 2006. — 607 с.  
 [Рассел 2006] Рассел, Стюарт, норвиг, Питер. Искусственный интеллект: современный подход, 2 – е изд.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1408 с.: ил.]

## Probabilistic logic and ortogonal basis of syllogistics

Smetanin Yu.M.

Udmurt State University, Izhevsk

gms1234gms@rambler.ru

## RESUME

In this paper, we consider the algebra of random events and its interpretation in a non-degenerate Boolean algebra on the bases of sets/ It is shown that the classical use of the concepts of logic and probability is quite compatible with the engineering logical –and probabilistic estimate and probabilistic logic, the beginning of which goes back to classical works in the field of artificial intelligence/ It is shown that some of most labour-wide tasks can be solved with the help of the proposed logical description and accurate interpretation.

Key words: algebraic system, the calculation of constituent sets, probability, orthogonal line basis of syllogistic.